Вариант 22

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

Обозначим матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

При умножении матрицы на матрицу действует правило: каждая строка первой матрицы умножается на каждый столбец второй матрицы.

Перемножим первые две матрицы:

$$D=A\cdot B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$a_{11}=-2\cdot 3+1\cdot 4=-6+4=-2$

$a_{12}=-2\cdot -2+1\cdot 0=4+0=4$

$a_{13}=-2\cdot 1+1\cdot 5=-2+5=3$

$a_{21}=3\cdot 3+1\cdot 4=9+4=13$

$a_{22}=3\cdot -2+1\cdot 0=-6+0=-6$

$a_{23}=3\cdot 1+1\cdot 5=3+5=8$

Затем результат умножим на третью матрицу:

$$D\cdot C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -14 & 4 \\ 49 & 26 & 49 \end{pmatrix}$$

$d_{11}=-2\cdot 1+4\cdot -2+3\cdot 3=-2-8+9=-1$

$d_{12}=-2\cdot 4+4\cdot 0+3\cdot -2=-8+0-6=-14$

$d_{13}=-2\cdot 3+4\cdot 1+3\cdot 2=-6+4+6=4$

$d_{21}=13\cdot 1-6\cdot -2+8\cdot 3=13+12+24=49$

$d_{22}=13\cdot 4-6\cdot 0+8\cdot -2=42-0-16=26$

$a_{23}=13\cdot 3+-6\cdot 1+8\cdot 2=39-6+16=49$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -14 & 4 \\ 49 & 26 & 49 \end{pmatrix}$$

Вариант 22 Контрольная работа №1

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix}$.

Решение

а)

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)\cdot(3)\cdot 2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot M_{11} = (-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot(-2)\cdot(-1) = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot M_{11} = (-1)\cdot 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3\cdot 1\cdot(2\cdot(-2)-(-3)\cdot(-2)) = -3\cdot(-4-6) = 30$$

б) $\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix} \cdot(-1)\cdot(-1) = \begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$ От элементов второго и третьего столбца отнимем элементы первого столбца

$$= \begin{vmatrix} 7241 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$ К элементам первой строки прибавим удвоенные элементы третьей строки

$$= \begin{vmatrix} 7237 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 7237\cdot A_{11} = 7237\cdot(-1)^{1+1} M_{11} = 7237\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7237\cdot 1\cdot(0\cdot(-2)-(-1)\cdot 2) = 7237\cdot 2 = 14474$$

Вариант 22 Контрольная работа №1

3. Решить систему линейных уравнений: **а)** методом Крамера, **б)** при помощи обратной матрицы, **в)** методом Гаусса.

$$\begin{cases} 1x+2y-z=2, \\ 3x+4y+3z=4, \\ 2x+3y+3z=5. \end{cases}$$

Решение:

Запишем основную и расширенную матрицы для данной системы линейных уравнений, а также столбец свободных членов

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{расш}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \qquad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель основной матрицы

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot4\cdot3+2\cdot3\cdot2+3\cdot3\cdot(-1)-2\cdot4\cdot(-1)-3\cdot(3)\cdot1-3\cdot2\cdot3=-4$$

Так как найденный определитель отличен от нуля, то ранг матрицы A=3

Данный определитель является минором матрицы $A_{расш}$, rang A=rang $A_{расш}$=3,

система совместна и имеет единственное решение.

Найдем решение системы методом Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot4\cdot3+2\cdot3\cdot5+4\cdot3\cdot(-1)-5\cdot4\cdot(-1)-3\cdot(3)\cdot2-4\cdot2\cdot3=-4$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot4\cdot3+3\cdot5\cdot(-1)+2\cdot3\cdot2-2\cdot4\cdot(-1)-5\cdot(3)\cdot1-3\cdot2\cdot3=-16$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot4\cdot5+3\cdot3\cdot2+2\cdot4\cdot2-2\cdot4\cdot2-3\cdot4\cdot1-3\cdot2\cdot5=-4$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{-4}=-5 \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-16}{-4}=4 \quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1$$

Б) метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы, а затем при помощи элементарных преобразований строк приведем её к треугольному виду:

$$A_{расш}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 3 & 5\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-3)\\ \cdot 1\\ \cdot 1\end{array}\cdot(-2)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 6 & -2\\ 0 & -1 & 5 & 1\end{array}\right)\cdot(1)\approx$$

$$\cdot -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 6 & -2\\ 0 & 0 & -4 & -4\end{array}\right)\begin{array}{l}:\\ \\ :-4\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}:\ *1\\ *1\\ *-6*1\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}:\ *1\\ *1\\ *-6*1\end{array}\approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}*1\\ *-2\\ \\ \end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$$

В) С помощью обратной матрицы

Чтобы найти решение системы, нужно вычислить обратную матрицу для основной матрицы

.

Вычисляем определитель исходной матрицы:

Найдем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-1)^2\cdot(4\cdot 3-3\cdot 3)=3$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{3}\cdot(3\cdot(3)-2\cdot(3))=-5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{4}\cdot(3\cdot 3-2\cdot 4)=1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{3}\cdot(2\cdot(3)-3\cdot(-1))=-9$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{4}\cdot(1\cdot 3-2\cdot(-1))=5$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{5}\cdot(1\cdot 3-2\cdot 2)=1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{4}\cdot(2\cdot(3)-4\cdot(-1))=10=$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)^{5}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{5}\cdot(1\cdot(3)-3\cdot(-1))=-6$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^{6}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(-1)^{6}\cdot(1\cdot 4-3\cdot 2)=-2$$

Теперь, используя найденную обратную матрицу можно найти решение исходной системы:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{-18}\cdot\begin{pmatrix}3 & -9 & 10\\ -3 & 5 & -6\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$$

Вариант 22 Контрольная работа №1

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$A_\,расширенное = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ \cdot 1 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right) \cdot 3 \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -29 & -18 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 1x_1 - 29x_3 - 18x_4 = -1 \\ 1x_2 - 11x_3 - 7x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 29x_3 + 18x_4 - 1 \\ x_2 = 11x_3 + 7x_4 - 1 \end{cases}$$ **Общее решение**

Если x3=1 x4=0

$$\begin{cases} x_1 = 29 \cdot 1 + 18 \cdot 0 - 1 = 28 \\ x_2 = 11 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 1 = 10 \end{cases}$$

частное **решение**

Вариант 22 Контрольная работа №1

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

а) методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 16 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\cdot 6 + 1\cdot 0\cdot 16 + (-2)\cdot 1\cdot 2 - 16*1\cdot 2 - 1*0*4 - (-2)\cdot 1*6 = 24 + 0 - 4 - 32 - 0 + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 1*6 - 0*2 \neq 0$$

Ранг =2

б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot (-1)\cdot(-1) \cdot 1 \approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot (2) \cdot 1 \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг =2

Вариант 22 Контрольная работа №1

6. Показать, что векторы ***a***, ***b***, ***c***, образуют базис. Найти разложение вектора ***d*** по этому базису, если ***a*** = (2;4;2), ***b*** = (–1;–2;–2), ***c*** = (3;5;1), ***d*** = (3;5;–1).

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot -2\cdot 1 + -1\cdot 5\cdot 2 + 4\cdot -2\cdot 3 - 3\cdot -2\cdot 2 - 5\cdot -2\cdot (2) - -1\cdot 4\cdot 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow$$ Векторы линейно независимы и образуют базис.

Найдем координаты вектора d в этом базисе.

$$\vec{d} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{в} + \gamma\cdot\vec{c}$$

$$\begin{cases} 3 = \alpha\cdot(2) + \beta\cdot -1 + \gamma\cdot 3 \\ 5 = \alpha\cdot 4 + \beta\cdot -2 + \gamma\cdot 5 \\ -1 = \alpha\cdot 2 + \beta\cdot -2 + \gamma\cdot 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

$$\gamma = 1$$

$$\vec{d} = 1\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{в} + 1\cdot\vec{c}$$

Вариант 22 Контрольная работа №1

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) (***a***–3***b***)(2***a***+***b***), **б)** |(***a***–3***b***)×(2***a***+***b***)|,

где |***a***|=4, |***b***|=2, ***a***^***b***=2π/3.

а) (***a***–3***b***)(2***a***+***b***)

$$\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{a}-3\vec{b}^{\,2}=2\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^{\,2}=2\vec{a}^{\,2}-\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^{\,2}=$$

$$=2\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right)-3\left|\vec{b}\right|^2=2\cdot4^2-4\cdot2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-3\cdot2^2=32-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-12=28$$

б) |(***a***–3***b***)×(2***a***+***b***)|

$$\left[\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=\left|2\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{b}\times\vec{b}\right|=\left|2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\sin0+2\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{a}\times\vec{b}-3\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin0\right|=$$

,

$$=0+5\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\vec{b}\right)-0=5*4*2*\sin\frac{2\pi}{3}=40*\sqrt{3}/2=20\sqrt{3}$$

Вариант 22 Контрольная работа №1

8. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти: **а)** объем пирамиды, **б)** площадь грани *ABC*, **в)** косинус угла между ребрами *AB* и *AC*, **г)** уравнение прямой *AB*, **д)** уравнение плоскости *ABC*, если *A*(1;3;–1), *B*(2;–2;0), *C*(–1;1;2), *D*(3;2;1).
Даны координаты вершин пирамиды А1,А2,А3,А4
Определим координаты векторов с вершинами в данных точках.

$$\overrightarrow{AB}=\left(\overline{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1}\right)=(2-1\ ;\ -2-3\ ;\ 0-(-1))=(1;-5;1)$$
$$\overrightarrow{AC}=\left(\overline{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1}\right)=(-1-1;1-3;2-(-1))=(-2;-2;3)$$
$$\overrightarrow{AД}=\left(\overline{x_4-x_1;y_4-y_1;z_4-z_1}\right)=(3-1;2-3;1-(-1))=(2\ ;\ -1\ ;\ 2)$$

А)Объем пирамиды

$$V_{ABCД}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&-5&1\\-2&-2&3\\2&-1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot(1\cdot(-2)\cdot 2+(-2)\cdot(-1)\cdot 1+(-5)\cdot 3\cdot 2-2\cdot(-2)\cdot$$

$$\cdot\ 1-(-1)\cdot 3\cdot 1-(-2)\cdot(-5)\cdot 2)=\frac{|-45|}{6}=7.5$$

Б)Площадь грани находится по формуле:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|[AB\times AC]\right\|$$

$$[AB\times AC]=\begin{Vmatrix}i&j&k\\1&-5&1\\-2&-2&3\end{Vmatrix}=-13\ \ i\ \ -5j-12k=(-13;-5;-12)$$

$$\left\|[AB\times AC]\right\|=\sqrt{(-13)^2+(-5)^2+(-12)^2}=\sqrt{338}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|[AB\times AC]\right\|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{338}=18.358\ \text{кв.ед.}$$

в) косинус угла между ребрами *AB* и *AC*

$$cos\left(\overline{AB}\ \hat{}\ \overline{AC}\right)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=1*(-2)+(-5)*(-2)+1*3=11$$

$$cos\left(\overline{AB}\ \hat{}\ \overline{AC}\right)=\frac{11}{5\ \cdot\ 3}=0.70565$$

г) уравнение прямой АВ,

$$\frac{x\ -\ 1}{1}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z+1}{1}$$

д) уравнение плоскости АВС,

$$-13(x-\ 1)+\ -5\cdot(y-\ 3)+\ -12\cdot(z+1\ \ \ )=\ 0$$
$$-13x-5y-12z+16x=0$$

Вариант 22 Контрольная работа №1

9. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x-3y+z+2=0, \\ x-2y+3z+3=0. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ x=2y-3z-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ 3y-z-2=2y-3z-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ 3y-z-2-2y+3z+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ y+2z+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3\cdot(-2z-1)-z-2 \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(-6z-3)-z-2 \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-7z-5 \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+5}{-7}=z \\ \dfrac{y+1}{-2}=z \end{cases}$$

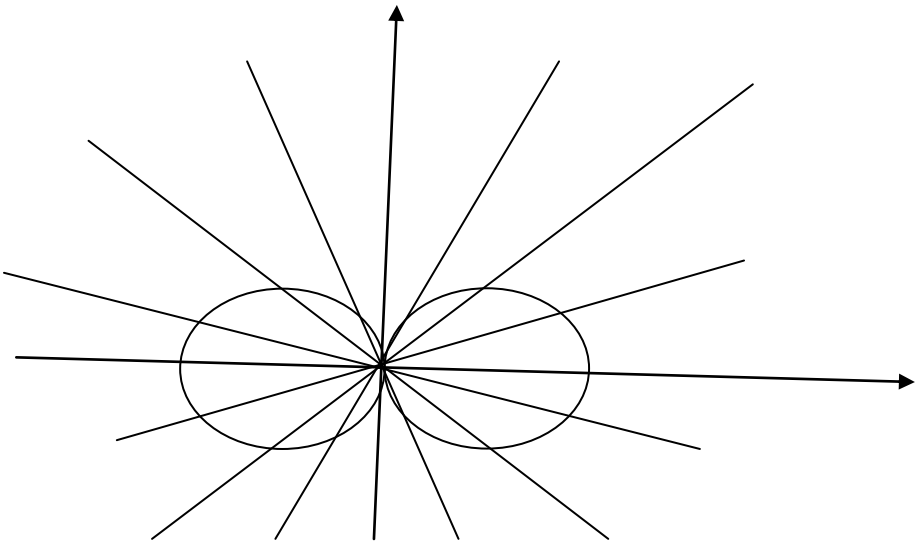
$$\frac{x+5}{-7}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$$

Вариант 22 Контрольная работа №1

10. Построить кривую $\rho = 3(1-\cos 2\varphi)$, заданную в полярных координатах.

φ	0	п/8	п/4	3п/8	п/2	5п/8	3п/4	7п/8	п
ρ	4	3,4	2	0,6	0	0,6	2	3,4	4

φ	9п/8	5п/4	11п/8	3п/2	13п/8	7п/4	15п/8	2п
ρ	3,4	2	0,6	0	0,6	2	3,4	4



Вариант 22 Контрольная работа №1

11. Вывести уравнение кривой, если абсолютная величина разности расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-7;0)$ и $F_2(13;0)$ есть величина постоянная и равна $p=16$. Сделать чертеж.

Пусть M(x;y)- произвольная точка кривой

$$\left|\overline{MF_1}\right| = \sqrt{(-7-x)^2+(0-y)^2} = \sqrt{(7+x)^2+y^2}$$

$$\left|\overline{MF_2}\right| = \sqrt{(13-x)^2+(0-y)^2} = \sqrt{(13-x)^2+y^2}$$

$$\left|\overline{MF_1}\right| - \left|\overline{MF_2}\right| = 16$$

$$\sqrt{(7+x)^2+y^2} - \sqrt{(13-x)^2+y^2} = 16$$

$$\sqrt{(7+x)^2+y^2} = \sqrt{(13-x)^2+y^2} + 16$$

$$\left(\sqrt{(7+x)^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(13-x)^2+y^2} + 16\right)^2$$

$$(7+x)^2+y^2 = \left(\sqrt{(13-x)^2+y^2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}\cdot 16 + 16^2$$

$$(7+x)^2+y^2 = (13-x)^2+y^2+32\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}+256$$

$$49+14x+x^2+y^2 = 169-26x+x^2+y^2+32\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}+256$$

$$-376+40x = 32\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}$$

$$-47+5x = 4\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}$$

$$(-47+5x)^2 = \left(4\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}\right)^2$$

$$2209-470x+25x^2 = 16\left((13-x)^2+y^2\right)$$

$$2209-470x+25x^2 = 2704-416x+16x^2+16y^2$$

$$9x^2-54x-16y^2 = 495$$

$$9\left(x^2-6x\right)-16y^2 = 495$$

$$9\left(x^2-6x+9-9\right)-16y^2 = 495$$

$$9(x-3)^2-81-16y^2 = 495$$

$$9(x-3)^2-16y^2 = 276$$

$$\frac{9(x-3)^2-16y^2}{576} = \frac{276}{576}$$

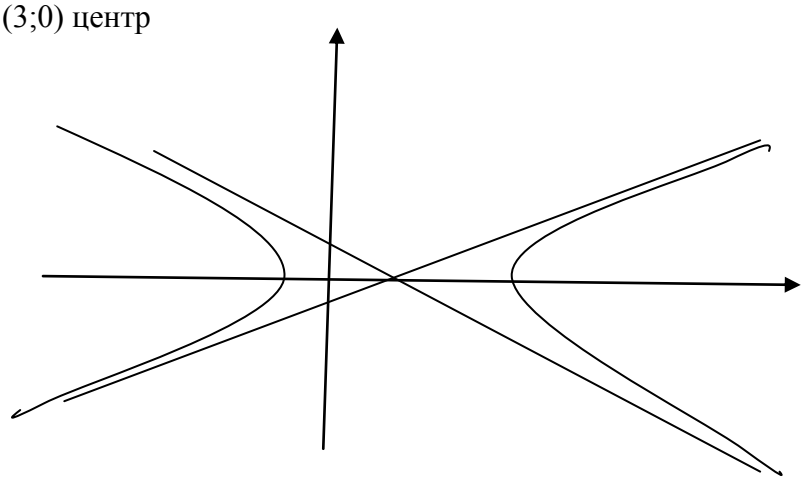
$$\frac{(x-3)^2}{64}\,\frac{y^2}{36} = 1$$

Гипербола

$a = \sqrt{64} = 8$

$b = \sqrt{36} = 6$

(3;0) центр



Вариант 22 Контрольная работа №1

12. Привести уравнение $36x^2+49y^2+72x-196y-1442=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Решение:

$$36x^2+49y^2+72x-196y-1442=0$$

$$\left(36x^2++72x\right)+\left(49y^2-196y\right)-1442=0$$

$$36\cdot\left(x^2+2x\right)+49\cdot\left(y^2-4y\right)-1442=0$$

$$36\cdot\left(x^2+2x+1-1\right)+49\cdot\left(y^2-4y+4-4\right)-1442=0$$

$$36\cdot\left(\left(x^2+2x+1\right)-1\right)+49\cdot\left(\left(y^2-4y+4\right)-4\right)-1442=0$$

$$36\cdot\left((x+1)^2-1\right)+49\cdot\left((y-2)^2-4\right)-1442=0$$

$$36\cdot(x+1)^2-36+49\cdot(y-2)^2-196-1442=0$$

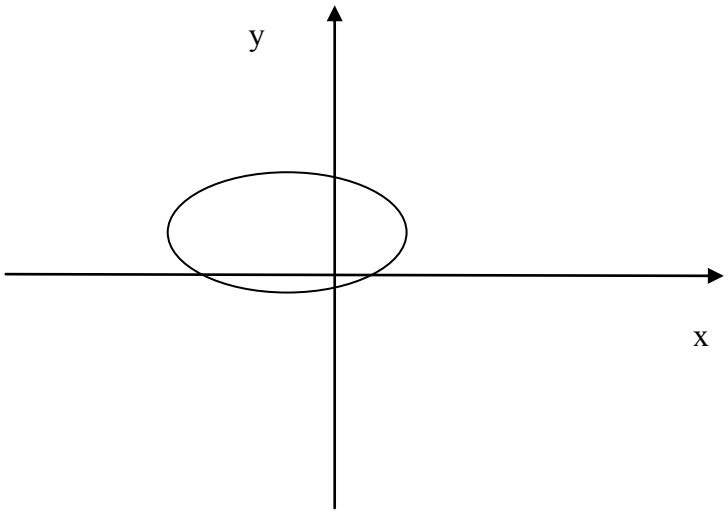
$$36\cdot(x+1)^2+49\cdot(y-2)^2-1674=0$$

$$36\cdot(x+1)^2+49\cdot(y-2)^2=1674$$

$$\frac{36\cdot(x+1)^2}{1674}+\frac{49\cdot(y-2)^2}{1674}=\frac{1674}{1674}$$

$$\frac{(x+1)^2}{46.5}+\frac{(y-2)^2}{34.16}=1$$

Эллипс, (-1;2) центр эллипса

$$a=\sqrt{46.5}$$

$$b=\sqrt{34.16}$$