1. Основные теоремы о пределах

1) Предел постоянного числа есть постоянное число.

$\lim\limits_{x\to a} C = C \qquad C - const$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$

3) Предел суммы или разности равен суммы или разности пределов.

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4) Предел произведения равен произведению пределов.

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

5) При вычислении предела степени находим предел основания и предел показателя степени.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

Правила вычисления пределов

Правило1

Если $x\to\infty$ и под знаком предела стоит дробь, в числителе и в знаменателе которой стоят многочлены, тогда делим числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень переменной.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^3+x^2)}{(1+7x+x^3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3})}{(\frac{1}{x^3}+\frac{7x}{x^3}+\frac{x^3}{x^3})} = \lim_{x\to\infty}\frac{(5+\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x^3}+\frac{7}{x^2}+1)} =$$

$$= \frac{(5+\frac{1}{\infty})}{(\frac{1}{\infty^3}+\frac{7}{\infty^2}+1)} = \frac{5+0}{0+0+1} = 5$$

!Если конечное число делится на бесконечность, то в результате получаем 0

Правило 2

Если X стремится к нулю и под знаком предела имеем следующие выражения sinx, tgx, arcsinx, arctgx, ln(1+x), (e^x-1) то пользуемся эквивалентностями.

Таблица эквивалентностей

Sin $ax \approx ax$

Tg $ax \approx ax$

Arcsin $ax \approx ax$

Arctg $ax \approx ax$

$\ln(1+ax) \approx ax$

$(e^{ax}-1) \approx ax$

Пример 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\arcsin 5x} = \left|\begin{matrix} при & x\to 0 \\ \arcsin 5x \approx 5x \end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{7}{5} = \frac{7}{5}$$

!Предел постоянного числа есть постоянное число

Правило 3

Если X стремится к a, где a постоянное число, и под знаком предела находится дробь, в числителе или знаменателе которой стоит выражение , содержащее разность корней ,при этом возникает неопределенность 0/0, то числитель и знаменатель дроби умножаем на сумму корней/ в случае разности кубических корней умножаем на неполный квадрат суммы корней/. В результате получаем разность квадратов или разность кубов и избавляемся от иррациональности выражений, приводим подобные слагаемые, выносим общие множители за скобки, сокращаем выражения

Пример 4

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{x+1})^2-3^2}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}\ =\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{x+1})^2-3^2}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}==\lim_{x\to 8}\frac{x+1-9}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}=\ =\lim_{x\to 8}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+3)}=\frac{1}{\sqrt{8+1}+3}=\frac{1}{6}$$

Правило 5

Если $X\to\infty$ или $x\longrightarrow 0$ и получаем неопределенность

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ или, то можем использовать правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Предел отношения двух функций равен пределу отношения производных этих функций.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^3+x^2)}{(1+7x+x^3)}=\ \lim_{x\to\infty}\frac{(5x^3+x^2)'}{(1+7x+x^3)'}\ =\ \lim_{x\to\infty}\frac{(15x^2+2x\ )}{(7+3x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(15x^2+2x\ )'}{(7+3x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(30x+2)}{(6x)}=\ \lim_{x\to\infty}\frac{(30x+2)'}{(6x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{30}{6}=\lim_{x\to\infty}5=5$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если односторонние пределы функции в данной точке не равны между собой.

2. Виды точек разрыва функции:

1. Точка разрыва первого рода

Точка x_0 называется точкой разрыва **первого рода**, если односторонние пределы принимают постоянные значения, не равные между собой.

$$\lim_{x\to a-0}f(x)\neq\lim_{x\to a+0}f(x)$$

2.Точка разрыва второго рода

Точка x_0 называется точкой разрыва **второго рода**, если хотя бы один из односторонних пределов принимает значение, равное $+\infty$ или $-\infty$.

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0}f(x)=\pm\infty$$

3. Точка устранимого разрыва.

Точка x_0 называется точкой **устранимого разрыва**, если односторонние пределы принимают постоянные значения, равные между собой, а значение функции в данной точке отлично от значений односторонних пределов или вообще не определено.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$$

3. Факториалы

n-факториалом называется произведение первых n натуральных чисел.

1!=1
2!=1*2=2
3!=1*2*3=6
4!=1*2*3*4=24
5!=1*2*3*4*5=120
6!=1*2*3*4*5*6=720
7!=1*2*3*4*5*6*7=5040

Применение факториалов к решению задач.

Сократите дробь

$$\frac{5!}{3! \cdot 6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{36}$$

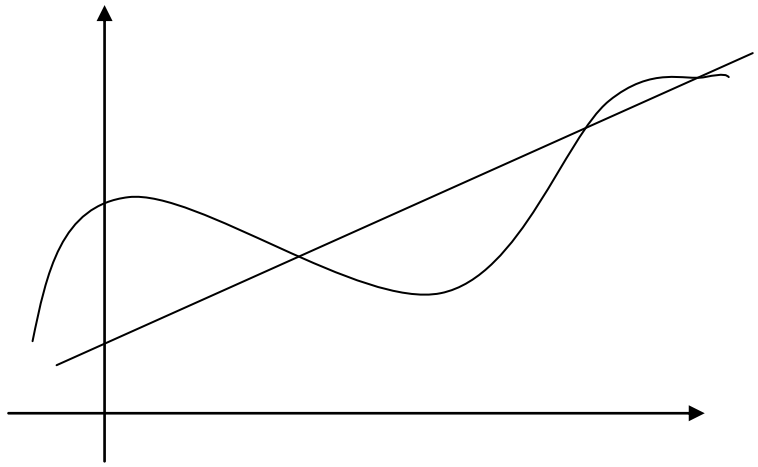
$$22! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22$$

$$24! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 = 22! \cdot 23 \cdot 24$$

$$\frac{24!}{3! \cdot 22!} = \frac{22! \cdot 23 \cdot 24}{3! \cdot 22!} = \frac{23 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 92$$

4. Производные и их приложения.

1. Графическое представление производных.
2. Определение.
3. Таблица производных элементарных функций и производных сложных функций.
4. Основные правила дифференцирования.
5. Приложения производных к решению задач.
6. Дифференцирование неявно заданных функций.
7. Вычисление производных функций, заданных параметрически.
8. Производные высших порядков. Частные производные.
9. Дифференциал, определение и свойства.
10. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.



Определение: **Производной функции y = f(x)** называется конечный предел приращения функции к приращению аргумента.
Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Таблица производных элементарных и сложных функций

Производные элементарных функций	Производные сложных функций
$C' = 0$	$C' = 0$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'_x$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'_x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'_x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$
$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'_x$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

1.) $y' = \left(5x^6 + e^x + \ln 2\right)' = \left(5x^6\right)' + \left(e^x\right)' + \left(\ln 2\right)' = 5 \cdot 6 \cdot x^5 + e^x + 0 = 30 \cdot x^5 + e^x$

2) $y' = \left(\sqrt{x} \cdot \cos x\right)' = \boxed{\left[\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'\right]} = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \cos x + \sqrt{x} \cdot \left(\cos x\right)' =$

$= \left(\sqrt{x}\right)' \cdot \cos x + \sqrt{x} \cdot \left(\cos x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x + \sqrt{x} \cdot \left(-\sin x\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot \sin x$

3) $y' = \left(\frac{2x^2 + 3}{4 + x}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}\right] = \frac{\left(2x^2 + 3\right)' \cdot \left(4 + x\right) - \left(2x^2 + 3\right) \cdot \left(4 + x\right)'}{\left(4 + x\right)^2} =$

$= \frac{\left(2 \cdot 2x + 0\right) \cdot \left(4 + x\right) - \left(2x^2 + 3\right) \cdot \left(0 + 1\right)}{\left(4 + x\right)^2} = \frac{4x \cdot \left(4 + x\right) - \left(2x^2 + 3\right) \cdot 1}{\left(4 + x\right)^2} = \frac{16x + 4x^2 - 2x^2 - 3}{\left(4 + x\right)^2} =$

$= \frac{16x + 2x^2 - 3}{\left(4 + x\right)^2}$

$y' = \left(\left(\sin^3 x\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)' = \boxed{\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = \left(\sin^3 x\right)' \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin^3 x \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)' =$

$= 3 \cdot \sin^2 x \cdot \left(\sin x\right)' \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin^3 x \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' =$

$= 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin^3 x \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) \cdot \frac{1}{3} =$

$= 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}\sin^3 x \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

$dy = \left(2x + 3\right) \cdot dx$

4) $y' = \left(e^{2x} \cdot \cos\left(2x\right)\right)' = \boxed{\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = \left(e^{2x}\right)' \cdot \cos\left(2x\right) + e^{2x} \cdot \left(\cos\left(2x\right)\right)' =$

$= e^{2x} \cdot \left(2x\right)' \cdot \cos\left(2x\right) + e^{2x} \cdot \left(-\sin 2x\right) \cdot \left(2x\right)' = e^{2x} \cdot 2 \cdot \cos\left(2x\right) + e^{2x} \cdot \left(-\sin 2x\right) \cdot 2 =$

$= 2 \cdot e^{2x}\left(\cos\left(2x\right) - \sin\left(2x\right)\right)$

5) $y' = \left(\frac{e^{x^2}}{\sin x}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}\right] = \frac{\left(e^{x^2}\right)' \cdot \left(\sin x\right) - e^{x^2} \cdot \left(\sin x\right)'}{\left(\sin x\right)^2} = \frac{\left(e^{x^2}\right)' \cdot \left(\sin x\right) - e^{x^2} \cdot \left(\sin x\right)'}{\left(\sin x\right)^2} =$

$= \frac{e^{x^2}\left(x^2\right)' \cdot \left(\sin x\right) - e^{x^2} \cdot \left(\sin x\right)'}{\left(\sin x\right)^2} = = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot \left(\sin x\right) - e^{x^2} \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{e^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \sin x - \cos x\right)}{\cos^2 x}$

11. Дифференцирование неявно заданных функций.

$x^2 y^3 = x + 3y^4$

$\left(x^2 \cdot y^3\right)' = \left(x + 3y^4\right)'$

$\left(x^2\right)' \cdot y^3 + x^2 \cdot \left(y^3\right)' = 1 + 12y^3 \cdot y'$

$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' = 1 + 12y^3 \cdot y'$

$x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' - 12y^3 \cdot y' = 1 - 2x \cdot y^3$

$y'\left(x^2 \cdot 3y^2 - 12y^3\right) = 1 - 2x \cdot y^3$

$y' = \frac{1 - 2x \cdot y^3}{\left(x^2 \cdot 3y^2 - 12y^3\right)}$

12. Вычисление производных функций, заданных параметрически.

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 + 3 \cdot t^4 \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(t^2\right)'}{\left(t^3 + 3 \cdot t^4\right)'} = \frac{2t}{3t^2 + 12t^3} = \frac{2t}{3t^2 \cdot (1 + 4t)} = \frac{2}{3t \cdot (1 + 4t)}$$

13. Производные высших порядков. Частные производные.

$$y' = \left(x^{10}\right)' = 10x^9$$
$$y'' = \left(10x^9\right)' = 10 \cdot 9x^8 = 90x^8$$
$$y''' = \left(90x^8\right)' = 90 \cdot 8x^7 = 720x^7$$

14. Дифференциал- это главная часть приращения функции $\boxed{dy = y'dx}$

15. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

$\boxed{y(x) \approx y(x_0) + y'(x - x_0)}$

Вычислите дифференциалы функций

6) $\boxed{dy = y'dx}$

$y' = \left((x+1) \cdot (x+2)\right)' = \boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = (x+1)' \cdot (x+2) + (x+1) \cdot (x+2)' = = 1 \cdot (x+2) + (x+1) \cdot =$
$x + 2 + x + 1 = 2x + 3$
$dy = (2x+3) \cdot dx$

7) $\boxed{dy = y'dx}$

$y' = \left(x \cdot e^x\right)' = \boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = (x)' \cdot e^x + x \cdot \left(e^x\right)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (1 + x)$
$dy = e^x \cdot (1+x) \cdot dx$

8) $\boxed{dy = y'dx}$

$$y' = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1}\right)' = \frac{\left(x^2 - 1\right)' \cdot (x+1) - \left(x^2 - 1\right) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x \cdot (x+1) - \left(x^2 - 1\right) \cdot 1}{(x+1)^2} = = \frac{2 \cdot x^2 + 2x - x^2 + 1}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = 1$$

$dy = 1 \cdot dx$

5. Применение производных к решению геометрических задач

Пусть дано уравнение прямой линии. Нужно определить, при каких значениях параметра прямая параллельна оси ох. $(l^2 - 4l - 5) \cdot x + (144 - l^2) \cdot y + \frac{l}{3} + 15 = 0$

$$(144 - l^2) \cdot y = -\frac{l}{3} - 15 - (l^2 - 4l - 5) \cdot x$$

$$y = \frac{-\frac{l}{3} - 15 - (l^2 - 4l - 5) \cdot x}{144 - l^2}$$

$$y = \frac{-(l^2 - 4l - 5)}{144 - l^2} \cdot x - \frac{\frac{l}{3} + 15}{144 - l^2}$$

$$k = y' = \left(\frac{-(l^2 - 4l - 5)}{144 - l^2} \cdot x - \frac{\frac{l}{3} + 15}{144 - l^2} \right)'$$

$$k = \frac{-(l^2 - 4l - 5)}{144 - l^2}$$

$$b = -\frac{\frac{l}{3} + 15}{144 - l^2}$$

Если прямая параллельна оси абсцисс, то уравнение имеет вид y=0x+в и коэффициент к=0

$$k = \frac{-(l^2 - 4l - 5)}{144 - l^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-(l^2 - 4l - 5)}{144 - l^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 - 4l - 5 = 0 \\ 144 - l^2 \neq 0 \end{cases} l^2 - 4l - 5 = 0$$

$$Д = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$l_1 = \frac{-(-4) + 6}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$l_2 = \frac{-(-4) - 6}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$144 - l^2 \neq 0$$

$$-l^2 \neq -144$$

$$l^2 \neq 144$$

$$l \neq \pm 12$$

6. Интеграл и первообразная

- Обратная операция для нахождения производной функции (для операции дифференцирования) называется операцией интегрирования**.**
- Если известна производная функции $y = f(x)$, то чтобы найти саму функцию, нужно проинтегрировать данную производную.
- Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех значений *x* из этого промежутка выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$
- Любая функция $f(x)$ имеет множество первообразных $F(x)$, так как:

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

$$\left(x^2 - 8\right)' = 2x$$

$$\left(x^2 + 5\right)' = 2x$$

$$\left(x^2 - 11\right)' = 2x$$

$$\left(x^2 + C\right)' = 2x$$

$f(x) = 2x$ - функция

$F(x) = x^2 + C$ - **первообразная**

$$\int 2x dx = \frac{2x^2}{2} + C = x^2 + C$$

- Множество всех первообразных называется неопределенным интегралом

7. Таблица основных интегралов. Методы вычисления интегралов:

$\int dx = x + C$.	$\int e^x dx = e^x + c$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.	$\int a^x dx = a^x \ln a + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$.	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2+a}\right\| + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \sin kx dx = \frac{-1}{k} \cos kx + C.$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

29. Непосредственное интегрирование

Вычислить интегралы

$$\int \sqrt[7]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{7}} dx = \frac{x^{\frac{9}{7}}}{\frac{9}{7}} + C = \frac{7}{9} x^{\frac{9}{7}} + C = \frac{7}{9}\sqrt[7]{x^9} + C$$

$$\int \frac{x^2 - 2x}{x} dx = \int \frac{x \cdot (x-2)}{x} dx = \int (x-2) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$\int \cos 5x \cdot dx = \frac{1}{5} \sin 5x + C$$

$$\int \left(e^{-x} + e^x\right) dx = \int \left(e^{-x}\right) dx + \int \left(e^x\right) dx = -e^{-x} + e^x + C$$

Все другие интегралы, не являющиеся табличными, приводятся к табличным и вычисляются по данной таблице.

И существуют всего три способа, с помощью которых интегралы приводятся к табличным:

I. Замена переменной (подстановка);

II. Интегрирование по частям;

III. Разложение на элементарные дроби.

30. Метод замены переменной

Интеграл	Замена
$\int \frac{A}{(x-a)^m}$	t=x-a dt=(x-a)', dx=dx
$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$	Выделяем полный квадрат: $x^2 + px + q = x^2 + 2 * \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q =$ $= (x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q).$ $t = x + \frac{p}{2} \qquad x = t - \frac{p}{2} \qquad dx = dt$

$R(x;(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}$ $\int;(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}};...$ $(ax+b)^{\frac{m_n}{n_n}})$	$t=(ax+b)^{\frac{1}{S}}$ $t^S=ax+b$ $x=\frac{t^S-b}{a}$ $dx=\left(\frac{t^S-b}{a}\right)'dt=\frac{St^{S-1}}{a}dt$ S – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1};\frac{m_2}{n_2};...\frac{m_k}{n_k}$
$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	Выделяем полный квадрат под знаком корня: $ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-$ $-\left(\frac{b}{2a}\right)^2)+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b}{4a}+c;$ $t=x+\frac{b}{2a};\ x=t-\frac{b}{2a};\ dx=dt.$
$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$x-a=t \quad x=\frac{1}{t}-a$ $dx=\left(\frac{1}{t}-a\right)'dt=-\frac{1}{t^2}dt.$
Интегралы от дифференцированных биномов. $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$	1 тип p – целое число - $x=t^S$ $dx=St^{S-1}dt$ 2 тип $\frac{m+1}{n}$ *целое число* $a+bx^n=t^S$ $x=\sqrt[n]{\frac{t^S-a}{b}};\ dx=(\sqrt[n]{\frac{t^S-a}{b}})'dt$
	3 тип S – знаменатель дроби p. $\frac{m+1}{n}+p;\ ax^{-n}+b=t^S;$ $t=\sqrt[S]{\frac{a}{x^n}+b};\ x=\sqrt[n]{\frac{a}{t^S-b}};\ dx=(\sqrt[n]{\frac{a}{t^S-b}})'dt.$
Интегрирование тригонометрических функций.	
$\int R(\sin x;\cos x)$	$t=tg\frac{x}{2} \quad x=2arctgt$ $dx=\frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
R(-sinx,-cosx) = = R(sinx, cosx)	$t=tgx \quad x=arctgt$ $dx=\frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x=\frac{t}{1+t^2} \quad \cos x=\frac{1}{1+t^2}$
$\int$R(-sinx, cosx)dx	$t=\cos x$ $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-t^2}$ $x=\arccos t \quad dx=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$\int R(\sin x,-\cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)$	$t=\sin x$ $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-t^2}$ $x=\arcsin t \quad dx=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
$\int \sin^m x\cos^n x dx$	I тип m или n - нечетное положительное число. Если m - нечетное, то $t=\sin x \quad \cos x=\sqrt{1-t^2}$ $x=\arcsin t \quad dx=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
	Если n – нечетное положительное число, то $t=\cos x \quad \sin x=\sqrt{1-t^2}$ $x=\arccos t \quad dx=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
	II тип m и n - четные положительные числа $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$
$\int tg^m x dx$ $\int ctg^m x dx$	Понижаем степень с помощью подстановок $tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1 \quad t=tgx \quad dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$ $ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1 \quad t=ctgx \quad dt=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$
$\int \sin mx\cos nx dx$ $\int \cos mx\cos nx dx$ $\int \sin mx\sin nx dx$	$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$
$\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t \quad dx=a\cos t dt$
	$x=a\cos t \quad dx=-a\sin t dt$
$\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$	$x=atgt \quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$
	$x=actgt \quad dx=-\frac{a}{\sin^2 t}dt$
$\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=\frac{a}{\cos t} \quad dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$
	$x=\frac{a}{\sin t} \quad dx=\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$

Замена переменной/подстановка

Пример 1

Применение формулы $\int x^n dx = x^{n+1}+C$

$$\int \frac{dx}{x\ln^5 x} = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5}dt = \frac{t^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-4t^4} + C =$$

$$= \frac{1}{-4\ln^4 x} + C$$

Пример 2

Применение формулы $\left[\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\right]$

$$\int \frac{x^3dx}{4+x^4} = \left| \begin{array}{c} t = 4 + x^4 \\ dt = (4+x^4)'dx = 4x^3dx \\ x^3dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{4}}{t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln|4 + x^4| + C$$

Пример 3

Применение формулы $\left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C\right]$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}} = \int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \left| \begin{array}{c} t = x^4 \\ dt = (x^4)'dx = 4x^3dx \\ x^3dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{4}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin t + C =$$

$$= \frac{1}{4}\arcsin x^4 + C$$

Пример 4

Применение формулы $\left[\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C\right]$

$$\int \frac{xdx}{5+x^4} = \int \frac{xdx}{5+(x^2)^2} = \left| \begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = (x^2)'dx = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{5+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{5+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{x^2}{\sqrt{5}} + C$$

Пример 5

Применение формулы $\left[\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\right]$

$$\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+7} = \left| \begin{array}{c} t = x^2 - 3x + 7 \\ dt = (x^2-3x+7)'dx = (2x-3)dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln|x^2 - 3x + 7| + C$$

Пример 6

Применение формулы $\left[\int e^x dx = e^x + C\right]$

$$\int e^{x-7}dx = \left| \begin{array}{c} t = x - 7 \\ dt = (x-7)'dx = dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{x-7} + C$$

Пример 7

Применение формулы $\int x^n dx = x^{n+1} + C$

$$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(x+1)}dx}{x+1} = \left| \begin{array}{c} t = \ln(x+1) \\ dt = (\ln(x+1))'dx = \frac{1}{x+1}dx \end{array} \right| = \int \sqrt[7]{t^2}\,dt = \int t^{\frac{2}{7}}dt = \frac{t^{\frac{9}{7}}}{\frac{9}{7}} + C = \frac{7}{9}t^{\frac{9}{7}} + C = \frac{7}{9}\sqrt[7]{\ln^9(x+1)} + C$$

Пример 8

$$\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \left| \begin{array}{c} t = arctg\sqrt{x} \\ dt = (arctg\sqrt{x})'dx = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'dx = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx \\ \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t\cdot 2dt = 2\int tdt = 2\cdot\frac{t^2}{2} + C = t^2 + C = \left(arctg\sqrt{x}\right)^2 + C$$

31. Метод интегрирования по частям

Существует три группы интегралов, интегрируемых по частям.

Группа	Вид интеграла	Замены
I группа	К ней относятся интегралы вида: $\int P(x)arctgxdx; \int P(x)arcctgxdx$ $\int P(x)\ln xdx;$ $\int P(x)\arcsin xdx$ $\int P(x)\arccos xdx$	Обозначаем: $u = \begin{cases} arctgx \\ arcctgx \\ \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \end{cases}$ $dv = P(x)dx$
II группа	$\int P(x)\,e^{kx}dx; \int P(x)\sin kxdx$ $\int P(x)\cos kxdx$	$U = P(x)$ $\mathrm{dv} = \begin{cases} e^{kx}dx \\ \sin kxdx \\ \cos kxdx \end{cases}$
III группа	$\int e^{kx}\sin bxdx$ $\int e^{kx}\cos bxdx$	$\mathrm{u} = e^{kx}$ $dv = \begin{cases} \sin bxdx \\ \cos bxdx \end{cases}$

При вычислениях могут встретиться интегралы, которые можно вычислить по частям, их относим к одной из трёх групп.

Интегрирование по частям

$$\int x\sin x\cos xdx = \int x\frac{\sin 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int x\sin 2xdx = \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = \sin 2xdx \\ du = x'dx = dx & v = \int \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \left\lfloor \int udv = uv - \int vdu \right\rfloor =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x \right) - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2xdx \right) \right) =$$

$$= \frac{-1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2xdx = \frac{-1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C =$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$$

32. Метод разложения подынтегрального выражения на элементарные дроби

Мы по ступенькам доходим каждый раз до высшей степени элементарных дробей.

$$\frac{5x^2 - 3x + 4}{(x-3)^2(2x+1)^3(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(2x+1)} +$$

$$+ \frac{D}{(2x+1)^2} + \frac{E}{(2x+1)^3} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)} + \frac{Hx+I}{(x^2+4)^2}$$

Такой пример в преувеличенном виде как раз и позволяет студентам понять, и где же тут одна буква (простой множитель $ax+b$ x стоит в первой степени, а если знаменатель дроби содержит выражение во второй степени ax^2+bx+c (квадратный трехчлен), то пишем в числителе две буквы).

Разложение сложных дробей на элементарные дроби происходит следующим образом:

Дробь, в знаменателе которой стоит произведение многочленов 1-ой и 2-ой степени вида(x+a) или или($x^2 + ax + в$)

Пример

$$\int \frac{x^2dx}{x^4 - 81} = \int \frac{x^2dx}{(x^2-9)(x^2+9)} = \int \frac{x^2dx}{(x-3)(x+3)(x^2+9)} =$$

☺ Разложим подынтегральное выражение на элементарные дроби

$$\frac{x^2dx}{(x-3)(x+3)(x^2+9)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+9} =$$

☺ Приведем дроби к общему знаменателю

$$= \frac{A(x+3)(x^2+9) + B(x-3)(x^2+9) + (Cx+D)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x^2+9)} =$$

☺ Раскроем скобки в числителе дроби

$$= \frac{A(x^3+9x+3x^2+27) + B(x^3+9x-3x^2-27) + (Cx+D)(x^2-9)}{(x-3)(x+3)(x^2+9)} =$$

$$= \frac{Ax^3+9Ax+3Ax^2+27A+Bx^3+9Bx-3Bx^2-27B+Cx^3-9Cx+Dx^2-9D}{(x-3)(x+3)(x^2+9)} =$$

☺ Сгруппируем выражения с одинаковыми степенями переменной x и вынесем общие множители за скобки

$$= \frac{x^3(A+B+C) + x^2(3A-3B+D) + x(9A+9B-9C) + (27A-27B-9D)}{(x-3)(x+3)(x^2+9)}$$

☺ Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменных

$$\begin{array}{l} x^3 \left| A + D + C = 0 \right. \\ x^2 \left| 3A - 3B + D = 1 \right. \\ x \left| 9A + 9B - 9C = 0 \right. \\ x^0 \left| 27A - 27B - 9D = 0 \right. \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + D + C = 0 \\ 3A - 3B + D = 1 \left| \cdot(-1) \right. \\ A + B - C = 0 \\ 3A - 3B - D = 0 \left| \cdot 1 \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A=-D-C \\ 3A-3B+D=1 \\ -D-C+B-C=0 \\ -2D=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2}-C \\ 3A-3B+\frac{1}{2}=1 \\ -\frac{1}{2}-2C+B=0 \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2}-C \\ 3A-3B=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2}+2C \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{2}-C \\ 3\cdot\left(-\frac{1}{2}-C\right)-3\cdot\left(\frac{1}{2}+2C\right)=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2}+2C \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2}-C \\ -\frac{3}{2}-3C-\frac{3}{2}-2C=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2}+2C \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{2}-C \\ -5C=\frac{7}{2} \\ B=\frac{1}{2}+2C \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2}-C \\ C=-\frac{7}{10} \\ B=\frac{1}{2}+2C \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{7}{10}\right) \\ C=-\frac{7}{10} \\ B=\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{7}{10}\right) \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2}+\frac{7}{10} \\ C=-\frac{7}{10} \\ B=\frac{1}{2}-2\cdot\frac{7}{10} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{10} \\ C=-\frac{7}{10} \\ B=-\frac{9}{10} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x^2dx}{(x-3)(x+3)(x^2+9)}=\frac{\frac{1}{5}}{x-3}+\frac{\frac{-9}{10}}{x+3}+\frac{\frac{-7}{10}x+\frac{1}{2}}{x^2+9}==\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{7}{10}\cdot\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+9}$$

$$\int\frac{x^2dx}{x^4-81}=\int\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{7}{10}\cdot\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+9}\right)dx==\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-3}dx+-\frac{9}{10}\int\frac{1}{x+3}dx-\frac{7}{10}\int\frac{x}{x^2+9}dx+$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+9}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x-3|-\frac{9}{10}\ln|x+3|-\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+9\right)}{x^2+9}++\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x-3|-\frac{9}{10}\ln|x+3|-\frac{7}{20}\ln|x^2+9|+\frac{1}{6}\cdot arctg\frac{x}{3}+C$$

33. Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

2. Интеграл от суммы функций на отрезке равен сумме интегралов от этих функций на данном отрезке.

$$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_c^b g(x)dx$$

3. Интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределом равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = \mathbf{0}$$

4. Если поменять местами верхний и нижний пределы интегрирования, то знак интеграла изменится на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5. Интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям, составляющим этот отрезок.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. Формула Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot dx = \frac{-1}{2} \cdot \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{-1}{2} \cdot \cos(2 \cdot 0) =$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \cos(\pi) + \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = \frac{-1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+5} = \left| \begin{array}{c} t = x^2 + 5 \\ dt = (x^2+5)'dx = 2xdx \\ xdx = \frac{dt}{2} \\ t_1 = 0^2 + 5 = 0 + 5 = 5 \\ t_2 = 1^2 + 5 = 1 + 5 = 6 \end{array} \right| = \int_5^6 \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int_5^6 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_5^6 = \frac{1}{2}\ln|6| - \frac{1}{2}\ln|5| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{6}{5}\right|$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = (\sin x)'dx = \cos x dx \\ t_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| =$$

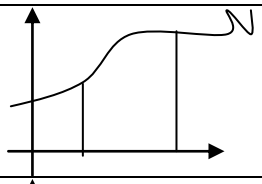
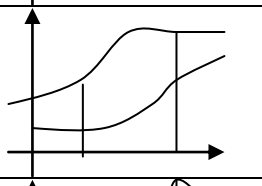
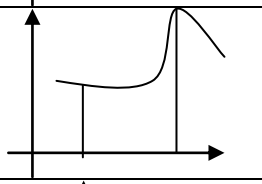
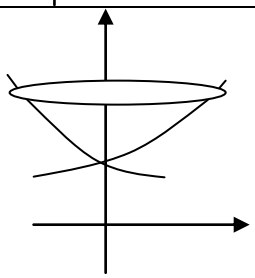
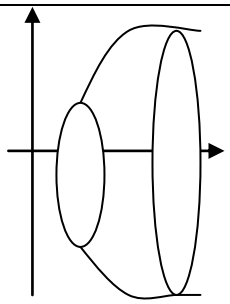
$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 4 \cdot t^3 dt = \frac{4t^4}{4}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = t^4\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$$

34. Приложения определенных интегралов.

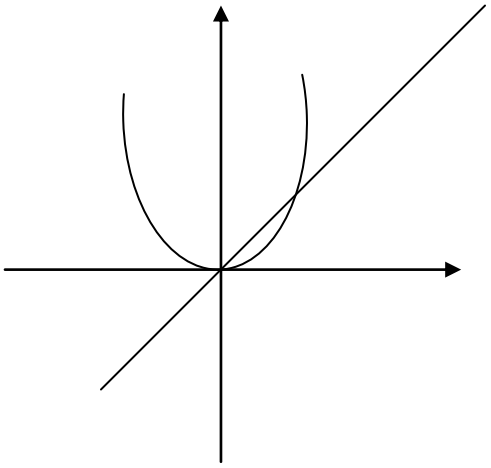
Определенные интегралы применяются для нахождения:

1. Длин дуг кривых.
2. Вычисление площадей плоских фигур.
3. Нахождения объемов тел вращения вокруг осей ОХ и ОУ.
4. Нахождение площадей поверхностей тел вращения вокруг осей ОХ и ОУ.
5. Вычисление работы по перемещению материальной точки по дуге кривой.

📖 Применение интегралов

Площади криволинейных трапеций	$S = \int_a^b y(x)dx$	
Площади фигур	$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$	
Длины дуг кривых	$L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$	
Объемы тел вращения вокруг осей координат	$V_{ox} = \pi\int_a^b (y^2{}_2(x) - y^2{}_1(x))dx$ $V_{oy} = 2\pi\int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\cdot x dx$	
Поверхности тел вращения вокруг осей координат	$S = \int_a^b y(x)dx$	

Пример 1 Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой и прямой:



$y = 2x - x^2$

$y = x$

☺ Найдем точки пересечения

$2x - x^2 = x$

$2x - x^2 - x = 0$

$-x^2 + x = 0$

$-x(x-1) = 0$

$x = 0 \quad или \quad x = 1$

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx = \int_0^1 \left((2x - x^2) - x\right)dx =$$

$$= \int_0^1 (2x - x^2 - x)dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

Ответ:1/6 кв.ед.

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболами:

$y = 2x - x^2$

$y = (x-1)^2 - 1$

☺ Найдем точки пересечения

$2x - x^2 = (x-1)^2 - 1$

$2x - x^2 = x^2 - 2x + 1 - 1$

$-2x^2 + 4x = 0$

$-2x(x-2) = 0$

$x = 0 \quad или \quad x = 2$

$$S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))dx=\int_0^2 \Big((2x-x^2)-((x-1)^2-1)\Big)dx=$$

$$=\int_0^2 (2x-x^2-(x^2-2x+1-1))dx=\int_0^2 (2x-x^2-x^2+2x))dx=$$

$$=\int_0^2 (4x-2x^2)dx=(4\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=$$

$$=\left(2\cdot 2^2-2\cdot\frac{2^3}{3}\right)-\left(2\cdot 0^2-2\cdot\frac{0^3}{3}\right)=\frac{8}{3}$$

Ответ:8/3 кв.ед.

35. **Ряды.**

В программе курса высшей математики тема ряды занимает важное место. Ряды применяют для исследования физических явлений, таких как электромагнитные колебания, волновые процессы и другие явления.

Ряды делятся на числовые и функциональные. И числовые и функциональные ряды могут быть знакочередующимися.
Знакочередующиеся ряды чаше всего отличаются наличием в общем члене ряда множителя (-1) в некоторой степени.
Определение1.
Числовой ряд- это сумма членов вида a_n, где a_n - некоторые числа

Функциональный ряд- это сумма членов вида $a_n x^n$, где a_n - некоторые числа

Числовые ряды – это ряды, не содержащие независимых переменных в своем общем члене.

Функциональные ряды - это ряды, содержащие независимую переменную в общем члене.
При работе с числовыми рядами исследуют их на сходимость с помощью различных признаков сходимости или находят сумму ряда.
При работе с функциональными рядами обычно **находят радиус сходимости, интервал сходимости и /или область сходимости ряда.**

Для **знакочередующихся** рядов находят сходимость ряда по **признаку Лейбница** и , если требуется, проверяют на абсолютную и условную сходимость.

Ряд **сходится абсолютно**, если сходится ряд **из модулей** его членов.
Ряд, составленный из модулей членов знакочередующегося ряда, называется **мажорирующим рядом.**

36. Признаки сходимости рядов

1. *Признак Даламбера.*

Если предел отношения го члена ряда к – му члену ряда есть конечное число и если это число меньше 1, т о ряд сходится. Если больше 1, то расходится, если равен 1 , то нужно применять другие признаки.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k \text{ и при} \begin{cases} при & k<1 & сходится \\ при & k>1 & расходится \\ при & k=1 & неопределенно \end{cases}$$

2. *Признаки сравнения рядов.*

Первый признак сравнения

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} в_n$ и выполняются следующее условие для каждого $|a_n|\le|в_n|$, то ряд с меньшими членами сходится, если сходится ряд с большими членами и наоборот, ряд с большими членами расходится, если расходится ряд с меньшими членами.

Второй признак сравнения : если к- конечное число, то ряды сходятся или расходятся одновременно

3. **Интегральный признак сходимости Коши.**

$\int_1^{\infty} f(x)dx = k$ **при** $\begin{cases} к - конечное, сходится \\ к = \infty, расходится \end{cases}$

4. **Радикальный признак сходимости Коши**

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ **при** $\begin{cases} при \quad k<1 \quad сходится \\ при \quad k>1 \quad расходится \\ при \quad k=1 \quad неопределенно \end{cases}$

5. **Признак Лейбница (для знакочередующихся рядов) для ряда** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

1) **при** $n \to \infty \quad |a_n| \to 0$

2) $|a_1| \rangle |a_2| \rangle |a_3| \rangle .....$

Если выполняются данные условия, то ряд сходится по признаку Лейбница, если хотя бы одно условие нарушается, то ряд расходится.

37. Применение признаков сходимости:

- Если общий член ряда содержит выражения с факториалами, то применяем чаще всего **признак Даламбера.**
- Если общий член ряда содержит выражения с логарифмами, то пользуемся **интегральным признаком Коши.**
- Если общий член ряда содержит выражения, возведенные в степень, содержащую n, α^n, то пользуемся **радикальным признаком Коши.**
- Если в общем члене ряда есть выражения с синусами или косинусами, **то применяем 1 признак сравнения рядов.**

- **Если применяем 2 признак сравнения рядов, то обычно для сравнения берем обобщенный гармонический ряд.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ **, который** $\begin{cases} при \quad k<1 \quad расходится \\ при \quad k>1 \quad сходится \\ при \quad k=1 \quad расходится \end{cases}$

Пример 1.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ **числовой ряд с положительными членами, так как содержит выражение** a_n**, можем выбрать два признака для исследования ряда на сходимость: признак Даламбера и радикальный признак сходимости Коши**

1)*Применим признак Даламбера.*

Общий член ряда: $a_n = \frac{1}{5^n}$;

$a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5^{n+1}}}{\frac{1}{5^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} < 1$ **ряд сходится по признаку Даламбера.**

2)*Применим радикальный признак сходимости Коши*

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ **общий член ряда** $a_n=\frac{1}{5^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{5^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}<1$ **ряд сходится по радикальному признаку сходимости Коши.**

Найдите общий член ряда

$\frac{3}{5}+\frac{7}{6}+\frac{11}{7}+\frac{15}{8}+\cdots$

$a_1=\frac{3}{5}$;

$a_2=\frac{7}{6}=\frac{3+4\cdot 1}{5+1\cdot 1}$;

$a_3=\frac{11}{7}=\frac{3+4\cdot 2}{5+1\cdot 2}$;

$a_4=\frac{15}{8}=\frac{3+4\cdot 3}{5+1\cdot 3}$;

$a_5=\frac{19}{9}=\frac{3+4\cdot 4}{5+1\cdot 4}$

……..

$a_n=\frac{3+4\cdot n}{5+1\cdot n}$

Пример2

Исследуйте на сходимость ряд:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(4n-5)^n}$

числовой ряд с положительными членами, так как содержит выражение a^n, можем выбрать признак Даламбера для исследования ряда на сходимость или выбрать радикальный признак Коши.

Применим радикальный признак сходимости Коши

общий член ряда $a_n=\frac{2^n}{(4n-5)^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{(4n-5)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{(4n-5)}=\frac{2}{4\cdot\infty-5}=\frac{2}{\infty}=0<1$

ряд сходится по радикальному признаку сходимости Коши.

Пример

Найдите область сходимости степенного ряда

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n+\sqrt{n}}$

Степенной ряд

$u_n=\frac{(x+4)^n}{n+\sqrt{n}}$

$$u_{n+1}=\frac{(x+4)^{n+1}}{n+1+\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(x+4)^{n+1}}{n+1+\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\frac{(x+4)^{n}}{n+\sqrt{n}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+4)^{n+1}}{n+1+\sqrt{n+1}}*\frac{n+\sqrt{n}}{(x+4)^{n}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+4)}{n+1+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{n+\sqrt{n}}{1}\right|=|x+4|\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n+1+\sqrt{n+1}}=$$

$$=|x+4|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n+1}}{n}}=|x+4|\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=|x+4|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{\infty}}}{1+\frac{1}{\infty}+\sqrt{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}}=|x+4|\frac{1+0}{1+0+\sqrt{0+0}}=|x+4|*1=|x+4|$$

Ряд сходится при $|x+4|<1$

$-1<x+4<1$

$-1-4<x<1-4$

$-5<x<-3$

(-5;-3)- интервал сходимости ряда

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала

При х=-5 получаем следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5+4)^n}{n+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$$

Знакочередующийся ряд

Проверим на сходимость по признаку Лейбница.

1)

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty+\sqrt{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$|a_1|=\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$|a_2|=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=0{,}2929$$

$$|a_3|=\frac{1}{3+\sqrt{3}}=0{,}2113$$

……

$0{,}5>0{,}2929>0{,}2113>....$

Ряд сходится по признаку Лейбница

При х=-3 получаем следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+4)^n}{n+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

Числовой ряд проверим на сходимость по второму признаку сравнения рядов.

Будем сравнивать с гармоническим рядом.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

гармонический ряд является расходящимся рядом.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{\infty}}}=\frac{1}{1+0}=1$$ конечное число.

Оба ряда одновременно расходятся.

$[-5;-3[$ область сходимости степенного ряда

Пример 3

Найдите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$$

Степенной ряд

$$u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$$

$$u_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{10^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}*\frac{\sqrt{n}}{10^m x^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{10x}{\sqrt{n+1}}*\frac{\sqrt{n}}{1}\right|=10|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=$$

$$=10|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}=10|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=$$

$$=10|x|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}}=10|x|\frac{1}{\sqrt{1+0}}=10|x|*1=10|x|$$

Ряд сходится при $10|x|<1$

$$\frac{-1}{10}<x<\frac{1}{10}$$

$\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$ - интервал сходимости ряда

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала

При x = $-\frac{1}{10}$ получаем следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\left(-\frac{1}{10}\right)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Знакочередующийся ряд

Проверим на сходимость по признаку Лейбница.

1)

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$|a_1|=\frac{1}{\sqrt{1}}=\frac{1}{1}=1$$

$$|a_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7071$$

$$|a_3|=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}5774$$

…….

$0{,}1>0{,}7071>0{,}5774>....$

Ряд сходится по признаку Лейбница

При x=$\frac{1}{10}$ получаем следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Обобщенный гармонический ряд , является расходящимся рядом, так как p=$\frac{1}{2}<1$

$\left[-\frac{1}{10};-\frac{1}{10}\right[$ область сходимости степенного ряда

38. Полное исследование функции

Общая схема исследования:

1. Область определения
2. Точки пересечения с осями координат
3. Четность-нечетность, периодичность.
4. Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания функции.
5. Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости.
6. Асимптоты вертикальные и наклонные.

7. График.

Пример1

Провести полное исследование функции:

$y = x^3 - 3x^2 + 5$

1) Область определения

Д(х)= $(-\infty;+\infty)$

2) Точки пересечения с осями координат

С ось ох =>y=0

$y = x^3 - 3x^2 + 5$=0 корень принадлежит отрезку (-2;-1)

(5,0)-точка пересечения с осью ох

3) Четность-нечетность, периодичность

$y(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 5 = -x^3 - 3x^2 + 5 \neq -y(x), \neq y(x)$ не четная и не нечетная, график не симметричен относительно оси оу и начала координат

Функция не содержит тригонометрических выражений- не является периодической.

4)Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания.

$y' = (x^3 - 3x^2 + 5)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
y'	+	0	-	0	-
y	↗	5	↘	1	↗

5)Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости

$y'' = (3x^2 - 6x)'$ =6x-6

y'' =0

6x-6 = 0

X=1

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;\infty)$
y''	-	0	+
y	∩	1	∪

6) Асимптоты

У=кх+в

К= $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 - 3x + \frac{5}{x}\right) =$

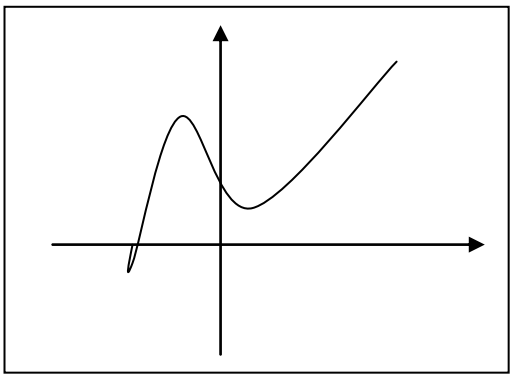
$= \infty^2 - 3\cdot\infty + \frac{1}{\infty} = \infty$

Наклонных асимптот нет

в= $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - kx$

Вертикальные асимптоты

Д(х)= $(-\infty;+\infty)$точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет



Пример 2

$$y=\frac{x^2}{x^2-1}$$

3) Область определения

$x^2-1\neq 0$

$x^2\neq 1$

$x\neq \pm 1$

Д(x)= $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$

4) Точки пересечения с осями координат

С ось ox =>y=0

$$\frac{x^2}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2\neq 1 \end{cases}$$

(0,0)-точка пересечения с осями координат

3) Четность-нечетность, периодичность

$y(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}=y(x)$ четная, график симметричен относительно оси oy

Функция не содержит тригонометрических выражений- не является периодической.

4)Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания.

$$y'=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}==\frac{2x\cdot\left(x^2-1-x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ \left(x^2-1\right)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2\neq 1 \end{cases}$$

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	+	Не опр	+	0	-	Не опр	-
y	↗	Не опр	↗	0	↘	Не опр	↘

5)Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости

$$y''=\left(\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)''=\frac{(-2x)'\cdot\left(x^2-1\right)^2-(-2x)\cdot\left(\left(x^2-1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2-1\right)^2\right)^2}=\frac{-2\cdot\left(x^2-1\right)^2+2x\cdot 2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left(-\left(x^2-1\right)+4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}==\frac{2\cdot\left(-\left(x^2-1\right)+4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$y''=0$

$$\frac{2\cdot\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+1\neq 0\\ \left(x^2-1\right)\neq 0\end{cases}$$

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;\infty)$
y''	+	Не опр	-	Не опр	+
y		Не опр		Не опр	

6) Асимптоты

У=кх+в

$$К=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

$$в=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}-0x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{1}{1-0}=1$$

У=0х+1

У=1 –горизонтальная асимптота

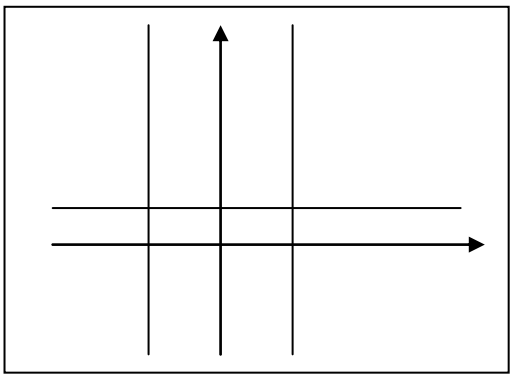
Вертикальные асимптоты

$$\lim_{x\to-1-\Delta}f(x)=\lim_{x\to-1-\Delta}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{(-1-\Delta)^2}{(-1-\Delta)^2-1}=\frac{1+2\Delta+\Delta^2}{1+2\Delta+\Delta^2-1}=\frac{1+2\Delta+\Delta^2}{2\Delta+\Delta^2}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1+\Delta}f(x)=\lim_{x\to-1+\Delta}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{(-1+\Delta)^2}{(-1+\Delta)^2-1}=\frac{1-2\Delta+\Delta^2}{1-2\Delta+\Delta^2-1}=\frac{1-2\Delta+\Delta^2}{-2\Delta+\Delta^2}=\frac{1}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1-\Delta}f(x)=\lim_{x\to1-\Delta}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{(1-\Delta)^2}{(1-\Delta)^2-1}=\frac{1-2\Delta+\Delta^2}{1-2\Delta+\Delta^2-1}=\frac{1-2\Delta+\Delta^2}{-2\Delta+\Delta^2}=\frac{1}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1+\Delta}f(x)=\lim_{x\to1+\Delta}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{(1+\Delta)^2}{(1+\Delta)^2-1}=\frac{1+2\Delta+\Delta^2}{1+2\Delta+\Delta^2-1}=\frac{1+2\Delta+\Delta^2}{2\Delta+\Delta^2}=\frac{1}{0}=+\infty$$



39. Дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения- это уравнения , которые связывают независимую переменную X, функцию У и производные данной функции различных порядков.
Дифференциальные уравнения имеют порядок, равный порядку старшей производной.
Дифференциальные уравнения применяются для решения прикладных физических, химических, геометрических задач.

Типы дифференциальных уравнений 1 порядка.

Тип	**Общий вид**	**Замены**
Уравнения с разделяющимися переменными	M(x,y)dx+N(x,y)dy=0	-
Уравнения с разделенными переменными.	M(x)dx=N(y)dy	-
Линейные дифференциальные уравнения.	$y' + P(x)y = Q(x)$	$y = u \cdot v$ $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Уравнения Бернулли	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$y = u \cdot v$ $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Однородные уравнения	$y' = f(x,y)$ $f(tx,ty) = f(x,y)$	$y = t \cdot x$ $y' = t' \cdot x + t$
Уравнения, допускающие понижение порядка. (для Д.У. старше первого порядка)	**Не содержат функцию у** $F(x,y',y'',..y^n) = 0$	$p = y'$ $p' = y''$
	Не содержат переменную х $F(y,y',y'',..y^n) = 0$	$y' = p$ $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

Примеры

1. $y' = y \cdot \cos x$

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$dy = y \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \cos x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x \cdot dx$$

$\ln|y| = \sin x + C$

2. $y' = 2x + 3$

☺ Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

☺ Запишем производную первого порядка в виде отношения двух дифференциалов (в виде дроби) $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$

$dy = (2x + 3) \cdot dx$

$\int dy = \int (2x + 3) \cdot dx$

$\boxed{y = \frac{2x^2}{2} + 3x + C}$

Общее решение

Пример

$(1 + x^2)dy + yxdx = 0$

$x = 1$

$y = 1$

☺ Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$(1 + x^2)dy = -yxdx$

$\frac{dy}{-y} = \frac{xdx}{(1 + x^2)}$

$\int \frac{dy}{-y} = \int \frac{xdx}{(1 + x^2)}$

$-\ln|y| = \frac{1}{2}\int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2}$

$-\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + \ln C$

$\ln \frac{1}{|y|} = \ln \sqrt{|1 + x^2|} \cdot C$

$\frac{1}{|y|} = \sqrt{|1 + x^2|} \cdot C$

$\frac{1}{|1|} = \sqrt{|1 + 1^2|} \cdot C$

$1 = \sqrt{2} \cdot C$

$C = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{|y|} = \sqrt{|1 + x^2|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ Частное решение

Пример $y' = \frac{y}{2}$

☺ Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}$

$$dy = \frac{y}{2} \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2}$$

$$\ln|y| = \frac{x}{2} + C$$

$$\ln|1| = \frac{0}{2} + C$$

0=0 +C

C=0

$\ln|y| = \frac{x}{2}$ Частное решение

3. $(x+1)dy = y \cdot dx$

☺ Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$(x+1)dy = y \cdot dx \qquad |:(x+1) \cdot y$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\boxed{\ln|y| = \ln|x+1| + \ln C}$$

Общее решение

$y = (x+1) \cdot C$

$x = 1$

$y = 8$

8=(1+1)C

8=2C

C=4

$y = (x+1) \cdot 4$

Дифференциальные уравнения высших порядков

☺ **Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка**

$y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$ ☺ **Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.**

$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ **Начальные условия**

$y'' - y = 0$ **соответствующее однородное дифференциальное уравнение второго порядка.**

$k^2 - 1 = 0$ **соответствующее характеристическое уравнение**

$k^2 = 1$

$k_{1,2} = \pm 1$ **корни действительные и различные.**

$\bar{y} = C_1 e^{1 \cdot x} + C_2 e^{-1 \cdot x}$ **Общее решение однородного уравнения**

☺ **Найдем частное решение неоднородного уравнения**

Рассмотрим правую часть исходного уравнения

$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$

Запишем функцию в стандартном виде $f(x)=e^{ax}(P(x)\cos bx+Q(x)\sin bx$

$f(x)=e^{0x}(2\sin 1x-4\cos 1x)$

$a=0 \quad b=1$

$a+bi=0+1i$

Не является корнем характеристического уравнения

$y^*(x)=A\cos x+B\sin x$

$y^{*'}(x)=(A\cos x+B\sin x)'=-A\sin x+B\cos x$

$y^{*''}(x)=(-A\sin x+B\cos x)'=-A\cos x-B\sin x$

Подставим найденные выражения в исходное уравнение

$y''-y=2\sin x-4\cos x$

$y^{*''}-y^*=2\sin x-4\cos x$

$(-A\cos x-B\sin x)-(A\cos x+B\sin x)=2\sin x-4\cos x$

$-2A\cos x-2B\sin x=2\sin x-4\cos x$

$-2A\cos x-2B\sin x=-4\cos x+2\sin x$

$\begin{cases}-2A\cos x=-4\cos x\\-2B\sin x=2\sin x\end{cases}$

$\begin{cases}-2A=-4\\-2B=2\end{cases}$

$\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$

Получим частное решение неоднородного уравнения

$y^*(x)=2\cos x-1\sin x$

Общее решение неоднородного уравнения находим как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

$y=\bar{y}+y^*=(C_1e^{1\cdot x}+C_2e^{-1\cdot x})+(2\cos x-1\sin x)$ **Общее решение неоднородного уравнения**

$y'=(C_1e^{1\cdot x}+C_2e^{-1\cdot x})'+(2\cos x-1\sin x)'=$

$=C_1e^{1\cdot x}-C_2e^{-1\cdot x}-2\sin x-1\cos x$

Подставим начальные условия $\begin{cases}y(0)=2\\y'(0)=0\end{cases}$ **в функцию** y **и производную данной функции**

$\begin{cases}y=C_1e^{1\cdot x}+C_2e^{-1\cdot x}+2\cos x-1\sin x\\y'=C_1e^{1\cdot x}-C_2e^{-1\cdot x}-2\sin x-1\cos x\end{cases}$

$\begin{cases}y(0)=C_1e^{1\cdot 0}+C_2e^{-1\cdot 0}+2\cos 0-1\sin 0\\y'(0)=C_1e^{1\cdot 0}-C_2e^{-1\cdot 0}-2\sin 0-1\cos 0\end{cases}$

$\begin{cases}y(0)=C_1\cdot 1+C_2\cdot 1+2\cdot 1-1\cdot 0\\y'(0)=C_1\cdot 1-C_2\cdot 1-2\cdot 0-1\cdot 1\end{cases}$

$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2+2\\y'(0)=C_1-C_2-1\end{cases}$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 + 2 \\ 0 = C_1 - C_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 2 \\ C_1 - C_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -C_2 - C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -2C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y = \frac{1}{2}e^{1\cdot x} - \frac{1}{2}e^{-1\cdot x} + 2\cos x - \sin x$$

40. Комплексные числа

Комплексные числа являются расширением множества действительных чисел.

Они возникли при решении уравнений, содержащих корень четной степени из отрицательных чисел.

Алгебраическая форма записи комплексного числа имеет вид : x+yi , где x - действительная часть числа, y - мнимая часть числа,i-мнимая единица.

$\sqrt{-1} = i$ **- мнимая единица**

Пример

$$z = \frac{1}{\sqrt{3} - i} = \frac{1\cdot\left(\sqrt{3} + i\right)}{\left(\sqrt{3} - i\right)\cdot\left(\sqrt{3} + i\right)} = \frac{\left(\sqrt{3} + i\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - (i)^2} = \frac{\left(\sqrt{3} + i\right)}{3 - (-1)} = \frac{\left(\sqrt{3} + i\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

$z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\cdot i$ алгебраическая форма записи комплексного числа

Тригонометрическая форма записи

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример:

Пусть дано комплексное число. Записать его в тригонометрической форме

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\cdot i$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad y = \frac{1}{4}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$$

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30°)$$

Показательная форма записи

$$z = e^{i\varphi}$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot e^{30^\circ \cdot i}$$

Любое комплексное число можно изобразить точкой на комплексной плоскости.

Комплексная плоскость изображается с помощью двух взаимно- перпендикулярных пересекающихся прямых, на которых выбрано положительное направление, выбрана единица измерения, размечены шкалы.

Оси координат на комплексной плоскости имеют свои названия.

Горизонтальная ось ох называется **действительной осью** и на ней отмечаются действительные части комплексных чисел.

Вертикальная ось оу называется **мнимой осью** и на ней отмечаются мнимые части комплексных чисел.

Радиус- вектором комплексного числа называется вектор, соединяющий начало координат комплексной плоскости с
точкой, изображающей комплексное число.

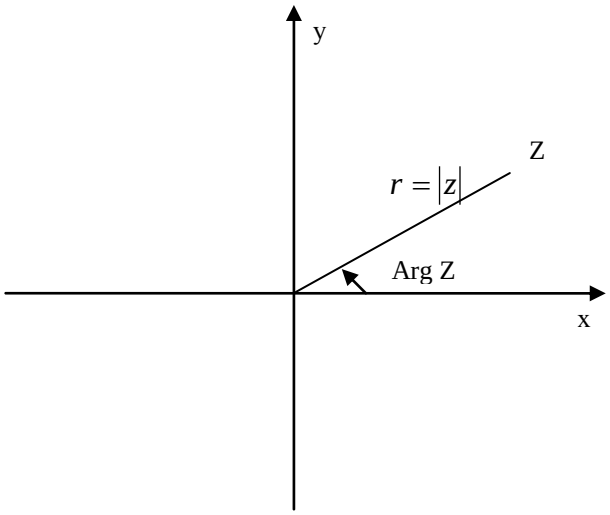
Модулем комплексного числа называется длина радиус- вектора.

Аргументом комплексного числа называется угол между радиус- вектором комплексного числа и положительным направлением оси ох.

41. Действия с комплексными числами

Комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить, возводить в степень, извлекать корни любой степени

1) Чтобы сложить два комплексных числа, нужно сложить их действительные части и сложить мнимые части.
2) Чтобы найти разность двух комплексных чисел, нужно из действительной части первого числа вычесть действительную часть второго числа и из мнимой части первого числа вычесть мнимую часть второго числа.



$$w^3 + z = 0$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} \cdot i$$

$$w^3 = -z$$

$$w^3 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} \cdot i$$

$$w = \sqrt[3]{-z} = \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} \cdot i}$$

$$|-z| = \sqrt{(x)^2 + (-y)^2}$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad y_1 = -\frac{1}{4}$$

$$|-z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\psi = arctg\,\frac{y_1}{x_1} = arctg\,\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{3}}{4}} = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = 210^\circ$$

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\psi + 360^\circ \cdot k}{n} + i \cdot \sin\frac{\psi + 360^\circ \cdot k}{n}\right)$$

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos\frac{210^\circ + 360^\circ \cdot k}{3} + i \cdot \sin\frac{210^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}\right)$$

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos \frac{210^\circ + 360^\circ \cdot 0}{3} + i \cdot \sin \frac{210^\circ + 360^\circ \cdot 0}{3} \right) =$$

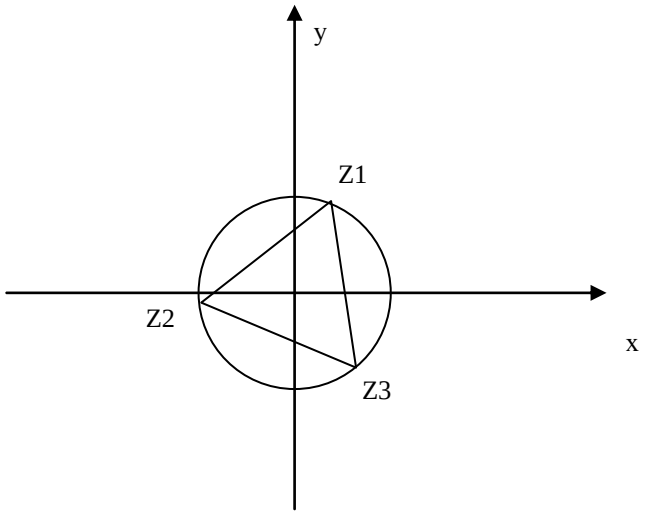
$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos 70^\circ + i \cdot \sin 70^\circ \right) = 0{,}2715 + 0{,}7458 \cdot i$$

$$w_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos \frac{210^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3} + i \cdot \sin \frac{210^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos 190^\circ + i \cdot \sin 190^\circ \right) = -0{,}7816 - 0{,}1378 \cdot i$$

$$w_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos \frac{210^\circ + 360^\circ \cdot 3}{3} + i \cdot \sin \frac{210^\circ + 360^\circ \cdot 3}{3} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos 310^\circ + i \cdot \sin 310^\circ \right) = 0{,}5102 - 0{,}6080 \cdot i$$



Задание №7

Найдите производные сложной функции первого порядка.

Вариант1	Вариант2	Вариант3	Вариант4
$y=(2x+3x^2)^5$	$y=(7x^2+4x^3)^6$	$y=(2x^3-3x)^4$	$y=(5x^5+2x^4)^7$
$y=\arcsin\sqrt{5x}$	$y=\cos\sqrt{1+x}$	$y=arctg\sqrt{x^5}$	$y=ctg\sqrt{1+7x}$
$y=x^5\ln x$	$y=(x^2+2x)\ln x$	$y=(x^3+7x^2)\ln x$	$y=(x^6+8x^8)\ln x$
$y=\dfrac{x}{\sin^2 x}$	$y=\dfrac{x+3}{\cos^2(5x+2)}$	$y=\dfrac{x^3}{tg(6x-1)}$	$y=\dfrac{x-3}{\sin^3 x}$
$y=5\sqrt[5]{4x+\dfrac{1}{x}}$	$y=7\sqrt[7]{6x^3-\dfrac{1}{x}}$	$y=11\sqrt[11]{2x^4-\dfrac{1}{x}}$	$y=2\sqrt{x^3-\dfrac{1}{x}}$
$x^3+y^3-5xy=0$	$x^2+y^2+4xy=0$	$x^5+y^5+5xy=0$	$2x^7+3y^7=6xy$
$y=(\sin x)^{tgx}$	$y=(\cos x)^{\sin x}$	$y=(\ln x)^x$	$y=(\cos x)^{\ln x}$
$\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^7+t^5 \end{cases}$	$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \end{cases}$	$\begin{cases} x=t^5 \\ y=5t^3 \end{cases}$	$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

Задание №8

Найдите производные и дифференциалы высших порядков до четвертого порядка включительно.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$y=x^4+7x^3$	$y=x^5-9x^3$	$y=2x^7+4x^3$	$y=x^2+8x^3$
$y=\sin(4x-1)$	$y=\cos(3x+2)$	$y=\sin(4x-1)$	$y=\cos(7x-11)$
Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
$y=x^2+7x^3$	$y=x^8-6x^5$	$y=8x^2-x$	$y=x^7-2x$
$y=\sin(2x-1)$	$y=\sin(3x-1)$	$y=\cos(5x-1)$	$y=\sin(6x-1)$
Вариант 9	Вариант 10		
$y=x^3-6$	$y=x^3+18x$		
$y=\cos(5x+3)$	$y=\sin(4x-1)$		

Задание №9

Найти пределы следующих функций

В1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x^2}{2+3x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{e^{5x}-1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$
В2	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+2x}{3x^2-4x+5}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{e^{3x}-1}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$
В3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+x^2-14}{2+3x+5x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1+7x}{\arcsin 8x}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5-x^2}{x+\sqrt{5}}$
В4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3}{2+x+x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1+7x}{\sin 8x}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{15}}{x-4}$

B5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{34x^3+x^2}{2+3x+x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{9x-16}-2}{x-2}$
B6	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+3x-x^2}{2x^2+x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+x^2}{e^x-1}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$
B7	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{x-7x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x-x^2}{\arcsin 4x}$	$\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{4x+1}-5}{x-6}$
B8	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x-x^2}{x^2+x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+7x)}{arctg\,3x}$	$\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{15}}{x-8}$
B9	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x+2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{ar\sin 6x}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$
B 10	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2}{x-27x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{13x}{\sin 4x}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{3x+4}-5}{x-7}$

Задание №10

Вычислить неопределенные интегралы:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$\int\frac{xdx}{x^2-5}$	$\int xe^{x^2}dx$	$\int(\ln(x))^4\frac{1}{x}dx$	$\int(ctgx)^6\frac{dx}{\sin^2 x}$
$\int x\sin 5xdx$	$\int\cos^3 xdx$	$\int tg^3 xdx$	$\int\cos^5 xdx$
$\int\frac{dx}{\cos x+\sin x}$	$\int\frac{dx}{x(x^2+4)}$	$\int\frac{dx}{(x-5)(x+1)}$	$\int xe^{x^2+3}dx$
$\int\frac{dx}{x(x^2+4)}$	$\int\frac{(x-1)dx}{x(x^2+9)}$	$\int\frac{2x-4dx}{x(x^2+1)}$	$\int\frac{(7x+3)dx}{(x+1)(x^2+4)}$
Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
$\int\frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x}$	$\int e^{x-8}dx$	$\int(e^x+1)^4e^xdx$	$\int\frac{dx}{3+4x^2}$
$\int x\ln(x+1)dx$	$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^3 x}}$	$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt[5]{1+\cos x}}$	$\int\frac{\arcsin 2xdx}{1+x^2}$
$\int\frac{arctgxdx}{x^2}$	$\int x^3\ln xdx$	$\int(x^2-4)\sin xdx$	$\int x^3\cos xdx$
$\int\frac{(2+x)dx}{(x-3)(x+1)}$	$\int\frac{(x-1)dx}{x(x^2+9)}$	$\int\frac{2x-4dx}{x(x^2+1)}$	$\int\frac{(7x+3)dx}{(x+1)(x^2+4)}$
Вариант 9	Вариант 10		
$\int\cos^4 x\sin xdx$	$\int e^{3x-18}dx$		
$\int\frac{\sin 2xdx}{1+\sin^4 x}$	$\int\frac{tgxdx}{\cos x+\sin x}$		
$\int(x+1)e^xdx$	$\int x^2\sin xdx$		
$\int\frac{1dx}{x(x^2+16)}$	$\int\frac{(2x+5)dx}{(x-1)(x+5)}$		

Задание №11

Исследуйте на сходимость следующие числовые ряды:

Вариант1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(4n-5)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{(5n-6)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(4n-5)}$
Вариант 2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n-1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 9^n}{(18n-1)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-5)}$
Вариант 3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{(4n-5)2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(n-6)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(n-5)^2}$
Вариант 4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^8}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{(2n-9)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(n+3)^3}$
Вариант 5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-5n)3^n}{7^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{(1+7n)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x}{(4n+3)^3}$
Вариант 6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-5n)3^n}{8^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{(n-1)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n \sin x}{(5n+3)^3}$
Вариант 7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 7^n}{(5n-6)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(n-7)^5}$
Вариант 8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-4)^n}{(4n-5)^{2n-1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(9n-6)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{(n-5)^5}}$
Вариант 9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(4n-5)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(8n+5)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x}{(6n+3)^{-3}}$
Вариант 10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(7n-1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 9^n}{(5n-6)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{(4n-1)}}$

Задание №12

Проведите полное исследование функции , используя общую схему исследования и постройте график.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$Y=\frac{x-1}{x+2}$	$Y=\frac{x+3}{x+1}$	$Y=\frac{x-4}{x^2+2}$	$Y=\frac{x^2-1}{x^2+2}$	$Y=\frac{x}{x+1}$
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
$Y=\frac{x-5}{1-x^2}$	$Y=\frac{x+5}{x-7}$	$Y=\frac{x^2-1}{x+6}$	$Y=\frac{x}{x-7}$	$Y=\frac{x^2}{x+3}$

Задание №13

Представьте комплексные числа в тригонометрической и показательной форме, постройте их на графике и вычислите

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$z=1-\sqrt{3}i$	$z=2+\sqrt{2}i$	$z=1+i$	$z=1+\sqrt{3}i$	$z=2+\sqrt{3}i$
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
$z=2+2i$	$z=4-3i$	$z=\sqrt{5}+\sqrt{5}i$	$z=4+3i$	$z=\sqrt{3}+\sqrt{3}i$