Задание 13. Решение тригонометрических уравнений

Для нахождения решений тригонометрических уравнений и неравенств используем различные таблицы и свойства тригонометрических функций.

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$	$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$
$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$	$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$
$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$	$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$
$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$	$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$
$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$	$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$
$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$
$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$	$ctg\alpha\cdot ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$
$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Рисунок 1

Sin(arcsin x)=x	Arcsin(sin x)=x
Cos(arccos x)=x	arccos (cos x)=x
Tg(arctg x)=x	arctg (tgx)=x
Ctg(arcctg x)=x	Arcctg (ctg x)=x

Рисунок 2

urok-online24.ru

Задание 13

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$2\cdot\left(\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$$

$$2\cdot\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$$

Раскроем скобки в левой части

$$2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$$

$$\sin x\cdot 1+\cos x\cdot\sqrt{3}+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$$

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$$

Перенесем все выражения в левую часть

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+\cos 2x-\sqrt{3}\cos x-1=0$$

$$\sin x+\cos 2x-1=0$$

Применим формулу косинуса двойного угла

$$\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha}$$

$$\sin x+1-2\sin^2 x-1=0$$

urok-online24@mail.ru

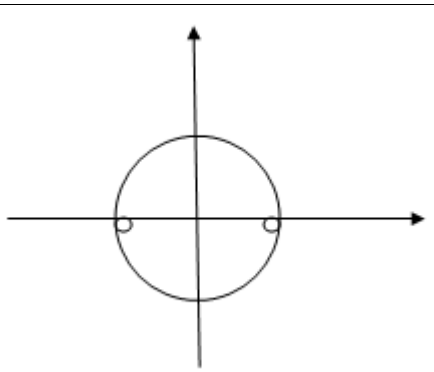
Приведем подобные выражения

$\sin x - 2\sin^2 x = 0$

$\boxed{\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x = (\sin x)^2}$

$\sin x - 2 \cdot (\sin x)^2 = 0$

$\sin x \cdot (1 - 2 \cdot \sin x) = 0$

$\sin x = 0$	
$\sin x = 0 \Rightarrow x = (-1)^m \cdot \arcsin 0 + \pi n$ $x = (-1)^m \cdot 0 + \pi n$ $x = \pi n$	

$(1 - 2 \cdot \sin x) = 0$	
$1 - 2 \cdot \sin x = 0$ $-2 \cdot \sin x = 0 - 1$ $-2 \cdot \sin x = -1$ $\sin x = \frac{-1}{-2}$ $\sin x = \frac{1}{2}$ $x = (-1)^m \cdot \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$ $x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

$-3\pi \le x \le -\frac{3\pi}{2}$

Если $\underline{x = \pi n}$

$-3\pi \le \pi n \le -\frac{3\pi}{2}$

urok-online24.ru

$$-3 \le n \le -\frac{3}{2}$$

$$-3 \le n \le -1.5$$

$n - целое$

$$n = -3;-2$$

$$n = -3 \Rightarrow x = \pi n = \pi \cdot (-3) = -3\pi$$

$$n = -2 \Rightarrow x = \pi n = \pi \cdot (-2) = -2\pi$$

Если $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$$-3\pi \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2}$$

$$-3 \le \frac{1}{6} + 2n \le -\frac{3}{2}$$

$$-3 - \frac{1}{6} \le \frac{1}{6} + 2n - \frac{1}{6} \le -\frac{3}{2} - \frac{1}{6}$$

$$-\frac{19}{6} \le 2n \le -\frac{10}{6}$$

$$-\frac{19}{12} \le n \le -\frac{10}{12}$$

$$-1\frac{7}{12} \le n \le -\frac{5}{6}$$

$n - целое$

$$n = -1$$

$$n = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot (-1) = \frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{1} = -\frac{11\pi}{3}$$

Если $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$$-3\pi \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2}$$

urok-online24@mail.ru

$$-3 \le \frac{5}{6} + 2n \le -\frac{3}{2}$$

$$-3 - \frac{5}{6} \le \frac{5}{6} + 2n - \frac{5}{6} \le -\frac{3}{2} - \frac{5}{6}$$

$$-\frac{23}{6} \le 2n \le -\frac{14}{6}$$

$$-\frac{23}{12} \le n \le -\frac{14}{12}$$

$$-1\frac{11}{12} \le n \le -1\frac{1}{6}$$

$n - целое$, нет корней

Ответ: $-3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{3}$

urok-online24@mail.ru