№1 6.№15

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+3n-20}$$

$9n^2+3n-20=0$

$D = 3^2 - 4\cdot 9\cdot(-20) = 9+720 = 729$

$n_1 = \frac{-3+27}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

$n_2 = \frac{-3-27}{18} = \frac{-30}{18} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$

$9n^2+3n-20 = 9\left(n-\frac{4}{3}\right)\left(n+\frac{5}{3}\right) =$

$= (3n-4)(3n+5)$

$$\frac{9}{9n^2+3n-20} = \frac{9}{(3n-4)(3n+5)} = \frac{A}{3n-4} + \frac{B}{3n+5} =$$

$$= \frac{3An+5A+3Bn-4B}{(3n-4)(3n+5)} = \frac{n(3A+3B)+(5A-4B)}{(3n-4)(3n+5)}$$

$n \mid 3A+3B=0 \quad A=-B$

$n^0 \mid 5A-4B=9 \quad B=-A$

$5A-4(-A)=9$

$9A=9$

$A=1$

$$\frac{9}{9n^2+3n-20} = \frac{1}{(3n-4)} + \frac{-1}{3n+5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+3n-20} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n+5} \right)$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n+5} \right) = \frac{1}{3 \cdot 1 - 4} - \frac{1}{3 \cdot 1 + 5} +$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 2 - 4} - \frac{1}{3 \cdot 2 + 5} + \frac{1}{3 \cdot 3 - 4} - \frac{1}{3 \cdot 3 + 5} +$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 4 - 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 + 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 - 4} - \frac{1}{3 \cdot 5 + 5} +$$

$$= -1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} + \frac{1}{5} - \frac{1}{14} +$$

$$+ \frac{1}{8} - \frac{1}{17} + \frac{1}{11} - \frac{1}{20} +$$

$$+ \frac{1}{14} - \frac{1}{23} + \frac{1}{17} - \frac{1}{26} - \frac{1}{20} -$$

$$- \frac{1}{29} + \ldots = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{-10+5+2}{10} =$$

$$= \frac{3}{10}.$$

№3 (615)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}$$

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{3^{n+1} (n+2)!}$$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+2)!}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{3\,(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\cdot \frac{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}\cdot \frac{2+0}{1+0} = \frac{2}{3} < 1$$

Ряд сходится.

4) (№615)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{3n+1}\right)^{2n+1}$$

Используем радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{tn}{3n+1}\right)^{2n+1}$$

$$a_n = \left(\frac{tn}{3n+1}\right)^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{tn}{3n+1}\right)^{2n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{tn}{3n+1}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{tn}{3n+1}\right)^{2+\frac{1}{n}} =$$

$$= \left(\frac{t\infty}{3\infty+1}\right)^{2+\frac{1}{\infty}} = \left(\frac{t}{3}\right)^2 = \frac{t^2}{9} < 1$$

ряд сходится

№5.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$$

$$\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)} \leq \frac{1}{n\ln^2(2n)}$$

Интегральный признак Коши

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^2(2x)}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\ln^2(2x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \ln(2x) \\ dt = (\ln 2x)'dx = \frac{1}{2x}(2x)'dx = \\ = \frac{1}{2x}\cdot 2\,dx = \frac{1}{x}dx \\ t_1 = \ln 2\cdot 2 = \ln 4 \\ t_2 = \ln 2b \end{array} \right.$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 4}^{\ln 2b}\frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_{\ln 4}^{\ln 2b} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left.\left(-\frac{1}{t}\right)\right|_{\ln 4}^{\ln 2b} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln 2b} + \frac{1}{\ln 4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2\cdot\infty} + \frac{1}{\ln 4} = -0 + \frac{1}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4} - 1$$ ряд сход

$\Rightarrow$ исходный ряд также сход

№6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\,2^{2n}}$$

Признак частотности

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\,2^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0$$

$$|a_1| = \frac{1}{(1+1)\,2^{2\cdot 1}} = \frac{1}{4}$$

$$|a_2| = \frac{1}{(2+1)\,2^{2\cdot 2}} = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$$

$$|a_3| = \frac{1}{(3+1)\,2^{2\cdot 3}} = \frac{1}{4\cdot 64} = \frac{1}{256}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{12} > \frac{1}{256} > \ldots$$ ряд сходится

№4 14.15

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,9^n (x-1)^{2n}}$$

$$u_n = \frac{1}{n\,9^n (x-1)^{2n}}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\,9^{n+1}(x-1)^{2n+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)\,9^{n+1}(x-1)^{2n+2}}}{\frac{1}{n\,9^n (x-1)^{2n}}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n\,9^n (x-1)^{2n}}{(n+1)\,9^{n+1}(x-1)^{2n+2}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{1+0} =$$

$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$

ряд сходится при

$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} < 1$

$\frac{1}{(x-1)^2} < 9$

$\frac{1}{9} < (x-1)^2$

$\frac{1}{3} < |x-1|$

$\begin{cases} (x-1) > \frac{1}{3} \\ (x-1) < -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$

$\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$

$(\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ интервал сходимости

Проверим на сходимость на концах интервала

При $x = \frac{2}{3}$

При $x = \frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 9^n \left(\frac{2}{3}-1\right)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 9^n \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 9^n \cdot \frac{1}{9^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ гармонический ряд расходится

При $x = \frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 9^n \left(\frac{4}{3}-1\right)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 9^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 9^n} = \frac{1}{9^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ гармонический ряд расходится

№ 8

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^2} dx \approx$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{-2x^2} = 1 + \frac{(-2x^2)}{1!} + \frac{(-2x^2)^2}{2!} + \frac{(-2x^2)^3}{3!} +$$

$$+ \frac{(-2x^2)^4}{4!} + \frac{(-2x^2)^5}{5!} + \dots$$

$$e^{-2x^2} = 1 - \frac{2x^3}{1!} + \frac{4x^4}{2!} - \frac{8x^6}{3!} + \frac{16x^8}{4!} - \frac{32x^{10}}{5!} + \dots$$

$$e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^8 - \frac{4}{15}x^{10} + \dots$$

$$\int_0^{0,3} e^{-2x^4} dx = \int_0^{0,3} \left(1 - 2x^2 + 2x^4 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^8 - \frac{4}{15}x^{10} + \dots\right) dx = \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} - \frac{4}{3}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{2}{5}\cdot\frac{x^9}{9} - \frac{4}{15}\cdot\frac{x^{11}}{11} + \dots\right)\Big|_0^{0,3} =$$

$$= 0,3 - \frac{2}{3}\cdot 0,3^3 + \frac{2}{5}\cdot 0,3^5 - \frac{4}{21}\cdot 0,3^7 + \frac{2}{27}\cdot 0,3^9 - \frac{4}{165}\cdot 0,3^{11} + \dots = 0,3 - 0,06 + 0,000972 - 0,000042 + \dots =$$

$$= 0,3 - 0,06 + 0,001 \approx 0,241$$

№9

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin \frac{2+(-1)^n}{n} \pi$$

II Признак сравнения рядов

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ расходится, т.к. является обобщенным гармоническим рядом и $p = \frac{3}{4} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin \frac{2+(-1)^n}{n} \pi}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}} =$$

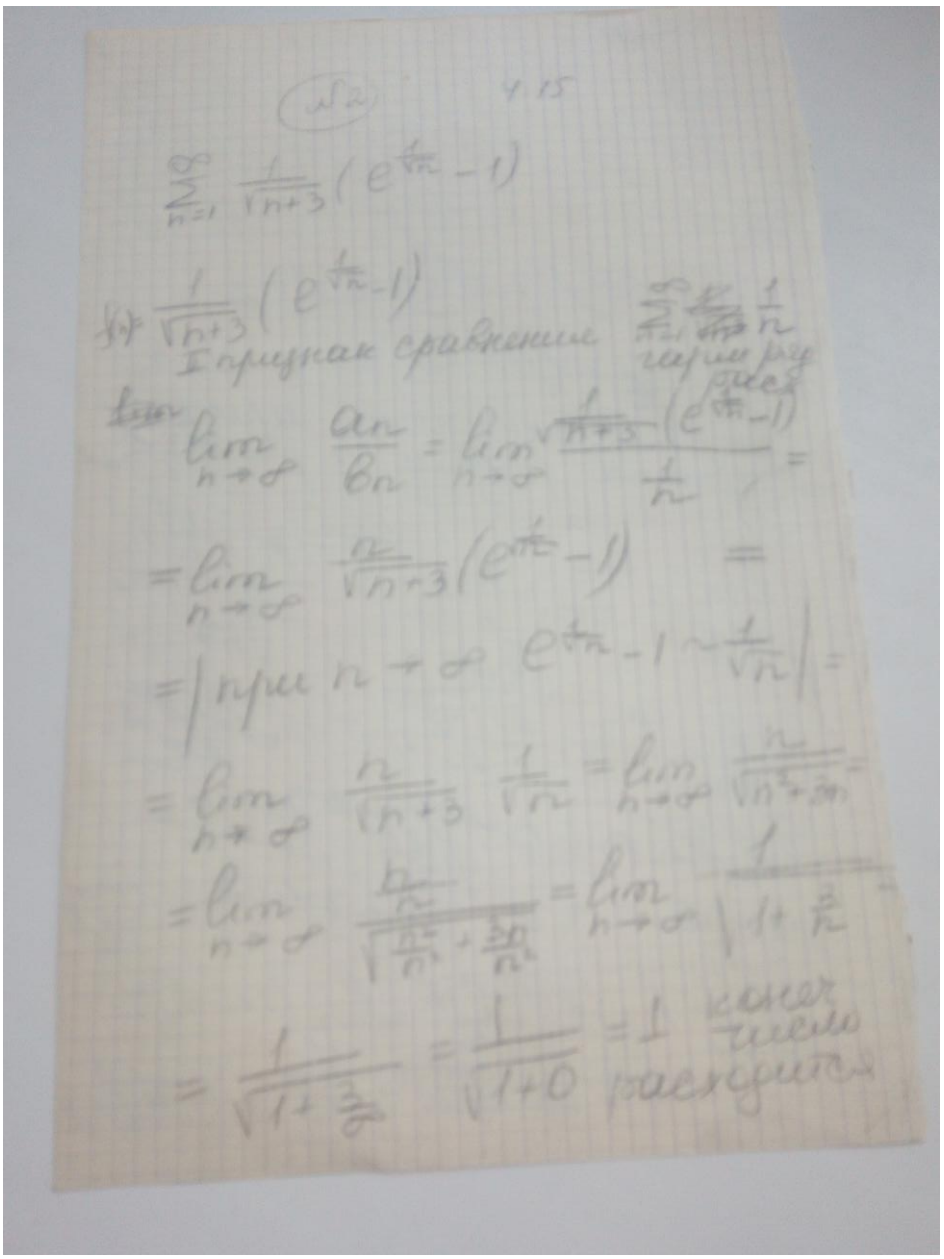
$$= \lim_{n\to\infty} \sin \frac{2+(-1)^n}{n} \pi = \sin 0 = 0$$ конечное число

$$= \left| \text{при } n \to \infty \quad \sin \frac{2+(-1)^n}{n} \pi \sim \frac{2+(-1)^n}{n} \pi \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{(2+(-1)^n)\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} (2+(-1)^n)\pi =$$

$$\begin{cases} \equiv 3\pi & \text{если } n \text{ сам } n\text{-нат} \\ \equiv \pi & \text{если } n \text{ чет} \end{cases}$$ конечное число

сходится



№2 4.15

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

I признак сравнения $\sum \frac{1}{n}$ гармонический ряд расх

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) =$

$= \left|\text{при } n\to\infty \; e^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}\right| =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+3}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\infty}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$ конечное число расходится