№ 13.12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+e)}$$

$$u_n = \frac{1}{\ln^n(x+e)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln^n(x+e)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(x+e)} = \frac{1}{\log_{(x+e)} e}$$

~~ряд сходится при любом~~

ряд сходится при

$$\frac{1}{x+e} < 1$$

$$1 < x+e$$

$$x > 1-e$$

$(1-e; +\infty)$ область сходимости ряда

№ 14.12

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n\,(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$$

№ 5.12.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ числовой ряд с положительными членами

$a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$

Применим признак Даламбера

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\,(n!)^2}{((n+1)!)^2\, n^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2\, n^n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 \cdot (n+1) =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \cdot (n+1) =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)}} = e^0 = 0 < 1$

ряд сходится

№ 8.12

$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}$ знакочередующийся ряд

Проверим на сходимость по признаку Лейбница

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln(2n)} =$

$= \frac{1}{\infty \ln \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

$|a_3| = \frac{1}{3 \ln(2 \cdot 3)} = \frac{1}{3 \ln 6} \approx$

$|a_4| = \frac{1}{4 \ln 8} \approx$

$|a_5| = \frac{1}{5 \ln 10} \approx$

$\frac{1}{3 \ln 6} > \frac{1}{4 \ln 8} > \frac{1}{5 \ln 10} > \ldots$

ряд сходится.

№ 11.12.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$

функциональный ряд

$u_n = \frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$ $\quad u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^3}$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^3}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^3}} \right| =$

$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x+n)^3}{(x+n+1)^3}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{x+n+1-1}{x+n+1}\right)^3\right| =$

$= \lim_{n\to\infty} \left|\left(1 - \frac{1}{x+n+1}\right)^3\right| =$

$= \left(1 - \frac{1}{\infty}\right)^3 = (1-0)^3 = 1 \neq 1$

ряд всюду расходящийся.

№ 12.12.

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^{3n} \sin\frac{3x}{\sqrt{n}}$

$u_n = 3^n x^{3n} \sin\frac{3x}{\sqrt{n}}$

$$u_{n+1} = 3^{n+1} \cdot x^{3(n+1)} \sin\frac{3x}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{3(n+1)}\sin\frac{3x}{\sqrt{n+1}}}{3^n x^{3n}\sin\frac{3x}{\sqrt{n}}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|3\cdot x^3 \cdot \frac{\sin\frac{3x}{\sqrt{n+1}}}{\sin\frac{3x}{\sqrt{n}}}\right| =$$

$$= \left|\text{при } n\to\infty \quad \sin\frac{3x}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{3x}{\sqrt{n+1}}\right| =$$

$$\sin\frac{3x}{\sqrt{n}} \sim \frac{3x}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|3x^3 \cdot \frac{\frac{3x}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3x}{\sqrt{n}}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|3x^3\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 3|x^3| \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\frac{n+1-1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 3|x^3| \cdot \sqrt{1-\frac{1}{n+1}}$$

$$= 3|x^3| \cdot \sqrt{1-0} = 3|x^3|$$

ряд сходится при $3|x^3|<1$

$|x^3|<\frac{1}{3}$ $\quad |x|<\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$-\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ интервал сходимости ряда.

При $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3n} \sin\frac{3\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{3}}\right)}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \frac{(-1)^{3n}}{3^n} \frac{\sin\left(-\sqrt[3]{3^2}\right)}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1} \sin\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n+1}}$$ знакочередующийся ряд.

~~ряд сходится при~~

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{\sin\sqrt[3]{9}}{\infty} = 0$$

$|a_1| = \frac{\sin\sqrt[3]{9}}{\sqrt{2}}$ $\quad |a_2| = \frac{\sin\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$

$|a_3| = \frac{\sin \sqrt[3]{9}}{\sqrt{4}} = \frac{\sin \sqrt[3]{9}}{2}$

$\frac{\sin \sqrt[3]{9}}{\sqrt{2}} > \frac{\sin \sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}} > \frac{\sin \sqrt[3]{9}}{2} > \dots$

ряд сходится при $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

при $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{3n} \sin 3 \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{n}} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \frac{1}{3^n} \sin \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \sin \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{\infty}} = 0.$

$\sin \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}} \dots \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}$ $\sum b_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ обобщенный гарм. ряд $p = \frac{1}{2} < 1$ расх

$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt[3]{9}}{n}} \cdot \sqrt[3]{9} =$

$= 1 \cdot \sqrt[3]{9}$ - конечное число

$p = \frac{1}{2}$ ряд расход $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ область сходим