Негосударственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Сибирский институт бизнеса, управления и психологии»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Практикум для студентов
очной и заочной форм обучения специальности
38.03.01. Экономика(профили Бухгалтерский учёт, анализ и аудит и мировая экономика),
38.03.02 Менеджмент (профиль Финансовый менеджмент)

Красноярск 2016

Составитель: доцент Коренюгина Л. М.

Линейная алгебра [Текст]: практикум для студентов очной и заочной форм обучения специальности 38.03.01. Экономика (профили Бухгалтерский учёт, анализ и аудит и мировая экономика), 38.03.02 Менеджмент (профиль Финансовый менеджмент) / ред. Н.В. Лалетин, сост. Л.М.Коренюгина – Красноярск: АНО ВО СИБУП, 2016. – 86с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ 6
РАЗДЕЛ 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 8
Тема 1. Матрицы и действия над ними 8
Тема 2. Определители и их свойства 17
РАЗДЕЛ 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 24
. Тема 3. Решение систем линейных уравнений 24
РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА 31
Тема 4. Векторная алгебра 31
Тема 5. Прямая и плоскость в пространстве 41
РАЗДЕЛ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА В ГЕОМЕТРИИ 50
Тема 6. Квадратичные формы 50
Тема 7. Кривые второго порядка 54
Тема 8. Поверхности второго порядка 65
РАЗДЕЛ 5. ПРИЛОЖЕНИЯ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА В ЭКОНОМИКЕ 72
Тема 9. Балансовые модели 72
ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 76
ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ И ДОМАШНИМ ЗАДАНИЯМ 80
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 86

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Линейная алгебра» является частью математического цикла (вариативная часть) дисциплин подготовки студентов по направлению подготовки 38.03.01 Экономика по профилю Бухгалтерский учёт, анализ и аудит. Дисциплина реализуется на экономическом факультете АНО ВПО СИБУП кафедрой прикладной математики и информатики.

Целью преподавания дисциплины является развитие у студентов логического мышления, привитие навыков чёткой формулировки прикладной задачи, её корректного математического описания и правильного использования математических аппаратных средств для её решения.

Задачи:

– формирование целостного представления об основных этапах становления современной математики и её структуре;

– определение роли и места математики в различных предметных областях;

– формирование основных особенностей математического мышления;

– формирование представления о важнейших математических понятиях, на основе которых возможны корректное применение математики в практической деятельности;

– формирование математической культуры обучающихся;

– развитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования.

В соответствии с требованиями к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата, определенными федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата) и в соответствии с планируемыми результатами освоения основных образовательных программ подготовки бакалавров по направлению 38.03.01 Экономика (профиль Бухгалтерский учёт, анализ и аудит), разработанным в АНО ВО СИБУП, в результате освоения дисциплины «Линейная алгебра» у обучающихся должны быть сформированы (должны формироваться) следующие компетенции:

Общепрофессиональные компетенции (ОПК)

– ОПК-2: способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач;

– ОПК-3: способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с методами сбора и обработки статистической информации, оценки состояния и перспектив развития экономических процессов; решением прикладных задач, применение математического аппарата при анализе сложных экономических процессов, принятии решений.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции (34 часа), практические занятия (50 часов), самостоятельная работа студента (78 часов), консультации.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме письменных практических заданий и устного опроса, рубежный контроль в форме контрольной работы и промежуточный контроль в форме экзамена.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 6 зачётных единиц, т.е. 216 часов.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Место математики в системе наук. Предмет математики. Обозначения математической логики.
2. Операции над матрицами. Приведите примеры. Транспонирование матриц. Операции сложения матриц и умножение матрицы на число.
3. Эквивалентные преобразования матриц. Приведение матрицы любого порядка к треугольному, трапециевидному и диагональному виду.
4. Разложение определителя по строке или столбцу. Вычисление определителей методом понижения порядка. Ранг матрицы. Метод окаймляющих миноров.
5. Решение системы линейных уравнений при помощи определителей. Правило Крамара. Условие применимости правила Крамара.
6. Решение матичных уравнений. Решение системы линейных уравнений при помощи обратной матрицы.
7. Понятие матрицы и обозначение её элементов. Основные виды матриц (квадратная, диагональная, единичная, треугольная, трапециевидная, расширенная и присоединенная матрицы и т.д.) Равенство матриц.
8. Операция перемножения матриц и её свойства. Перестановочные матрицы (AB=BA). Единичная матрица. Многочлены от матриц.
9. Определитель матрицы. Определитель n-го порядка. Вычисление определителей второго, третьего порядка. Минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы.
10. Свойства определителей. Вычисление определителей методом элементарных преобразований (объясните, почему сумма произведений элементов какой-либо строки на соответствующие алгебраические дополнения другой строки равны нулю).
11. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условие её существования. Обратная матрица и способы её нахождения. Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы.
12. Системы линейных уравнений. Система линейных уравнений с n переменными. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные системы.
13. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений методом исключения неизвестных (метод Гаусса). Общие и частные решения. Свободные и базисные переменные.
14. Ранг матрицы и методы его вычисления. Теорема о базисном миноре. Теорема Кронекера-Капелли.
15. Условие совместности однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений однородной системы.
16. Структура, общее решение неоднородной системы линейных уравнений. Алгоритм нахождения общего решения неоднородной системы линейных уравнений.
17. Метод полного исключения неизвестных (Жордана-Гаусса). Базисное решение. Свойства решений систем линейных уравнений.
18. Алгоритм симплекс- метода. Симплексные таблицы. Экономическая интерпретация элементов симплексной таблицы.
19. Виды математических моделей двойственных задач. Общие правила составления двойственных задач. Первая и вторая теоремы двойственности. Двойственный симплекс- метод и его алгоритм. Постоптимальный анализ.
20. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов.
21. Свойства скалярного произведения.
22. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Геометрический смысл линейной зависимости векторов. Базис и ранг системы векторов.
23. Представление вектора в координатной форме. Действия с векторами, заданными в координатной форме.

24. Угол между векторами. Понятие n-мерного арифметического пространства - r^n. Геометрический смысл пространств r, r^2 и r^3.
25. Операции над матрицами. Приведите примеры. Транспонирование матриц. Операции сложения матриц и умножение матрицы на число
26. Плоскость комплексных чисел: изображение комплексных чисел на комплексной плоскости. Оси, аргумент, радиус- вектор комплексного числа.
27. Понятие уравнения линии на плоскости. Разные формы записи (представления) уравнения прямой.
28. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых
29. Понятие об уравнении плоскости в пространстве r^3. Векторное, каноническое и параметрическое уравнения прямой в r^3
30. Понятие об уравнении прямой в пространстве r^3. Примеры
31. Понятие уравнения поверхности. Вывод уравнения сферической поверхности
32. Уравнения кривых 2-го порядка в каноническом и параметрическом виде
33. Вывод уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
34. Преобразование уравнений кривых второго порядка к каноническому виду.
35. Применение квадратичных форм к определению вида кривых второго порядка.
36. Расстояние от точки до прямой линии
37. Ортогональный и ортонормированный базисы. Разложение вектора по произвольному базису
38. Постановка и различные формы записи задач линейного программирования. Стандартная и каноническая формы представления задач линейного программирования. Приведение общей задачи линейного программирования к канонической форме
39. Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи, математическая модель ТЗ. Необходимое и достаточное условие разрешимости транспортной задачи. Свойства системы ограничений транспортной задачи
40. Правила построения цепей основные способы построения начального опорного решения переход от одного опорного решения к другому. Распределительный метод. Потенциалы, их экономический смысл. Метод потенциалов.
41. Алгоритм решения ТЗ методом потенциалов. ТЗ с ограничениями на пропускную способность
42. Транспортная задача по критерию времени. Применение транспортных задач для решения экономических задач
43. Методы решения транспортных задач с неправильным балансом. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.
44. Построение математической модели межотраслевого баланса. Виды балансовых моделей и алгоритм решения.
45. Продуктивность матриц. Матрицы прямых, косвенных и полных затрат МОБ.

Раздел 1. Матрицы и определители

Тема 1. Матрицы и действия над ними

Матрицей А размерности т× п называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где т - число строк матрицы, п - число столбцов матрицы.

Матрицы обозначаются большими буквами А,Б,С,В,М,…

Все числа матрицы берутся в круглые скобки.

Матрицу можно записывать в виде:

$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ или $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$

где a_{ij} - элементы матрицы;

первый индекс i указывает номер строки, $\left(i = \overline{1, m}\right)$;

второй индекс j - номер столбца, $\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Пример

$A = \begin{pmatrix} 2\,3\,5 \\ 4\,1\,6 \end{pmatrix}$ - матрица размерности 2x3; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец;

$C = (1 \quad 5 \quad 6 \quad 7)$ - матрица-строка.

Матрица называется квадратной, если число строк матрицы равно числу столбцов матрицы т = п, число п называют ее порядком.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы $a_{ij}\left(i = \overline{1, m}\right)$ составляют главную диагональ матрицы, а элементы a_{1n} , a_{2n-1} ,… , a_{n1} - вспомогательную, побочную диагональ матрицы.

Если все $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали a_{ii}, то матрицу называют диагональной, например:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица называется единичной, если все $a_{ii} = 1$, обозначают:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все $a_{ij} = 0$, то матрица называется нулевой, обозначают 0.

Нулевая и единичная матрицы выполняют в матричном исчислении такую же роль, как 0 и 1 в теории действительных чисел.

Две матрицы А и В называются равными, если они одной и той же размерности и их

соответствующие элементы равны между собой.

A=B, если $a_{ij}= b_{ij}$ $\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - основная матрица.

Расширенная матрица - это основная матрица, дополненная столбцом свободных членов.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & в_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & в_m \end{array}\right)$$

Пример

Пусть дана система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

Соответствующая матрица

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Размерностью матрицы называют количество ее строк и столбцов.

(m x n)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ Размерность матрицы (3 x 2)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ Размерность матрицы (2 x 3)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$ Размерность матрицы (3 x 3)

Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов (m = n)

Если число строк матрицы не равно числу столбцов матрицы, то матрица называется прямоугольной.

Для квадратных матриц указывается только их порядок.

(2x2) – второго порядка; (3x3) третьего порядка и т.д.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ Матрицы второго порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ матрица третьего порядка

В квадратных матрицах можно выделить элементы, стоящие в главной диагонали и элементы, стоящие в побочной диагонали.
Главная диагональ проходит из левого верхнего угла в правый нижний угол.
Побочная диагональ проходит из левого нижнего угла в правый верхний угол.
Главная диагональ «___ »
Побочная диагональ «---»
Диагональная матрица – это такая матрица, у которой элементы по диагонали отличны от нуля, а все остальные нули.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица – это такая матрица, у которой все элементы главной диагонали единицы, а все остальные нули.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица называется нулевой если все её элементы - нули.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица называется треугольной, если под главной диагональю стоят все элементы – нули, а остальные а остальные элементы – отличие нуля.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ Нижняя диагональная матрица

Матрица называется трапецевидной, если под главной диагональю стоят элементы нули и есть нулевые строки.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Трапецевидными могут являться как квадратные, так и прямоугольные матрицы.
Матрица-строка – это матрица, состоящая из одной строки:

$$A = \left(a_1, a_2, ..., a_n \right).$$

Матрица-столбец – это матрица, состоящая из одного столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Законы сложения матриц

1. Коммутативный закон сложения матриц / от перемены мест при сложении матриц результат не изменяется/.

A+B=B+A

2. Ассоциативный закон сложения матриц./ матрицы можно складывать в любом порядке/

(A+B)+C=A+(B+C)

Чтобы сложить две матрицы, нужно сложить элементы, стоящие на одинаковых местах в матрицах.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + в_{11} & a_{12} + в_{12} & a_{13} + в_{13} \\ a_{21} + в_{21} & a_{22} + в_{22} & a_{23} + в_{23} \\ a_{31} + в_{31} & a_{32} + в_{32} & a_{33} + в_{33} \end{pmatrix}$$

Пример

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+6 \\ 2+7 & -1+2 \\ 0+9 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Чтобы вычесть две матрицы, нужно из элементов первой матрицы вычесть элементо второй матрицы, стоящие на одинаковых местах .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - в_{11} & a_{12} - в_{12} & a_{13} - в_{13} \\ a_{21} - в_{21} & a_{22} - в_{22} & a_{23} - в_{23} \\ a_{31} - в_{31} & a_{32} - в_{32} & a_{33} - в_{33} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 & 1-2 & 2-4 & 6-1 \\ 7-6 & 3-7 & 4-9 & 5-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число.

Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad k=3$$

$$K\,C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \\ -8 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

Умножать матрицы можно только в случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. A= (m x n) B= (n x p).

Размерность матрицы, равной произведению двух матриц равна (число строк первой матрицы X число столбцов второй матрицы)

A x B $\neq$ B x A /При умножении двух матриц коммутативный (переместительный) закон не выполняется/.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ Размерность матрицы (3 x 2)

$B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Размерность матрицы (2 x 3)

Пример.

$$К==AxB=\underset{\text{размерность } 3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \underset{\text{размерность } 2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{\text{размерность } 3\times 3}{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 16 \\ 10 & 6 & -3 \\ -8 & 0 & 20 \end{pmatrix}}$$

Транспонирование матриц

Чтобы транспонировать матрицу, нужно поменять местами строки и столбцы.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A \cdot B + 2 \cdot C^T = 3 \cdot X$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 11 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = 2 + 4 + 2 = 8$$

$$a_{12} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0 + 1 - 4 = -3$$

$$a_{13} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 6 + 1 + 4 = 11$$

$$a_{21} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) = 3 + 0 - 1 = 2$$

$$a_{22} = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 + 0 + 2 = 2$$

$$a_{23} = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 7$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + 2 \cdot C^T = 3 \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 11 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 11 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 11 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 8+2 & -3+(-2) & 11+4 \\ 2+8 & 2+2 & 7+4 \end{pmatrix} = 3 \cdot X$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & 15 \\ 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} = 3 \cdot X$$

$$3 \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 15 \\ 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -5 & 15 \\ 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{15}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Пример

Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot$

Решение:

Обозначим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

При умножении матрицы на матрицу действует правило: каждая строка первой матрицы умножается на каждый столбец второй матрицы.

Перемножим первые две матрицы:

$$D = A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = -6 + 4 = -2$

$a_{12} = -2 \cdot -2 + 1 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$

$a_{13} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = -2 + 5 = 3$

$a_{21} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 9 + 4 = 13$

$a_{22} = 3 \cdot -2 + 1 \cdot 0 = -6 + 0 = -6$

$a_{23} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 3 + 5 = 8$

Затем результат умножим на третью матрицу:

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -14 & 4 \\ 49 & 26 & 49 \end{pmatrix}$$

$$d_{11} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot -2 + 3 \cdot 3 = -2 - 8 + 9 = -1$$

$$d_{12} = -2 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot -2 = -8 + 0 - 6 = -14$$

$$d_{13} = -2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = -6 + 4 + 6 = 4$$

$$d_{21} = 13 \cdot 1 - 6 \cdot -2 + 8 \cdot 3 = 13 + 12 + 24 = 49$$

$$d_{22} = 13 \cdot 4 - 6 \cdot 0 + 8 \cdot -2 = 42 - 0 - 16 = 26$$

$$a_{23} = 13 \cdot 3 + -6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 39 - 6 + 16 = 49$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -14 & 4 \\ 49 & 26 & 49 \end{pmatrix}$$

Формулы для нахождения обратной матрицы.
Матрица называется обратной, если выполняется
A x A^{-1} = A^{-1} x A = E

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A- основная матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

A^{-1} – обратная матрица.
E – единичная матрица.

Обратную матрицу можно найти только для квадратной матрицы (когда число строк равно числу столбцов).
Для прямоугольной матрицы обратная матрица не вычисляется.
С помощью обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

A^{-1} – обратная матрица.
AX=B
X= $A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Свойства операций над матрицами

1) A+B=B+A
2) (A+B)+C=A+(B+C)
3) к(A+B)=кA+кB
4) A(B+C)=AB+AC
5) (A+B)=AC+BC
6) к(AB)=(кA)B
7) (AB)C=A(BC)

Эквивалентные преобразования матриц.

1. Строки матрицы можно переставлять местами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

2. Все элементы какой-либо строки матрицы можно делить на любое число.

$$\begin{pmatrix} ка_{11} & ка_{12} & ка_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : к \approx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3. Строки матрицы можно умножать на число. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot к \approx \begin{pmatrix} ка_{11} & ка_{12} & ка_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

4. К элементам какой-либо строки матрицы можно прибавлять элементы другой строки матрицы, умноженные на какое- либо число.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot к \approx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ка_{11} & a_{22} + ка_{12} & a_{23} + ка_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

5. Две строки матрицы можно умножать на числа и результат сложения записывать в одну из строк.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \kappa \atop \cdot m \approx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m a_{21} + \kappa a_{11} & m a_{22} + \kappa a_{12} & m a_{23} + \kappa a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

6. Нулевую строку матрицы можно удалить.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы А называют число, равное наивысшему порядку ее минора, не равного нулю
Обозначают ранг матрицы: rang A; r(A); r.

Для квадратной матрицы разность между ее порядком и рангом называют дефектом матрицы.

Минор порядка r (r = rang A) называется базисным минором.

Справедливы следующие утверждения (доказать самостоятельно):

1. $0 \le r \le \min(m, n)$.

2. r=0, тогда и только тогда, когда все a_{ij}= 0

3. r=п для квадратной матрицы n-го порядка тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.

4. r < п для квадратной матрицы А, если ее определитель Δ = О

Теорема о базисном миноре:

Если ранг матрицы равен r, то любая строка матрицы есть линейная комбинация строк, в которых расположен базисный минор.

Ранг матрицы удобнее всего определять при помощи элементарных преобразований над ее строками и столбцами.

Элементарными преобразованиями называют:

- перестановку между собой строк;
- умножение всех элементов любой строки на число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на число.

Матрицы, полученные одна из другой при помощи элементарных преобразований (как над строками, так и над столбцами), называются эквивалентными. Эти матрицы имеют одинаковый ранг и порядок.

Если матрицы А и В эквивалентны, то записывают это так:

$$A \sim B$$

Для вычисления ранга матрицы можно пользоваться следующей теоремой:

если определитель порядка r матрицы А не равен нулю, а все определители порядка (r+1), включающие его в качестве минора, равны нулю, то ранг матрицы А равен r.

Пример

Вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} :3 \\ :(-2) \\ 1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx (2 \quad -3 \quad 7 \quad -1 \quad -4)$$

Ранг =1, так как осталась только одна линейно независимая строка.

Тема 2. Определители и их свойства

Определителем n -го порядка называется число Δ , записываемое в виде квадратичной таблицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам a_{ij}, которые называются элементами определителя. Индекс i указывает номер строки, а j – номер столбца квадратной таблицы.

Определителем n-го порядка квадратной матрицы называется число, вычисленное по определенным правилам.

Определители существуют только для квадратных матриц, для прямоугольных матриц определители не вычисляются.

Определители обозначаются или значком Δ, или берется в прямоугольные скобки буква, обозначающая соответствующую матрицу: $|A|$ $|B|$ $|C|$, или записывается слово det A, det B

Det (determinant) - определитель

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$ порядка, получаемый из определителя n -го порядка, вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Минор-это определитель (n-1) -го порядка, полученный из основного вычеркиванием соответствующей строки и соответствующего столбца.

Пример

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение – это минор, умноженный на элемент(-1) в степени, равной сумме индексов минора.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 7 \cdot 3$$

Рекуррентная формула для вычисления определителя n -го порядка имеет вид

$$\Delta = a_{n1} A_{n1} + a_{n2} A_{n2} + \dots + a_{nn} A_{nn}$$

(разложение определителя по элементам n -й строки).

Методы вычисления определителей.

Определитель второго порядка находится как разность произведений чисел главной и побочной диагоналей.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или разложить по элементам какой-либо строки или столбца, используя алгебраические дополнения и миноры.

Правило треугольников.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример

Вычислим определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 7 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 7 \cdot 2 \cdot 9 - 5 \cdot 4 \cdot 3 = 0$$

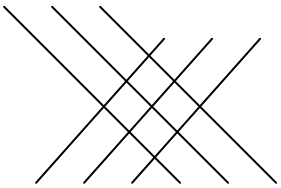
При вычислении определителя третьего порядка пользуются правилом Саррюса:

К определителю приписывают два первых столбца: со знаком «+» берутся произведения трех элементов, стоящих на главной диагонали и на прямых, ей параллельной;

Со знаком «-» - произведения трех элементов, стоящих на второстепенной диагонали и прямых, ей параллельной.

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & + & + \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{matrix} \begin{matrix} - & - & - \\ 2 & 1 & \\ 6 & 9 & \\ 7 & 8 & \end{matrix} =$$



$=2\cdot9\cdot5+1\cdot3\cdot7+4\cdot6\cdot8-4\cdot9\cdot7-2\cdot3\cdot8-1\cdot6\cdot5=90+21+192-252-48-30=-27$

Определителем третьего порядка называется число, равное сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

или

$$\Delta = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$$

Любой определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие алгебраические дополнения.

Определителем п-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

Свойства определителей

1. Если в определителе все элементы какой-либо строки или столбца равны нулю, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. Если все элементы какой-либо строки или какого-либо столбца равны соответственно элементам другой строки или столбца, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix} = 0$$

3. Если элементы каких-либо двух строк или каких-либо столбцов пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ ka & kb & \dots & kc \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

4. Если в определителе какие-либо две строки или два столбца поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

5. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки или какого-либо столбца прибавить элементы другой строки или столбца, умноженные на действительное число.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}^{\cdot(-2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

6. Общий делитель всех элементов какой-либо строки или какого-либо столбца можно вынести за знак определителя как общий множитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Если элементы некоторой строки (столбца) умножить на одно и то же число k, то определитель умножится на это число. Другими словами, общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица

Пусть А - квадратная матрица порядка n;

Е - единичная матрица того же порядка

Матрица В называется обратной для матрицы А, если

$AB = BA = E$.

Обозначают обратную матрицу A^{-1}.

Матрица А называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля: $\det A \neq 0$

Теорема существования обратной матрицы

Для каждой невырожденной матрицы А существует обратная A^{-1}.

Теорема единственности обратной матрицы

Если у некоторой матрицы существует обратная, то она только одна.

Доказательство.

Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} - обратные матрицы для А, тогда

$$A \cdot (A_1^{-1} - A_2^{-1}) = A \cdot A_1^{-1} - A \cdot A_2^{-1} = E - E = 0$$

Умножим слева на A_1^{-1} последнее выражение, получим

$$A_1^{-1} \cdot A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = A_1^{-1} \cdot 0,$$

Так как A_1^{-1} A=E, то A_1^{-1} - A_2^{-1} =0 или $A_1^{-1} = A_2^{-1}$

Алгоритм построения обратной матрицы:

1. Найдем Δ - определитель матрицы А. Если $\Delta \neq 0$, то A^{-1} существует, в противном случае обратная матрица не существует

2. Найдем все алгебраические дополнения элементов матрицы А, то есть: $A_{ij}=\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$

3. Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(Обратите внимание, что матрица из алгебраических дополнений транспонирована).

Только для квадратных невырожденных матриц А вводится понятие обратной матрицы (обозначают ее A^{-1}).

Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной невырожденной матрицы А, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где Е – единичная матрица того же порядка, что и матрица А.

Один из способов нахождения обратной матрицы состоит в следующем. Для матрицы А вычисляют определитель Δ и для всех ее элементов a_{ij} – их алгебраические дополнения A_i. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения, соответствующие элементам данной строки, располагаются в столбце, номер которого равен номеру строки.

Пример

Найти матрицу, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель матрицы

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 3 \cdot (3) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = -4$$

Определитель не равен нулю, следовательно, обратная матрица существует
Найдем все алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (4 \cdot 3 - 3 \cdot 3) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (3 \cdot (3) - 2 \cdot (3)) = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot (3) - 3 \cdot (-1)) = -9$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)) = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (2 \cdot (3) - 4 \cdot (-1)) = 10 =$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (1 \cdot (3) - 3 \cdot (-1)) = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = -2$$

Теперь, используя найденную обратную матрицу можно найти решение исходной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-18} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 & 10 \\ -3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример

Найдем ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 0 & 3 \\ 5 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы В:все элементы первой строки умножим на (-1) и прибавим к соответствующим элементам второй строки. Затем сложим последние две строки, Получим:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 0 & 3 \\ 5 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ -5 & 5 & -4 & -2 \\ 5 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ -5 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что все миноры третьего порядка будут равны нулю. Найдем минор второго порядка, отличный от нуля.

например, $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 5 = 20 \neq 0.$

Таким образом, rang B = 2.

Пример

Используя свойства определителей, вычислить определитель:

Вычислить, пользуясь свойствами определителей:

$$\begin{vmatrix} -9 & 7 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 5 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение:

Будем использовать следующие свойства определителей:

1) перестановка строк и столбцов меняет знак определителя;

2) если умножить строку (столбец) на число и сложить с другой строкой (столбцом), то определитель не изменится;

3) из строки (столбца) можно вынести общий множитель k;

4) определитель равен сумме произведений элементов строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & 7 & 6 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 5 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$ Сделаем преобразования:

Складываем 3-ю строку со 2-ой строкой умноженной на (-1), записываем 3-ей строкой.

Складываем 4-ую строку с 1-ой, записываем 4-ой строкой.

5-ую строку складываем со 2-ой, умноженной на 4, записываем 5-ой строкой.

1-ую строку складываем со 2-ой умноженной на (-5) и записываем 1-ой строкой. Получаем:

$$\begin{vmatrix} -9 & -3 & -7 & -11 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 9 & 5 & 10 & 13 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -9 & -3 & -7 & -11 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 9 & 5 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$ Преобразуем:

Складываем 4-ый столбец с 1-ым, записываем 1-ым столбцом.

Складываем 4-ый столбец со 2-ым, записываем 2-ым столбцом.

Складываем 3-ий столбец с 4-ым, умноженным на (-1), записываем 3-им столбцом. В результате:

$$- \begin{vmatrix} -20 & -14 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 10 & 0 & 5 \\ 22 & 18 & -3 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -20 & -14 & 4 \\ 10 & 10 & 0 \\ 22 & 18 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 10 \begin{vmatrix} -10 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 22 & 18 & -3 \end{vmatrix}$$

Складываем 1-ый столбец со 2-ым, умноженным на (-1), записываем 1-ым столбцом. В итоге:

$$-20\begin{vmatrix} -3 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 18 & -3 \end{vmatrix} = -20\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -20 \cdot (9-8) = -20$$

Ответ: $\Delta = -20$.

Пример

Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix}$.

Решение

а)

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1) \cdot (3) \cdot 2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot (-2) \cdot (-1) = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1) \cdot 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot 1 \cdot (2 \cdot (-2) - (-3) \cdot (-2)) = -3 \cdot (-4-6) = 30$$

б) $\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix} \cdot (-1) \cdot (-1) = \begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$ От элементов второго и третьего столбца отнимем элементы первого столбца

$$= \begin{vmatrix} 7241 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$ К элементам первой строки прибавим удвоенные элементы третьей строки

$$= \begin{vmatrix} 7237 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 7237 \cdot A_{11} = 7237 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} = 7237 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7237 \cdot 1 \cdot (0 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2) = 7237 \cdot 2 = 14474$$

Пример

Вычислить ранг матрицы: методом окаймляющих миноров:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 16 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 \cdot 16 + (-2) \cdot 1 \cdot 2 - 16 * 1 \cdot 2 - 1 * 0 * 4 - (-2) \cdot 1 * 6 = 24 + 0 - 4 - 32 - 0 + 12 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 * 6 - 0 * 2 \neq 0$$

Ранг=2

Раздел 2. Системы линейных уравнений

. Тема 3. Решение систем линейных уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – заданные числа, которые называют коэффициентами системы; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – также известные числа, которые называют свободными членами системы.

Система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называется неоднородной системой т линейных уравнений с п неизвестными.

Здесь $x_1, \ldots, x_п$ - неизвестные величины,

A_{ij} - коэффициенты системы,

b_j, - свободные члены $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right)$

Совокупность п чисел $x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0$ которые обращают каждое уравнение системы в тождество, называется решением системы.

Если существует хотя бы одно решение, то система называется совместной, в противном случае - несовместной.

Совместная система называется определенной, если решение единственно, в противном случае - неопределенной.

Если все свободные члены $b_i = 0$ $(j = \overline{1,m})$, то система называется однородной.

Однородная система всегда совместна, так как она имеет решение $x_j = 0$ $(i = \overline{1,n})$, это решение называют тривиальным.

Запишем систему в матричной форме:

AX=B,

где матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$, составленная из коэффициентов системы, называется основной матрицей системы.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ - матрица свободных членов

Если к матрице системы А присоединить столбец свободных членов, то получим так называемую расширенную матрицу системы.

Матрица

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ называется расширенной матрицей системы.

Решением системы (1) называется любая совокупность значений неизвестных $x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \dots, \quad x_n = \alpha_n$, при подстановке которых в систему все ее уравнения обращаются в тождества (верные равенства).

Для того, чтобы решить вопрос о существовании решения данной СЛУ, мы находим ранги расширенной и основной матриц. Если эти ранги равны, то система совместна и имеет одно или множество решений. Если эти ранги не равны, то система не совместна и решений она не имеет. Это утверждение называется теоремой Кроникера - Капелли.

Решением системы линейных уравнений называется упорядоченный набор чисел, который при подстановке в каждое уравнение вместо соответствующих переменных обращает каждое уравнение в верное равенство.

Методы решение систем

Ответ на вопрос о совместности неоднородной системы дает теорема Кронекера-Капелли:

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, то есть:

$$\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}.$$

Рассмотрим систему, у которой число уравнений равно числу неизвестных, т=п.

$$AX=B,$$

где $A=(a_{ij})$ - квадратная матрица порядка n. При решении такой системы возможны два случая:

1) Матрица А - не вырождена, ее определитель $\Delta \neq 0$.

В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Уравнение AX=B умножим слева на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}AX= A^{-1}B,$$

так как $A^{-1}A = E$, то решение системы найдено

$$X= A^{-1}\bullet B.$$

Итак, система имеет единственное решение, которое находится с помощью обратной матрицы по формуле:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots. & An\ 2 \\ .. & .. & \dots. & .. \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots. & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Отсюда легко получаются известные формулы Крамера:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\Delta}(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n) = \dfrac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k \\ (i = \overline{1,n}) \end{cases}$$

или

$$x_1 = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \qquad (i = \overline{1,n}),$$

где $\Delta_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k$ - определитель матрицы А, у которой i-ый столбец заменен столбцом свободных членов.

Метод Крамера

$x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ Формулы Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_d & x_b & x_c \\ y_d & y_b & y_c \\ z_d & z_b & z_c \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_a & x_d & x_c \\ y_a & y_d & y_c \\ z_a & z_d & z_c \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_d \\ y_a & y_b & y_d \\ z_a & z_b & z_d \end{vmatrix}$$

2) Матрица А - вырождена, то есть A = detA = 0.
Тогда ее ранг r(A) = r < п.

Условие совместности тоже выполнено, так как ранг расширенной матрицы $\tilde{A}$ равен r:

$$r(\tilde{A}) = r$$

Как найти и записать решения системы в этом случае?

Пусть базисный минор матрицы А, порядок которого равен r,находится в левом верхнем углу. В этом случае п-r уравнений, коэффициенты которых не входят в базисный минор, будут линейными комбинациями первых уравнений и могут быть отброшены.

Тогда система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Перепишем систему, оставив слева только r слагаемых в каждом уравнении:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ называют базисными переменными,

$x_{r+1}, \ldots, x_n$ называют свободными переменными.

Если выразить базисные переменные в общем виде через свободные, то получим общее решение системы. Если в этом общем решении придавать свободным переменным конкретные числовые значения, то получим частное решение системы.

Таким образом, в этом случае, когда $r(A) = r(\tilde{A}) < п$, система имеет бесчисленное множество решений.

Метод Гаусса последовательного исключения неизвестных

Рассмотрим неоднородную систему т уравнений с n неизвестными

AX=B, где $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ . & \dots & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

с помощью эквивалентных

преобразований над строками приведем эту матрицу к треугольному или трапециидальному виду. Решая систему уравнений, соответствующую полученной после преобразований матрице, находим единственное или общее решение данной системы.

Пример

Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса:

$$\left.\begin{array}{llll} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{array}\right\}.$$

Решение.

Найдем ранг расширенной матрицы системы, выполнив эквивалентные преобразования:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -17/3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -32/3 & 8 \end{array}\right).$$

Очевидно, что r(A) = r($\tilde{A}$)=4, следовательно, система совместна

Очевидно, что r(A) = r($\tilde{A}$)=4, следовательно, система совместна, причем имеет единственное решение. Запишем систему, соответствующую последней матрице:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 - 2x_2 + 4x_4 = -1 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_4 = 0 \\ x_3 - 5x_4 = 3 \\ -\frac{32}{3}x_4 = 8 \end{array}\right\}$$

Находим значения неизвестных:

$$x_4 = -\frac{3}{4}; \qquad x_3 = 3 - \frac{15}{4} = -\frac{3}{4}; \qquad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad x_1 = \frac{3}{4};$$

Итак, решение системы:

$$x_1 = \frac{3}{4}; \qquad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad x_3 = x_4 = -\frac{3}{4};$$

Пример

Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) методом Гаусса, в) при помощи обратной матрицы.

$$\begin{cases} 1x + 2y - z = 2, \\ 3x + 4y + 3z = 4, \\ 2x + 3y + 3z = 5. \end{cases}$$

Решение:

Запишем основную и расширенную матрицы для данной системы линейных уравнений, а также столбец свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{расш} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель основной матрицы

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 3 \cdot (3) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = -4$$

Так как найденный определитель отличен от нуля, то ранг матрицы A=3

Данный определитель является минором матрицы $A_{расш}$, rang A=rang $A_{расш}$ =3, система совместна и имеет единственное решение.

Найдем решение системы методом Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 \cdot (-1) - 3 \cdot (3) \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 5 \cdot (3) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = -16$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 5 = -4$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{-4} = -5 \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-4} = 4 \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Б) метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы, а затем при помощи элементарных преобразований строк приведем её к треугольному виду:

$$A_{расш} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-2) \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(1) \\ \cdot -2 \end{matrix} \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) : -4 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} : \\ *1 \\ *-6 \\ *1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} : \\ *1 \\ *-6 \\ *1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} *1 \\ *-2 \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B) С помощью обратной матрицы

Чтобы найти решение системы, нужно вычислить обратную матрицу для основной матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Вычисляем определитель исходной матрицы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 3 \cdot (3) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = -4$$

Найдем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (4 \cdot 3 - 3 \cdot 3) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (3 \cdot (3) - 2 \cdot (3)) = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = 1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot (3) - 3 \cdot (-1)) = -9$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)) = 5$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (2 \cdot (3) - 4 \cdot (-1)) = 10 =$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (1 \cdot (3) - 3 \cdot (-1)) = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (1 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = -2$$

Теперь, используя найденную обратную матрицу можно найти решение исходной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-18} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 & 10 \\ -3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример

Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$A_ \textit{расширенно} \quad e = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \cdot (-3) \quad \cdot 1 \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \cdot (-2) \quad \cdot 1 \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right) \cdot 3 \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -29 & -18 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 1x_1 - 29x_3 - 18x_4 = -1 \\ 1x_2 - 11x_3 - 7x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 29x_3 + 18x_4 - 1 \\ x_2 = 11x_3 + 7x_4 - 1 \end{cases}$$ Общее решение

Если x3=1 x4=0

$$\begin{cases} x_1 = 29 \cdot 1 + 18 \cdot 0 - 1 = 28 \\ x_2 = 11 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 1 = 10 \end{cases}$$

частное решение

Пример

Исследовать на совместность и найти общее решение системы

$$\left.\begin{array}{llll} 2x_1 & + x_2 & - 3x_3 & = 1 \\ & - x_2 & + x_3 & = 2 \\ 2x_1 & + 2x_2 & - 4x_3 & = -1 \end{array}\right\}.$$

Решение.

Найдем ранг расширенной матрицы системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right),$$ для этого из первой строки вычтем третью,

получим:

$$A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$

Следовательно, система совместна. Здесь r=2, n=3, так как r<n, то система имеет бесчисленное множество решений. Найдем общее решение системы. Запишем систему, полученную после выполнения эквивалентных преобразований над расширенной матрицей системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + 3x_3 \\ x_2 = -2 + x_3 \end{cases},$$

где x_1, x_2 - базисные переменные,

x_3 - свободная переменная.

Из первого уравнения найдем:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + 3x_3 - x_2) = \frac{1}{2}(1 + 3x_3 + 2 - x_3) = \frac{3}{2} + x_3.$$

Итак, общее решение имеет вид: $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + x_3 \\ x_2 = -2 + x_3 \end{cases}$

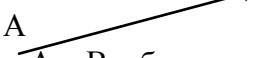
Раздел 3. Элементы матричного анализа

Тема 4. Векторная алгебра

Вектором называется отрезок, имеющий направление.

Обозначают $\vec{a}$.

или $\overrightarrow{AB}$, где A - начало, B - конец вектора.



Длиной вектора называют расстояние между A и B, обозначают

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $\left|\vec{a}\right|$.

Нулевым вектором называют вектор, у которого начало и конец совпали $\left(\left|\vec{a}\right| = 0\right)$.

Коллинеарными называют два вектора, если существует прямая, которой они параллельны, обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $\vec{b}$

Компланарными называют три вектора, которые лежат в одной плоскости (параллельны одной плоскости).

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если;

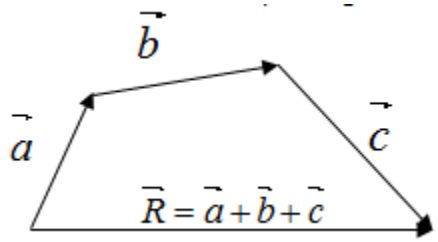
1) длины их равны, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

2) они коллинеарны, $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

3) сонаправлены (направлены в одну сторону).

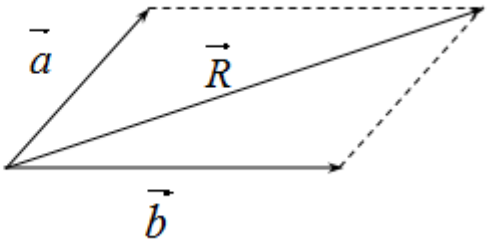
Линейные операции над векторами

Суммой векторов $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{c}$ называют вектор $\vec{R}$, замыкающий ломаную линию, построенную из данных векторов так, что начало каждого последующего вектора совпадает с концом предыдущего.



В частности, суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало, является диагональ параллелограмма, построенного на этих векторах, начало которой совпадает с началом векторов ā и $\vec{b}$.

$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$



Произведением вектора ā на число λ называется вектор $\vec{b}$:

1) длина которого равна |b| = |λ| |a|;

2) коллинеарный вектору ā, $\vec{b} \parallel \bar{a}$;

3) если λ > 0, то ā и $\vec{b}$ направлены в одну сторону;

4) если λ < 0, то ā и $\vec{b}$ направлены в противоположные стороны.

Имеют место следующие свойства линейных операций над векторами (проверить самостоятельно):

1. $\bar{a} + \vec{b} = \vec{b} + \bar{a}$
2. $\lambda(\bar{a} + \vec{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \vec{b}$
3. $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{a}$

где ā и $\vec{b}$ - любые векторы; λ , μ - любые числа.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ и $\bar{b} = b_x \bar{i} + \ + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$ называется число, определяемое равенством

$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,

где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обозначаемый $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}]$, который удовлетворяет условиям:

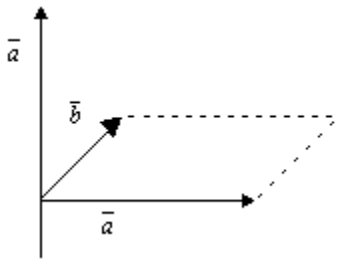
1) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$;

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая тройка векторов;

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Векторное произведение обозначается $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ или $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.



Свойства векторного произведения:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -[\bar{b} \times \bar{a}]$
2. $\lambda \bar{a} \times \bar{b} = \lambda[\bar{a} \times \bar{b}]$, λ - скаляр;
3. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$, $\bar{c} \in E^3$

$S = \frac{1}{2}|\bar{c}| = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$ – формула для вычисления площади треугольника.

Смешанное произведение трех векторов $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$ есть число, равное

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Смешанным произведением трех векторов называется их векторно-скалярное произведение, обозначают:

$$\bar{a}\,\overline{bc} = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c})$$

Найдем выражение смешанного произведения через координаты.

Пусть $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$; $\bar{b} = (x_2 y_2 z_2)$ и $\bar{c} = (x_3 y_3 z_3)$, тогда векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ в координатах записывается в виде:

$$\bar{a} \times \bar{b} = i\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

тогда скалярное произведение $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c})$ в координатах имеет вид:

$$(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

Правую часть последнего выражения можно записать с помощью определителя третьего порядка.

смешанное произведение в координатах имеет следующий вид:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

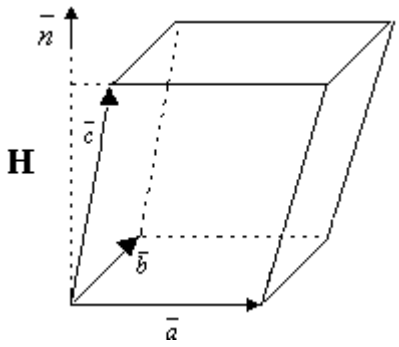
Свойства смешанного произведения векторов (проверьте самостоятельно):

1) $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$;

2) $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a}$;

3) Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - некомпланарные векторы.

Построим на этих векторах параллелепипед.



Смешанное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = V$$

Действительно, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{n}$, *где* $|\bar{n}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a}, \bar{b})$, то есть $|\bar{n}| = S_{ABCD}$, где S_{ABCD} - площадь основания.

Скалярное произведение $(\bar{n}, \bar{c}) = |\bar{n}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos(\bar{n}, \bar{c}) = |\bar{n}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos a$. Очевидно, что $|\bar{c}| \cdot \cos a = H$, где H высота параллелепипеда.

Итак, $(\bar{n}, \bar{c}) = |\bar{n}| \cdot H = S_{ABCD} \cdot H = V$

или, так как $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$, *то* $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = V$.

В частности, объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равен

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$$

4) Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - компланарные $\Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0$.

Пример

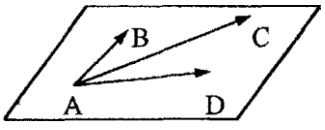
Показать, что заданные четыре точки лежат в одной плоскости: A(2, 0, 1); B(-3, 1, 0); C(0,1, 3); D(-4, 3, 7).

Решение.

Заданные точки лежат в одной плоскости, если три вектора также лежат в этой плоскости, то есть, если эти векторы компланарны.

Векторы компланарны, если их смешанное произведение равно нулю.

Найдем координаты векторов:



$\overline{AB} = (-3-2;1-0;0-1) = (-5,1,-1)$;

$\overline{AC} = (-2,1,2)$;

$\overline{AD} = (-6,3,6)$,

тогда смешанное произведение равно

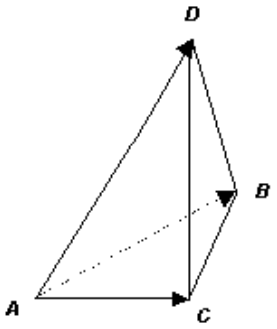
$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-5 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -6 & 3 & 6\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-5 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 0=0,$$

то есть заданные точки лежат в одной плоскости.

Пример

Найти объем пирамиды ABCD, где A(2, 0, 1); B(3, -1, 4);
C(0,-5,1); D(0,0,4).

Решение



Объем пирамиды равен $V_{пир}=\frac{1}{6}|\overline{\overline{\overline{a\,b\,c}}}|$

Найдем координаты векторов

$\bar{a}=\overline{AB}=(1,-1,3);$

$\bar{b}=\overline{AC}=(-2,-5,0);$

$\bar{c}=\overline{AD}=(-2,0,3)$

тогда смешанное произведение:

$$\overline{\overline{\overline{a\,b\,c}}}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & -5 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-15-30-6=-51$$

Следовательно, объем пирамиды

$$V_{пир}=\frac{1}{6}|\overline{\overline{\overline{a\,b\,c}}}|=\frac{1}{6}|-51|=\frac{51}{6}8{,}5(ед^2)$$

Определение линейного пространства

Пусть $\bar{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - элементы некоторого множества $\bar{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in$ L и λ, μ - действительные числа, λ, $\mu\in$ R..

Множество L называется линейным или векторным пространством, если определены две операции:

1^0. Сложение. Каждой паре элементов этого множества поставлен в соответствие элемент того же множества, называемый их суммой

$$\bar{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

2°. Умножение на число. Любому действительному числу λ и элементу $\bar{a}\in$ L ставится в соответствие элемент того же множества $\lambda\,\bar{a}\in$ L и выполняются следующие свойства:

1. $\bar{a}+\vec{b}=\vec{b}+\bar{a}$;
2. $\bar{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\bar{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. существует нулевой элемент $\overline{0}$, $\bar{0}\in L$, такой, что $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$;
4. существует противоположный элемент - $\bar{a}\in L$ такой, что $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$.

Если λ, μ - действительные числа, то:

5. $\lambda(\mu,\bar{a})=\lambda\,\mu\,\bar{a}$;
6. $1\bar{a}=\bar{a}$;

7. $\lambda(\bar{a}+\vec{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\vec{b}$;

8. $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$

Элементы линейного пространства $\bar{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ... называют векторами.

Упражнение. Покажите самостоятельно, что данные множества образуют линейные пространства:

1) Множество геометрических векторов на плоскости;

2) Множество геометрических векторов в трехмерном пространстве;

3) Множество многочленов некоторой степени;

4) Множество матриц одинаковой размерности.

Пример

Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) (a–3b)(2a+b), б) |(a–3b)×(2a+b)|,

где |a|=4, |b|=2, a^b=2□/3.

а) (a–3b)(2a+b)

$$\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{a}-3\vec{b}^{\,2}=2\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^{\,2}=2\vec{a}^{\,2}-\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^{\,2}=$$

$$=2\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right)-3\left|\vec{b}\right|^2=2\cdot4^2-4\cdot2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-3\cdot2^2=32-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-12=28$$

б) |(a–3b)×(2a+b)|

$$\left[\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\right]=\left|2\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{b}\times\vec{b}\right|=\left|2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\sin0+2\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{a}\times\vec{b}-3\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin0\right|=$$

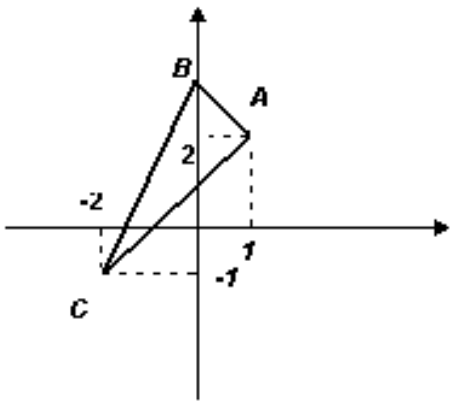
,

$$=0+5\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\vec{b}\right)-0=5*4*2*\sin\frac{2\pi}{3}=40*\sqrt{3}/2=20\sqrt{3}$$

Пример

Дан треугольник ABC. где A(1, 2); B(0, 3); C(-2, -1). Найти периметр его и угол A.

Решение



Обозначим векторы $\overline{AC}=\bar{a};\overline{AB}=\bar{b}$. Используя скалярное произведение, найдем $\cos(\bar{a},\bar{b})=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$. Координаты вектора $\bar{a}$ находим, вычитая из координат его конца - точки C, соответствующие координаты начала его точки A.

$$\bar{a}=\overline{AC}=(x_c-x_A,y_C-y_A)=(-2-1,-1-2)=(-3,-3).$$

Аналогично, $\bar{b}=\overline{AB}=(0-1,3-2)=(-1,1)$

Найдем $\cos(\bar{a},\bar{b})=\frac{-3(-1)+(-3)\cdot1}{\sqrt{9+9}\cdot\sqrt{1+1}}=\frac{0}{\sqrt{18\cdot2}}=0$

Таким образом, $\cos\angle A=0,\quad \angle A=90^0$.

Чтобы найти периметр ΔABC, надо найти длины всех его сторон:

$$|\bar{a}| = |\overline{AC}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$
$$|\bar{b}| = |\overline{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-3)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Итак, периметр ΔABC равен

$$P = |\overline{AC}| + |\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

Размерность и базис пространства

Линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \in L$ называется вектор того же пространства вида:

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_n \overline{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a_i},$$

где λ_i - действительные числа.

Векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация будет нулевым вектором в том и только в том случае, когда все λ_i равны нулю, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a_i} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \qquad (i = \overline{1,n})$$

Если же линейная комбинация будет нулевым вектором и хотя бы один из λ_i отличен от нуля, то эти векторы называются линейно-зависимыми. Последнее означает, что хотя бы один из векторов может быть представлен как линейная комбинация других векторов. Действительно, пусть $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$ и, например, $\lambda_1 \neq 0$. тогда, $\bar{a}_1 = \mu_2 \bar{a}_2 + \ldots + \mu_n \bar{a}_n$, где $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_2}$ $(k = \overline{2,n})$.

Максимально линейно-независимая упорядоченная система векторов называется базисом пространства L. Число векторов базиса называется размерностью пространства.

Допустим, что существует n линейно-независимых векторов, тогда пространство называют n - мерным. Другие векторы пространства могут быть представлены как линейная комбинация n векторов базиса. За базис n-мерного пространства можно взять любые n линейно-независимых векторов этого пространства.

Пример

Найти базис и размерность данных линейных пространств:

а) множества векторов, лежащих на прямой (коллинеарных некоторой прямой)

б) множество векторов, принадлежащих плоскости

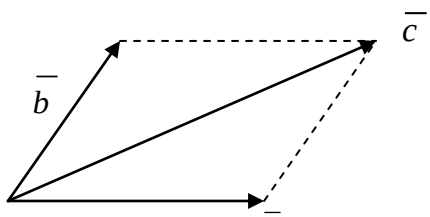
в) множество векторов трёхмерного пространства

г) множество многочленов степени не выше второй.

Решение

а) Любые два вектора, лежащие на прямой будут линейно-зависимыми, так как вектора коллинеарные $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} = \lambda \bar{b}$, λ - скаляр. Следовательно, базисом данного пространства является только один (любой) вектор, отличный от нулевого.

Обычно это пространство обозначают R, размерность его равна 1.



б) любые два неколлинеарные вектора $\bar{a}, \bar{b}$ будут линейно-независимы, а любые три вектора на плоскости - линейно-зависимы. Для любого вектора $\bar{c}$, существуют числа □ и □ такие, что

$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$. Пространство называют двумерным, обозначают R^2.

Базис двумерного пространства образуют любые два неколлинеарных вектора.

в) Любые три некомпланарные векторы будут линейно независимые, они образуют базис трехмерного пространства R^3.

г) В качестве базиса пространства многочленов степени не выше второй можно выбрать такие три вектора: $\bar{e}_1=x^2$; $\bar{e}_2=x$; $\bar{e}_3=1$.

(1 - это многочлен, тождественно равный единице). Данное пространство будет трехмерным.

Теорема о разложении вектора по базису

Всякий элемент n-мерного линейного пространства можно представить, притом единственным образом, как линейную комбинацию векторов базиса.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ - базис линейного пространства L. Рассмотрим любой вектор $\bar{a} \in L$. Тогда система векторов $\bar{e}_1,\ldots, \bar{e}_n, \bar{a}$ - линейно зависимая, то есть $\lambda_1\bar{e}_1+\ldots+\lambda_n\bar{e}_n+\lambda_{n+1}\bar{a}=0$, причем $\lambda_{n+1}\neq 0$.

Если $\lambda_{n+1}=0$, тогда $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{e}_i = 0$ и какое-то из $\lambda_i\neq 0$ $(\overline{i=1,n})$

Это означает: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ - линейно зависимы, что противоречит условию: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ - базис, то есть линейно независимая система векторов.

Итак, $\lambda_{n+1}\neq 0$, тогда $\bar{a} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\bar{e}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}\bar{e}_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\bar{e}_n$, то есть

$\bar{a} = \mu_1\bar{e}_1 + \mu_2\bar{e}_2 + \ldots + \mu_n\bar{e}_n$, где $\mu_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}$.

Таким образом, показали, что любой вектор можно представить как линейную комбинацию векторов базиса.

Покажем, что такое разложение единственно. Предположим, что наряду с полученным разложением $\bar{a}$ по базису $\bar{a} = \mu_1\bar{e}_1 + \mu_2\bar{e}_2 + \ldots + \mu_n\bar{e}_n$, существует другое $\bar{a} = \gamma_1\bar{e}_1 + \ldots + \gamma_n\bar{e}_n$.

Вычитая, находим $\bar{0} = (\mu_1 - \gamma_1)\bar{e}_1 + \ldots + (\mu_n - \gamma_n)\bar{e}_n$.

Так как векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ - линейно независимы, то последнее равенство имеет место только тогда, когда $\mu_1 - \gamma_1 = 0, \ldots, \mu_n - \gamma_n = 0$.

Таким образом, $\mu_i=\gamma_i$ для $\overline{i=1,n}$, а следовательно, разложение вектора по базису единственно.

Всякий базис линейного пространства, векторы которого берутся в определенной последовательности, называют системой координат, а числа - коэффициенты в разложении любого вектора $\bar{a}$ по базису - называют координатами вектора $\bar{a}$.

$$\bar{a}=x_1\bar{e}_1+\ldots+x_n\bar{e}_n,$$

где $x_1,\ldots, x_n$ - координаты вектора $\bar{a}$.

Последнее выражение называют формулой разложения вектора по базису.

В общем случае при изменении базиса, координаты вектора изменяются.

Вектор можно задавать с помощью координат $\bar{a}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Рассмотрим два вектора:

$\bar{a}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\vec{b}=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$.

Используя определение линейного пространства, покажите что:

1) при сложении векторов их соответствующие координаты складываются:

$\bar{a}+\vec{b} = (x_1+\gamma_1, x_2+\gamma_2, \ldots, x_n+\gamma_n)$;

2) при умножении вектора на скаляр λ, каждая координата умножается на это число:

$\lambda\bar{a}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Евклидово пространство

Для n-мерного линейного пространства введем понятие длины вектора и угла между векторами. Это можно сделать, если определить операцию произведения над векторами.

В линейном пространстве L задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $\bar{a},\bar{b} \in L$ поставлено в соответствие число $(\bar{a},\bar{b})$ такое, что:

1°. $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$;

2°. $(\lambda,\bar{a},\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b})$; λ - скаляр;

3°. $(\bar{a}+\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c})$, $\bar{c} \in L$

Линейное пространство L называется евклидовым пространствам, если в нем определено скалярное произведение и для любого вектора $\bar{a} \in L$, его скалярный квадрат будет положительным.

4°. $(\bar{a},\bar{a}) \geq 0$, при $(\bar{a},\bar{a}) = 0$, то ā=0

Обозначают n-мерное евклидово пространство E^n.

Таким образом, линейное пространство будет евклидовым, если введенное там (как угодно) скалярное произведение векторов будет удовлетворять четырем аксиомам 1°, 2°, 3°, 4°.

Пусть векторы $\bar{a},\bar{b} \in E^n$ заданы своими координатами

ā=(x1,x2,…,xn) и $\vec{b}$ =(γ1 , γ2 , …, γn).

Легко проверить (проверьте!), что всем аксиомам будет удовлетворить скалярное произведение, определенное как сумма произведений соответствующих координат перемножаемых векторов

$(\bar{a},\bar{b}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ или $(\bar{a},\bar{b}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Нормой (длиной) вектора $\bar{a} \in E^n$ называется число, равное

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$$

или

в координатной форме $$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Угол между векторами $\bar{a},\bar{b} \in E^n$ определяется по формуле

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

Покажем, что это определение корректно, то есть выполняется условие $|\cos(\bar{a},\bar{b})| \leq 1$

Пусть λ - любое действительное число, $\bar{a},\bar{b} \in E^n$.

Согласно аксиоме 4°, имеем $(\bar{a}-\lambda\bar{b},\bar{a}-\lambda\bar{b}) \geq 0$, используя аксиомы 1°-3°, последнее неравенство можно записать в виде $(\bar{a},\bar{a}) - 2\lambda(\bar{a},\bar{b}) + \lambda^2(\bar{b},\bar{b}) \geq 0$

Это квадратное неравенство относительно λ справедливо, если его дискриминант неположительный, то есть,

$4(\bar{a},\bar{b})^2 - 4(\bar{b},\bar{b})(\bar{a},\bar{a}) \leq 0$ или $(\bar{a},\bar{b})^2 \leq (\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})$

Итак, доказали, что для любых $\bar{a},\bar{b} \in E^n$ справедливо неравенство $(\bar{a},\bar{b})^2 \leq |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2$

оно называется неравенствам Коши-Буняковского. Из неравенства Коши-Буняковского следует:

$$\frac{(\bar{a},\bar{b})^2}{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2} \le 1 \qquad -1 \le \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} \le 1$$

или

итак, действительно $-1 \le \cos(\bar{a},\bar{b}) \le 1.$

Как уже отмечалось, в n-мерном линейном пространстве базисом является любая система из n линейно независимых векторов. Часто выбирают базис из взаимно перпендикулярных (ортогональных) единичных векторов.

Базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ в пространстве E^n называется ортонормированным, если имеет место:

$$(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \ne j \end{cases}.$$

В частности, в пространстве E^2 ортонормированным базисом является система двух векторов, их обозначают i, j:

в пространстве E^3 ортонормированный базис обозначают i, j, k:

Пример

Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (2;4;2), b = (–1;–2;–2), c = (3;5;1), d = (3;5;–1).

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot -2\cdot 1 + -1\cdot 5\cdot 2 + 4\cdot -2\cdot 3 - 3\cdot -2\cdot 2 - 5\cdot -2\cdot(2) - -1\cdot 4\cdot 1 = -2 \ne 0 \Rightarrow$$ Векторы

линейно независимы и образуют базис.

Найдем координаты вектора d в этом базисе.

$$\vec{d} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{в} + \gamma\cdot\vec{c}$$

$$\begin{cases} 3 = \alpha\cdot(2) + \beta\cdot -1 + \gamma\cdot 3 \\ 5 = \alpha\cdot 4 + \beta\cdot -2 + \gamma\cdot 5 \\ -1 = \alpha\cdot 2 + \beta\cdot -2 + \gamma\cdot 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

$$\gamma = 1$$

$$\vec{d} = 1\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{в} + 1\cdot\vec{c}$$

$S = \frac{1}{2}|\bar{c}| = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$ – формула для вычисления площади треугольника.

Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, если A(1;3;–1), B(2;–2;0), C(–1;1;2), D(3;2;1).
Даны координаты вершин пирамиды A1,A2,A3,A4
Определим координаты векторов с вершинами в данных точках.

$$\overrightarrow{AB} = \overline{(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)} = (2-1 \quad ; \quad -2-3 \quad ; \quad 0-(-1)) = (1;-5;1)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overline{(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)} = (-1-1;1-3;2-(-1)) = (-2;-2;3)$$
$$\overrightarrow{AД} = \overline{(x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1)} = (3-1;2-3;1-(-1)) = (2 \quad ; \quad -1 \quad ; \quad 2)$$

А) Объем пирамиды

$$V_{ABCД} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot(1 \cdot (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + (-5) \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \cdot$$

$$\cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-5) \cdot 2) = \frac{|-45|}{6} = 7.5$$

Б)Площадь грани находится по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|[AB \times AC]\|$$

$$[AB \times AC] = \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{Vmatrix} = -13 \quad i \quad -5\,j - 12\,k = (-13;-5;-12)$$

$$\|[AB \times AC]\| = \sqrt{(-13)^2 + (-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{338}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|[AB \times AC]\| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{338} = 18.358 \text{ кв.ед.}$$

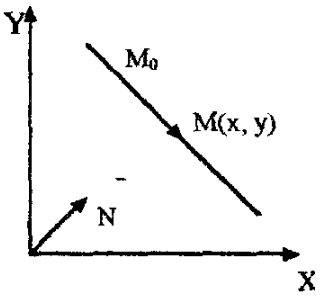
в) косинус угла между ребрами AB и AC

$$\cos\left(\overline{AB} \hat{} \overline{AC}\right) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1*(-2) + (-5)*(-2) + 1*3 = 11$$

$$\cos\left(\overline{AB} \hat{} \overline{AC}\right) = \frac{11}{5 \cdot 3} = 0.70565$$

Тема 5. Прямая и плоскость в пространстве
Прямая на плоскости



Постановка задачи Даны точка M_o (x_0 , y_0) и вектор $\overline{N}$ (A, B) Написать уравнение прямой l, перпендикулярной вектору $\overline{N}$ и проходящей через точку M_0.

Точка M(x,y) - текущая точка прямой l.

$M \in l$ тогда и только тогда, когда

$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ и $\overline{N}$ (A, B) - ортогональны,

следовательно скалярное произведение $(\overline{M_0M}, \overline{N}) = 0$

или $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

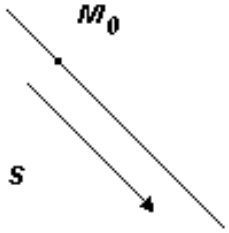
Итак, получили уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной $\overline{N}$.

Вектор $\overline{N}$ называется нормальным вектором прямой.

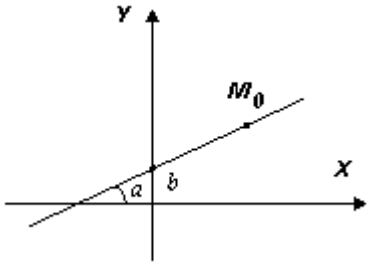
Последнее уравнение запишем в виде

Ax+By+D=0 - оно называется общим уравнением прямой.

Другие виды уравнений прямой на плоскости:



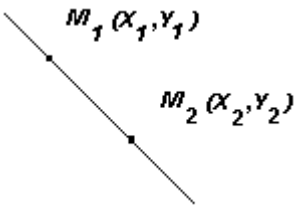
$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ - уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (x_0 , y_0) и параллельной вектору $\overline{S}$ (m, n).



y =kx + b - уравнение прямой с угловым коэффициентом к,
где k =tgα ,
b - отрезок, отсекаемый прямой на оси OY.

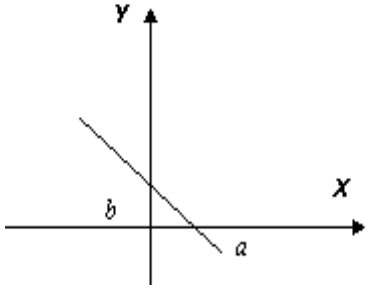
$y - y_o = k(x - x_o)$

- уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1}$$

- уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1 , y_1)$ и $M_2(x_2 , y_2)$.



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$ - уравнение прямой в отрезках.

Между всеми этими уравнениями существует связь, то есть, если задана прямая одним из уравнений, то можно перейти к любому из перечисленных видов.

Пример

Написать различные виды уравнений прямой, проходящей через две точки $M_1(2, 0)$; $M_2(0, 3)$.

Решение

Используя уравнение прямой, проходящей через две точки, находим

$\frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{y - 0}{3 - 0}$ или $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y}{3}$; $\frac{x}{-2} + 1 = \frac{y}{3}$.

Из последнего уравнения с помощью преобразований можно перейти к другим видам уравнений этой же прямой.

Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1.$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=-\frac{3}{2}x+3;\qquad k=-\frac{3}{2}.$

Общее уравнение прямой: 3x + 2y - 6 = 0, где вектор $\overline{N}$ (3, 2) перпендикулярен данной прямой.

Пример

Найти уравнение стороны АВ и высоты, опущенной из вершины А в треугольнике АВС, где А(0, 1); В(-2. 3); С(0, 6).

Решение

Уравнение стороны АВ - это уравнение прямой, проходящей через точки А и В:

$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-1}{3-1}$ или $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{2};\qquad x+y-1-0.$

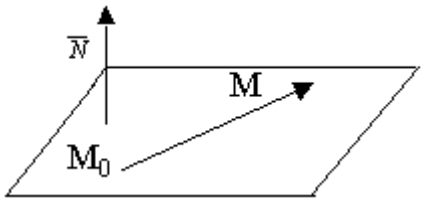
Чтобы написать уравнение высоты из вершины А, найдем координаты вектора $\overline{BC}$, который ей перпендикулярен: $\overline{BC}(2,3).$

Используя уравнения прямой, проходящей через точку А и перпендикулярной вектору $\overline{BC}$, находим уравнение высоты:

2(x-0)+3(y-1)=0 или 2x+3y-3=0.

Плоскость в пространстве

Постановка задачи. Даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overline{N}$ (A,B, C). Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_o, перпендикулярно вектору $\overline{N}$.



M(x, y, z) - текущая точка плоскости. Точка М принадлежит искомой плоскости тогда и только тогда, когда вектор $(\overline{M_0M},\overline{N})=0$ то есть, когда скалярное произведение векторов

или в координатной форме

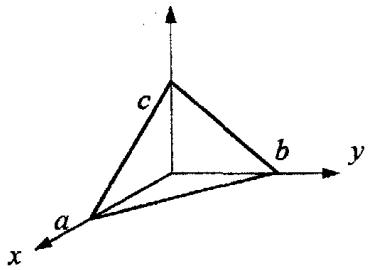
$A(x-y_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

Полученное уравнение является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}$ (A,B,C).

Вектор $\overline{N}$ называется нормальным вектором плоскости. Если в последнем уравнении приведем подобные члены, то получим общее уравнение плоскости:

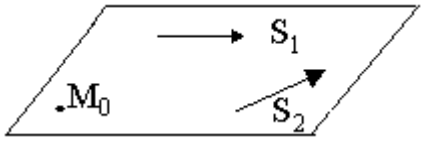
Ax+By+Cz+D=0.

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

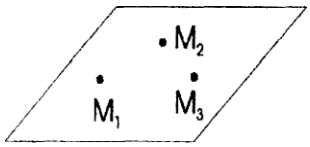


Используя условие компланарности трех векторов, можно записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и параллельную векторам $\overline{S}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{S}_2(m_2, n_2, p_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$



Уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Пример

Найти уравнение плоскости P_1, проходящей через три точки $M_1(1,0,4)$; $M_2(-2,1,3)$; $M_3(0,7,1)$ и уравнение плоскости P_2, проходящей через точку Мз, причем $\overline{M_1M_2} \perp P_2$

Решение

Уравнение плоскости P_1, проходящей через три точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-4 \\ -2-1 & 1-0 & 3-4 \\ 0-1 & 7-0 & 1-4 \end{vmatrix} = 0 \quad \textit{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-4 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим 4(x - 1) - 8y - 20(z - 4) == 0;

x-2y-5z+ 19=0 - уравнение плоскости P_1.

Так как вектор $\overline{M_1M_2}(-3,1,-1)$ и $\overline{M_1M_2} \perp P_2$, $M_3(0,7,1) \in P_2$, то, используя уравнение плоскости, проходящей через точку M_3 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$ найдем уравнение плоскости P_2

-3(x-0) + 1(y-7) - 1(2-1) = O или 3x-y +z+6=0.

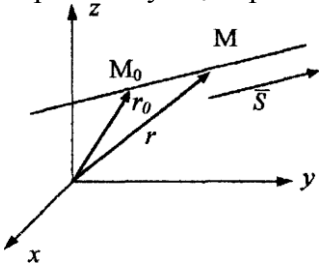
Прямая в пространстве

Различные виды уравнений прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Пусть даны вектор $\overline{S}$ (т ,п , р)и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Напишем уравнение прямой l, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\overline{S}$.



Возьмем на прямой l произвольную (текущую) точку M(x, y, z). Вектор $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ коллинеарен вектору $\overline{S}$ (m, n,p), следовательно: $\overline{M_0M} = t\overline{S}$;

так как $\overline{M_0M} = r - r_0$, то $r - r_0 = t\overline{S}$ или $r = r_0 + t\overline{S}$

Итак, уравнение $r = r_0 + t\bar{S}$ называется векторным уравнением прямой в пространстве.

Вектор $\bar{S}$ (m, n, p) называется направляющим вектором прямой в пространстве.

Запишем последнее уравнение в координатной форме; так как r (x, y, z); $r_o = (x_0, y_0, z_0)$, то

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$$

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой.

Если исключить параметр t в последних уравнениях, то получим каноническое уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Пример 25. Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей P_1: 2x-y+z+3=0 и P_2: 3x+y-z+2=0

Решение

Проверим, что заданные плоскости не параллельны, то есть их нормальные векторы неколлинеарны.

Действительно, $\overline{N_1}$ (2, -1, 1) и $\overline{N_2}$ (3, 1, -1) - неколлинеарные векторы (их координаты не пропорциональны)

Прямая l, как линия пересечения P_1 и P2 будет перпендикулярна $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$, поэтому направляющий вектор $\bar{S}$ прямой l равен:

$$\bar{S} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0i + 5j + 5k.$$

Итак, $\bar{S}$ (0,5,5) Из общего уравнения прямой l: $\left.\begin{matrix} 2x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{matrix}\right\}$

найдем любую точку, принадлежащую данной прямой Пусть z = 0, тогда, решая систему

$$\left.\begin{matrix} 2x - y + 3 = 0 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

находим x=-1; y= 1 Итак, точка M(-1, 1, 0) принадлежит прямой l. Каноническое уравнение прямой имеет вид

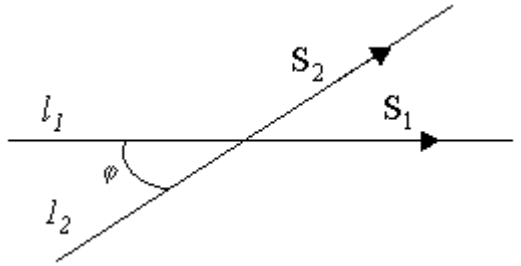
$$\frac{x + 1}{0} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z - 0}{5};$$

параметрические уравнения заданной прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5t + 1 \\ z = 5t \end{cases}$$

Угол между двумя прямыми в пространстве

Углом между двумя прямыми l_1 и l_2 называют любой из двух смежных углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным.



Один из двух смежных углов между прямыми l_1 и 1_2 равен углу между направляющими векторами $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$, тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1}, \overline{S_2}}{|\overline{S_1}| \cdot |\overline{S_2}|}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

В частности, если $l_1 \perp l_2$, то $\overline{S_1} \perp \overline{S_2}$, тогда $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$, если $l_1 \parallel l_2$, то $\overline{S_1} \parallel \overline{S_2}$, тогда: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

Расстояние между прямыми в пространстве

Рассмотрим две прямые l_1 и l_2 , возможны три различных случая расположения этих прямых

1) прямые пересекаются, $l_1 \cap l_2$, следовательно, они лежат в одной плоскости Уравнения прямых

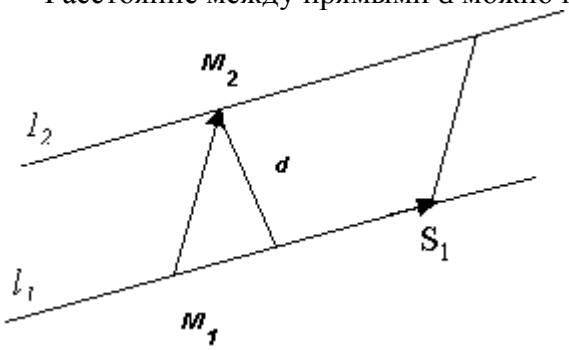
$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \text{где} \qquad M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \text{где} \qquad M_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2$$

Векторы $\overline{S_1}, \overline{S_2}$ и $\overline{M_1M_2}$, - компланарны, тогда их смешанное произведение $\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} \cdot \overline{M_1M_2}$, где $\overline{M_1M_2}$ =(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)и расстояние между прямыми d=0.

2) Прямые параллельны, $l_1 \parallel l_2$, тогда $\overline{S_1} = \lambda \overline{S_2}$

Расстояние между прямыми d можно найти, используя определение векторного произведения.

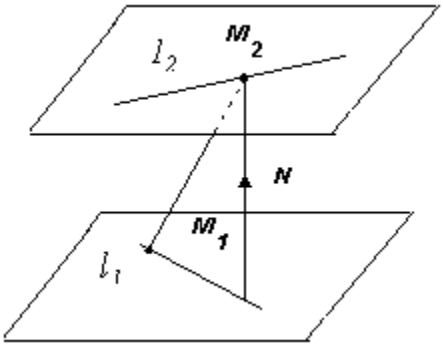


Модуль векторного произведения $|\overline{M_1M_2} \times \overline{S_1}|$ - это площадь параллелограмма, тогда высота d параллелограмма равна

$$d = \frac{|\overline{M_1M_2} \times \overline{S_1}|}{|\overline{S_1}|}$$

3) Прямые скрещивающиеся, они не лежат в одной плоскости, тогда искомое расстояние d определяется длиной общего перпендикуляра к этим прямым, то есть это расстояние между параллельными плоскостями, проходящими через прямые l_1 и l_2.

$$d = np_{\overline{N}}\overline{M_1M_2}$$



Очевидно, что нормальный вектор к плоскостям есть $\overline{N} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$. Тогда скалярное произведение:

$$(\overline{M_1M_2}, \overline{N}) = |\overline{M_1M_2}| \cdot |\overline{N}| \cdot \cos(\overline{M_1M_2}, \overline{N}) = |\overline{N}| \, np_{\overline{N}}\overline{M_1M_2} = |\overline{N}| \cdot d$$

$$d = \frac{(\overline{M_1M_2}, \overline{N})}{|\overline{N}|}, \text{или} \qquad d = \frac{|\overline{M_1M_2}, \overline{S_1} \times \overline{S_2}|}{|\overline{N}|}$$

$$d = \frac{|\overline{M_1M_2}, \overline{S_1} \times \overline{S_2}|}{|\overline{S_1} \times \overline{S_2}|},$$

где в числителе стоит модуль смешанного произведения, или объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}$, $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$, в знаменателе - модуль векторного произведения, то есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$. Расстояние d совпадает с высотой данного параллелепипеда.

Угол между прямой и плоскостью

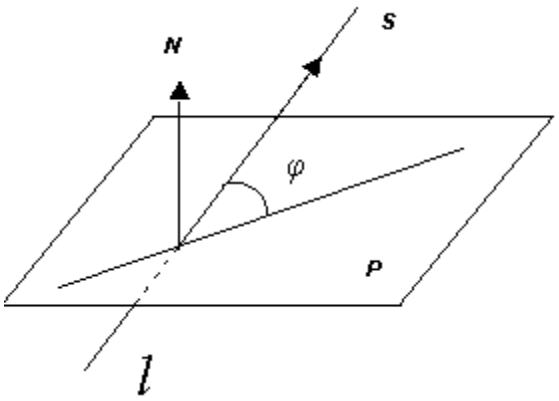
Углом φ между прямой и плоскостью будем называть любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

Рассмотрим плоскость

p: Ax + By + Cz + D = 0,

где $\overline{N}$ (A, B, C) - нормальный вектор плоскости;

$\overline{S}$ (m, и, p) - направляющий вектор прямой l.



Пусть a - угол между векторами $\overline{N}$ и $\overline{S}$, тогда a = 90- φ, следовательно: cosa=cos(90 - φ) =sina.

Из определения скалярного произведения: $\cos a = \frac{(\overline{N}, \overline{S})}{|\overline{N}| \cdot |\overline{S}|}$

или $\sin \varphi = \frac{(\overline{N}, \overline{S})}{|\overline{N}| \cdot |\overline{S}|}$

или $\sin\varphi = \dfrac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + p^2}}$.

В частности,

если l||p, то $\overline{S} \perp \overline{N}$ тогда Ат+Вп+Ср=0,

если l $\perp$ p, то $\overline{S} \parallel \overline{N}$, тогда $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

Пример

Найти угол между прямыми l: y- 2x + 5 = 0 и l_2: 2y+x+3=0

Решение

$\overline{N_1}(1,-2) \perp l_1$,

$\overline{N_2}(2,1) \perp l_2$, *тогда*

$$\cos(\overline{N_1}, \overline{N_2}) = \frac{(\overline{N_1}, \overline{N_2})}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|} = \frac{1 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{\sqrt{1 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = 0$$

Следовательно, $\overline{N_1} \perp \overline{N_2}$, то есть прямые перпендикулярны.

Пример

Найти точку пересечения прямой

$$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{1}$$

с плоскостью p: x+2y+z - 4=0.

Решение

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5t + 1 \\ z = 5t \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости P, получим

2t+1+2(t-5)+t+3-4=0, 5t=10 или t=2, тогда x =5, y=-3, z=5.

Точка M (5, -3, 5) является точкой пересечения прямой l с плоскостью P.

Пример

Лежит ли прямая $l : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{1}$

в плоскости P: x-y-z-3=0.

Решение

Поступаем так же, как в предыдущей задаче,

получим 2t+ 1 --(t-5)-(t+3)-3=0,

2t-t-t+1+5-3-3=0;

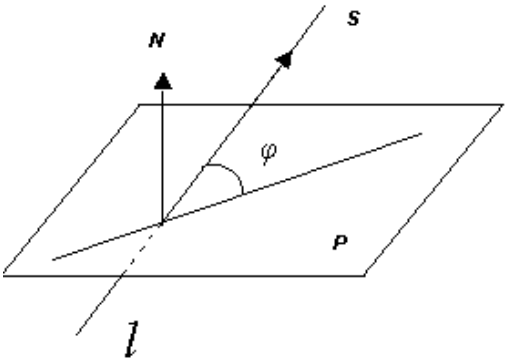
0t = 0, получили тождество, то есть при любом t мы получим все точки прямой l, следовательно, прямая l принадлежит плоскости

Пример

Найти угол между прямой $l : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-3}{1}$

и плоскостью P: x + 2y + z - 4 = 0.

Решение.



Вектор $\overline{S}(2,1,1) \parallel l$.

Вектор $\overline{N}(1,2,1) \perp P$, тогда

$$\sin\varphi = \cos(\overline{N},\overline{S}) = \frac{(\overline{N},\overline{S})}{|\overline{N}|\cdot|\overline{S}|} = \frac{2\cdot1+1\cdot2+1\cdot1}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+4+1}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{5}{6};$$

тогда $a = \arcsin\frac{5}{6}$

Пример

Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x-3y+z+2=0, \\ x-2y+3z+3=0. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ x=2y-3z-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ 3y-z-2=2y-3z-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ 3y-z-2-2y+3z+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ y+2z+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3y-z-2 \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3\cdot(-2z-1)-z-2 \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=(-6z-3)-z-2 \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-7z-5 \\ y=-2z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+5}{-7}=z \\ \frac{y+1}{-2}=z \end{cases}$$

$$\frac{x+5}{-7} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$

Раздел 4. Приложения матричного анализа в геометрии

Тема 6. Квадратичные формы

Квадратичная форма имеет вид:

$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ так как $a_{12} = a_{21}$.

Если линейное преобразование A в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ имеет матрицу: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, то характеристическими числами линейного преобразования A служат действительные корни λ_1 и λ_2 уравнение второй степени, которое можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для нахождения собственных значений λ_1 и λ_2, решается полученное уравнение: $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 = 0$, где λ_1 и λ_2 могут быть равными[1].

Если числа λ_1 и λ_2 одного знака, то квадратичная форма принадлежит к эллиптическому типу; если λ_1 и λ_2 разных знаков, то гиперболическому типу; если же одно из чисел λ_1 или λ_2 равно нулю, то параболическому типу[4].

Для получения собственных векторов получаются две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0 \\ a_{12}m_1 + (a_{22} - \lambda_1)n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)m_2 + a_{12}n_2 = 0 \\ a_{12}m_2 + (a_{22} - \lambda_2)n_2 = 0 \end{cases},$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 - координаты собственных векторов.

Затем можно найти координаты векторов нового базиса $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, для этого необходимо найти длины собственных векторов по формуле $\left|\vec{u}_i\right| = \sqrt{m_i^2 + n_i^2}$, следовательно $\vec{e}_1 = \left(\frac{m_1}{\left|\vec{u}_1\right|}; \frac{n_1}{\left|\vec{u}_1\right|}\right)$;

$\vec{e}_2 = \left(\frac{m_2}{\left|\vec{u}_2\right|}; \frac{n_2}{\left|\vec{u}_2\right|}\right)$, где u_1, u_2 - собственные векторы. Следовательно, получается уравнение второго порядка в каноническом виде: $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 = c, \Rightarrow \frac{\lambda_1}{c^2} + \frac{\lambda_2}{c^2} = 1$.

А также необходимо отметить следующие важные теоремы:

Теорема 1. Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Теорема 2. Если матрица A линейного преобразования является симметрической, то все корни характеристического $\left|A - \lambda E\right| = 0$ - действительные числа, где E - тождественный оператор[1].

Положительно определенные формы

Квадратичная форма f и n неизвестных с действительными коэффициентами называется положительно определенной, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов, то есть если и ранг, и положительный индекс инерции этой формы равны числу неизвестных[7].

Теорема. Квадратичная форма f от n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, если при всяких действительных значениях этих неизвестных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, эта форма получает положительные значения.

Пусть дана квадратичная форма f от n неизвестных с матрицей $A = (a_{ij})$. Миноры порядка $1,2,\ldots, n$ этой матрицы, расположенные в ее левом углу, то есть миноры $a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$, из которых последний совпадает с определителем матрицы A, называются главными минорами формы f.

Теорема. Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, если все главные миноры строго положительны.

Доказательство. При $n = 1$ теорема верна, так как форма имеет в этом случае вид ax^2 и поэтому она положительно определенная тогда и только тогда, когда $a > 0$. Поэтому необходимо доказывать теорему для случая n неизвестных, предполагая, что для квадратичных форм от $n-1$ неизвестных она уже доказана.

После преобразования получается квадратичная форма с матрицей $Q^{/}AQ$, однако, ввиду $\left|Q^{/}\right| = \left|Q\right|$, $\left|Q^{/}AQ\right| = \left|Q^{/}\right| \cdot \left|A\right| \cdot \left|Q\right| = \left|A\right| \cdot \left|Q\right|^2$, то есть определитель $\left|A\right|$ умножается на положительное число.

Пусть дана квадратичная форма $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Ее можно записать в виде

$$f = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i x_n + a_{nn} x_n^2, \qquad (4.3)$$

где φ будет квадратичной формой от $n-1$ неизвестных, составленной из тех членов формы f, в которые не входит неизвестное x_n. Главные миноры формы φ совпадают, очевидно, со всеми, кроме последнего, главными минорами формы f.

Форма φ также будет положительно определенной: если бы существовали такие значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, не все равны нулю, при которых форма φ получает не строго положительное значение, то полагая дополнительно $x_n = 0$, то получилось бы (4.3), также не строго положительное значение формы f, хотя не все значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ равны нулю. Поэтому, по индуктивному предложению, все главные миноры формы f, кроме последнего, строго положительны. Что же касается последнего главного минора формы f, то есть определителя самой матрицы A, то его положительность вытекает из следующих соображений: форма f, которая положительно определенная с линейным невырожденным преобразованием приводится к нормальному виду, состоящей из n положительных квадратов. Определитель этого нормального вида строго положителен.

Пусть строго положительны главные миноры формы f. Отсюда вытекает положительность всех главных миноров φ, то есть, по индуктивному, предположению, положительная определенность этой формы. Следовательно, существует, такое невырожденное линейное преобразование неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, которое приводит форму φ к виду суммы $n-1$ положительных квадратов от новых неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, то линейное преобразование можно дополнить до невырожденного линейного преобразования всех неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полагая $x_n = y_n$. Ввиду (4.3) форма f приводится к указанным преобразованием к виду:

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-`} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2; \qquad (4.4)$$

точные выражения коэффициентов b_{in} несущественны. Так как $y_i^2 + 2b_{in}y_iy_n = (y_i + b_{in}y_n)^2 - b_{in}^2y_n^2$, то невырожденное линейное преобразование $z_i = y_i + b_{in}y_n, i = 1,2,..., n-1; z_n = y_n$ приводит форму f к каноническому виду

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + cz_n^2 . \qquad (4.5)$$

Для доказательства положительной определенности формы f необходимо доказать положительность числа c. Определитель формы, стоящий в правой части равенства (4.5), равен c. Этот определитель должен быть положительным, так как правая часть равенства (4.5) получена из формы f двумя невырожденными линейными преобразованиями, а определитель формы f был последний из главных миноров этой формы, положительным. Теорема доказана [3] .

Пример

Написать матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Решение. Здесь

$$a_{11} = 2, a_{22} = -5, a_{33} = 8, a_{12} = a_{21} = \frac{4}{2} = 2, a_{13} = a_{31} = \frac{-2}{2} = -1, a_{23} = a_{32} = \frac{6}{2} = 3$$

Следовательно: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Пример

Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$.

Решение. Коэффициенты: $a_{11} = 27, a_{12} = -5, a_{22} = 3$.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$;

$(27-\lambda)(3-\lambda) - 25 = 0$

$\lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0$

$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 28;$

$f(x_1', x_2') = 2x_1'^2 + 28x_2'^2$

Пример

Является ли квадратичная форма положительно определенной $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ [4]?

Решение. $a_{11} = 5, a_{22} = 1, a_{33} = 5, a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = -4, a_{23} = a_{32} = -2$.

$5, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1$. Квадратичная форма является положительно определенной, так как все ее главные миноры положительны.

Пример

Является ли квадратичная форма положительно определенной $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$?

Решение. $a_{11} = 3, a_{22} = 1, a_{33} = 5, a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = -4, a_{23} = a_{32} = -2$.

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Квадратичная форма не является положительно определенной, так как ее главный минор отрицателен.

Задание № 18. Является ли квадратичная форма положительно определенной $f = x_1^2 + 8x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 10x_2x_3$ [4]?

Решение. $a_{11} = 1, a_{22} = 8, a_{33} = -6, a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = 4, a_{23} = a_{32} = -5$.

$1, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -257$. Квадратичная форма является не положительно определенной, так как не все ее главные миноры положительны.

Тема 7. Кривые второго порядка

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=O$, называется кривой второго порядка, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля

Если A = B = C = 0, то получим уравнение первого порядка, которое определяет прямую на плоскости

Если данному уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости, то имеем так называемую мнимую кривую, например, $x^2+ y^2 = -1$ есть уравнение мнимой окружности.

В общем случае может оказаться, что уравнение определяет вырожденную кривую - либо пустое множество, либо точку, либо прямую, либо пару прямых (приведите примеры).

В дальнейшем рассмотрим только невырожденные кривые. Можно показать, что для таких кривых существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

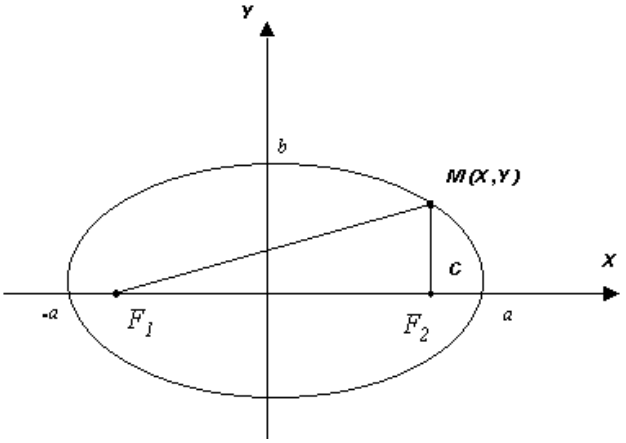
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = 2px;$$

$$(a > 0, b > 0, p > 0).$$

Эти уравнения называются каноническими уравнениями соответственно эллипса, гиперболы и параболы.

Эллипс, его каноническое уравнение



Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных есть величина постоянная.

Пусть M(x,y) - произвольная (текущая) точка кривой, F_1 и F_2 -заданные точки. По условию:

$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = const .$$

Пусть

$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a;$

$|F_1F_2| = 2c,$ тогда $F_1(-c;0)$; $F_2(c,0)$

Так как $\overline{F_1M}(x+c, y)$ и $\overline{F_2M}(x-c, y)$, то

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Выполним преобразования:

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$x + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Обозначим:

$a^2 - c^2 = b^2$ ($a > b$, почему ?), тогда $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

или $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, получили каноническое уравнение эллипса

Параметры a и b называются полуосями (большой и малой) эллипса, начало координат - центром кривой. Точки F_1 (-c, 0) и F_2 (c, 0) называются фокусами эллипса, где $c^2 = a^2 - b^2$.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $(0 \le \varepsilon < 1)$ или $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ называется эксцентриситетам эллипса, оно характеризует «сплюснутость» кривой.

В частности, при ε=0, (a=b), имеем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$

или $x^2+y^2=a^2$ - каноническое уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат (фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром).

Гипербола, её каноническое уравнение

Гиперболой называется множество точек, абсолютное значение разности расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная (отличная от нуля).

По условию

$$\| \overline{F_1M} | - | \overline{F_2M} \| = 2a$$

или

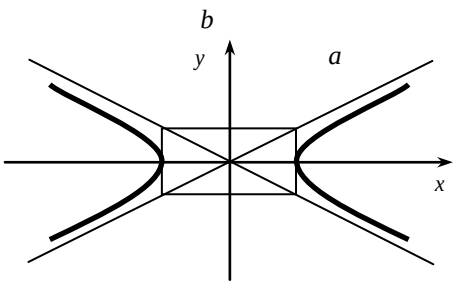
$$| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} | = 2a$$

Выполнив преобразования (сделайте самостоятельно), обозначив $a^2+b^2=c^2$, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

где a и b называются полуосями гиперболы, точки (a, 0) и (-a, 0) - ее вершинами, оси симметрии OX и OY - соответственно действительной и мнимой осями, точки F_1 (-c, 0) и F_2(c, 0) -фокусами гиперболы.

Число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad (1 < \varepsilon < +\infty)$ называется эксцентриситетом гиперболы.

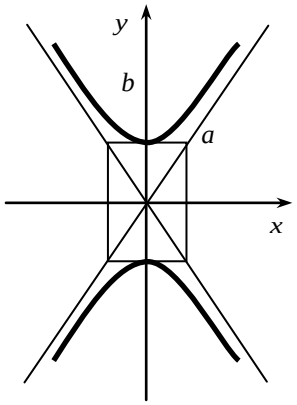


Прямые (диагонали прямоугольника в центре), уравнения которых

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$,

являются асимптотами гиперболы.

Гиперболу, каноническое уравнение которой $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ называют сопряженной, график ее имеет следующий вид:



Парабола, её каноническое уравнение

Параболой называется множество точек, равноотстоящих от заданной точки, называемой фокусом, и от заданной прямой, называемой директрисой.

Пусть M(x,y) - текущая точка кривой, $F(\frac{p}{2};0)$ - заданная точка, фокус;

уравнение заданной прямой (директрисы)

$$x = -p/2$$

$|\overline{KM}|$ - расстояние от точки M до директрисы, оно равно

$$|\overline{KM}| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = |x + \frac{p}{2}|$$

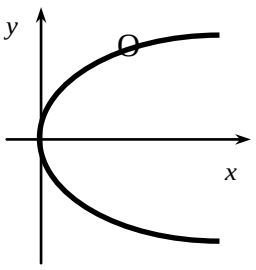
По условию $|\overline{KM}| = |\overline{MF}|$ или $\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$.

Выполним преобразования: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$;

$$x^2 + xp + \frac{p^2}{4} = x^2 - xp + \frac{p^2}{2} + y^2,$$

окончательно каноническое уравнение параболы:

$$y^2=2xp$$



Число P называется параметром параболы; точка O(0;0) -вершина параболы;
ось OX - ось симметрии параболы;

прямая $x = -p/2$ - директриса параболы, проходит на расстоянии $p/2$ от вершины параболы.

Пример

Определить вид кривой, найти ее центр, фокусы и эксцентриситет

$x^2-4x+4y^2=0$.

Решение:

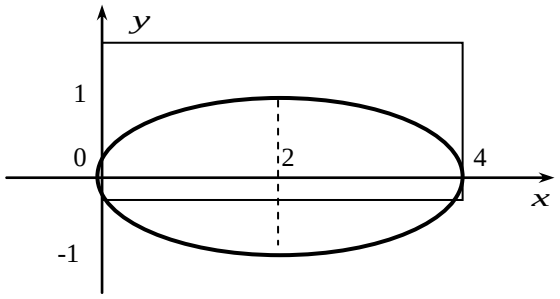
Найдем каноническое уравнение кривой, для этого сделаем преобразования:

$x^2-4x+4-4+4y^2=0$

$(x-2)^2+4y^2=4$

Окончательно $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$.

Полученное уравнение есть каноническое уравнение эллипса, где a=2; b=1; центр эллипса в точке (2,0).



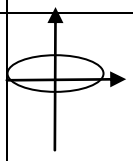
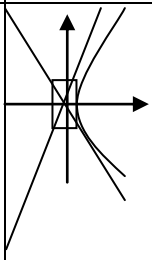
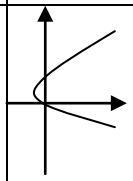
Найдем фокусы, для этого вычислим параметр с:

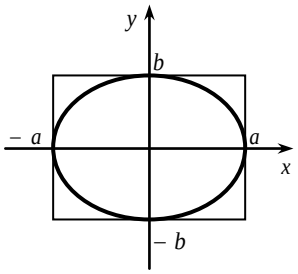
$c^2=a^2-b^2$

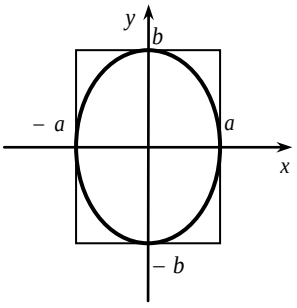
$c=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

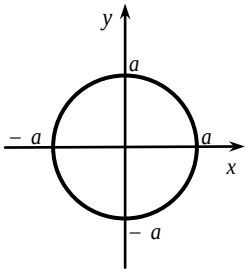
тогда: $F_1(2-\sqrt{3};0)$; $F_2(2+\sqrt{3};10)$;

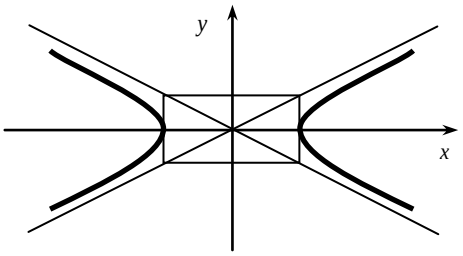
эксцентриситет эллипса - $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

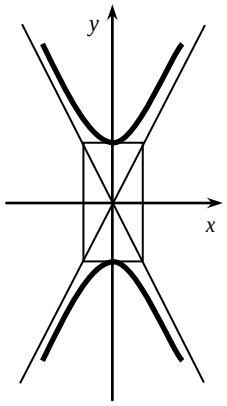
Название кривой	Каноническое уравнение	Параметрическое уравнение	Чертеж
Окружность	$x^2+y^2=R^2$ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$	$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$	
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$	
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x=acht \\ y=bsht \end{cases}$ $\begin{cases} x=a\frac{e^t+e^{-t}}{2} \\ y=b\frac{e^t-e^{-t}}{2} \end{cases}$	
Парабола	$x^2=2qy$ $x^2=-2qy$ $y^2=2px$ $y^2=-2px$	$\begin{cases} x= \\ y= \end{cases}$	

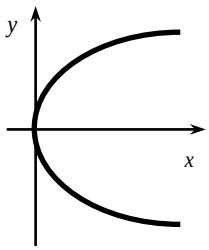
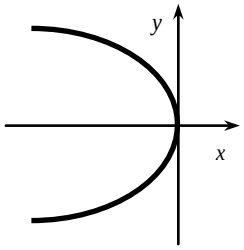
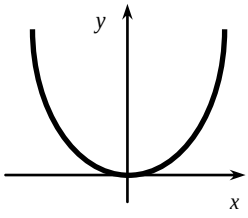
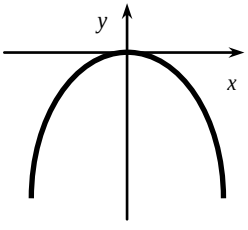
<table>
<tr><td>Названи
е кривой</td><td colspan="4">Каноническое уравнение и чертёж</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Эллипс</td><td colspan="4">$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a,b>0$</td></tr>
<tr><td> 

$a > b$</td><td> 

$b > a$</td><td colspan="2"> 

$a = b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Гипербола</td><td colspan="2">$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,</td><td>$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$,</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"> 

Ox – действительная ось</td><td> 

Oy – действительная ось</td><td>$y=\pm\frac{b}{a}x$ -- уравнение асимптот</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Парабола</td><td>$y^2=2px$</td><td>$y^2=-2px$</td><td>$x^2=2py$</td><td>$x^2=-2py$</td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td><td> 
</td><td> 
</td></tr>
</table>

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $17x^2+12xy+8y^2-20=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 17, a_{12} = 6, a_{22} = 8.$ $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(17-\lambda)(8-\lambda) - 36 = 0$

$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0$

$\lambda_1 = 5; \lambda_2 = 20$

Итого: $5(x')^2 + 20(y')^2 - 20 = 0;$

$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$ - каноническое уравнение эллипса.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 20 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 2, a_{12} = 4, a_{22} = 8.$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(2-\lambda)(8-\lambda) - 16 = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 10$

Итого: $10(y')^2 - 20 = 0;$

$\frac{y'^2}{2} = 1$ - каноническое уравнение параболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 - 21 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 6, a_{12} = \sqrt{5}, a_{22} = 2.$ $A = \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 6-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(6-\lambda)(2-\lambda) - 5 = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$

$\lambda_1 = \frac{7}{6}; \lambda_2 = \frac{1}{6}$

Итого: $\frac{7}{6}(x')^2 + \frac{1}{6}(y')^2 - 21 = 0;$

$\frac{x'^2}{18} + \frac{y'^2}{126} = 1$ - каноническое уравнение эллипса.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $22x^2 + 2\sqrt{69}xy + 2y^2 - 4 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 22, a_{12} = \sqrt{69}, a_{22} = 2.$ $A = \begin{pmatrix} 22 & \sqrt{69} \\ \sqrt{69} & 2 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 22-\lambda & \sqrt{69} \\ \sqrt{69} & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(22-\lambda)(2-\lambda)-69=0$

$\lambda^2-24\lambda-25=0$

$\lambda_1=\frac{49}{2};\lambda_2=-\frac{1}{2}$

Итого: $\frac{49}{2}(x')^2-\frac{1}{2}(y')^2-4=0;$

$\frac{49\,x'^2}{8}-\frac{y'^2}{8}=1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $2x^2+6xy+2y^2+5=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=2,a_{12}=3,a_{22}=2.$ $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(2-\lambda)(2-\lambda)-9=0$

$\lambda^2-4\lambda-5=0$

$\lambda_1=-1;\lambda_2=5$

Итого: $-(x')^2+5(y')^2+5=0;$

$\frac{x'^2}{5}-\frac{y'^2}{1}=1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $3x^2+16xy+15y^2+76=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=3,a_{12}=8,a_{22}=15.$ $A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}3-\lambda & 8\\ 8 & 15-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(3-\lambda)(15-\lambda)-64=0$

$\lambda^2-18\lambda-19=0$

$\lambda_1=-1;\lambda_2=19$

Итого: $-(x')^2+19(y')^2+76=0;$

$\frac{x'^2}{76}-\frac{y'^2}{4}=1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $5x^2-12xy-14=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=5,a_{12}=-6,a_{22}=0.$ $A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ -6 & 0\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}5-\lambda & -6\\ -6 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0$

$-\lambda(5-\lambda)-36=0$

$\lambda^2-5\lambda-36=0$

$\lambda_1=9;\lambda_2=-4$

Итого: $9(x')^2-4(y')^2-14=0;$

$\frac{9x'^2}{14} - \frac{2y'^2}{7} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $x^2 + 24xy + 8y^2 - 136 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 1, a_{12} = 12, a_{22} = 8$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 12 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(8-\lambda) - 144 = 0$

$\lambda^2 - 9\lambda - 136 = 0$

$\lambda_1 = 17; \lambda_2 = -8$

Итого: $17(x')^2 - 8(y')^2 - 136 = 0;$

$\frac{x'^2}{8} - \frac{y'^2}{17} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $4xy + 3y^2 + 16 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{22} = 3$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-\lambda(3-\lambda) - 4 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 4$

Итого: $-(x')^2 + 4(y')^2 + 16 = 0;$

$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 8 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 3, a_{12} = 5, a_{22} = 3$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(3-\lambda)(3-\lambda) - 25 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$

$\lambda_1 = 8; \lambda_2 = -2$

Итого: $8(x')^2 - 2(y')^2 - 8 = 0;$

$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 - 44 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 5, a_{12} = 2\sqrt{6}, a_{22} = 7$. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(5-\lambda)(7-\lambda) - 24 = 0$

$\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$

$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 11$

Итого: $(x')^2 + 11(y')^2 - 44 = 0;$

$\frac{x'^2}{44} + \frac{y'^2}{4} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $4xy + 3y^2 + 16$.

Решение. Коэффициенты: $a_{11} = 0, a_{12} = a_{21} = 2, a_{22} 3$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$;

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$.

Итого: $-x^2 + 4y^2 + 16 = 0$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Пример

Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Схематично изобразить график $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение квадратичной формы. Коэффициенты $a_{11} = 5, a_{12} = \sqrt{3}, a_{22} = 3$.

$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12$

$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$

$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 6$

Найдем координаты собственных векторов:

$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0 \\ a_{12}m_1 + (a_{22}-\lambda_1)n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m_1 + \sqrt{3}n_1 = 0 \\ \sqrt{3}m_1 + n_1 = 0 \end{cases}$,полагая что $m_1 = 1$, тогда $n_1 = -\sqrt{3}$;

$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_2)m_2 + a_{12}n_2 = 0 \\ a_{12}m_2 + (a_{22}-\lambda_2)n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_2 + \sqrt{3}n_2 = 0 \\ \sqrt{3}m_2 - 3n_2 = 0 \end{cases}$,полагая что $m_2 = 1$, тогда $n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Собственные векторы: $\vec{u}_1(1; -\sqrt{3}), \vec{u}_2(1; \frac{1}{\sqrt{3}})$

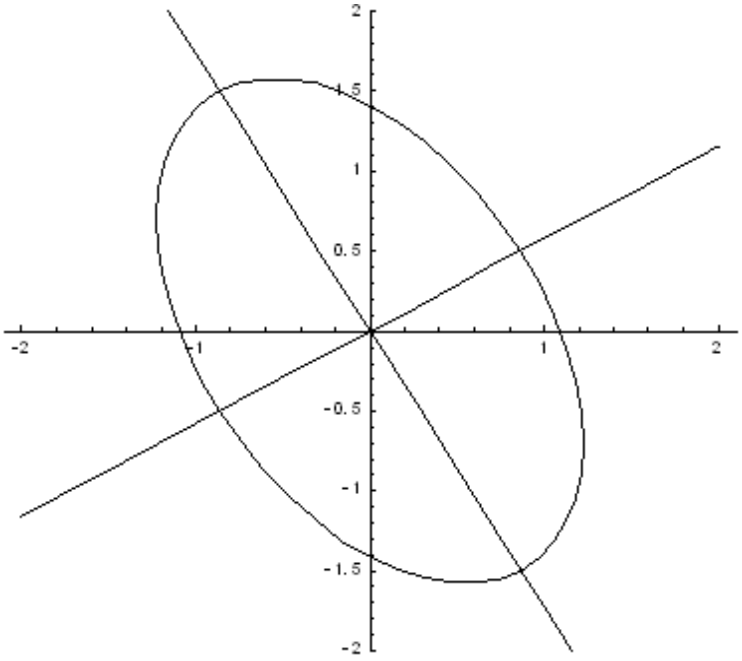
$\left|\vec{u_1}\right| = \sqrt{1+3} = 2; \left|\vec{u_2}\right| = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Находим координаты единичных векторов нового базиса

$\vec{e_1} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \vec{e_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Имеем следующее уравнение линии в новой системе координат: $2(x')^2 + 6(y')^2 = 6$.

Каноническое уравнение линии в новой системе координат будет иметь вид: $\frac{(x')^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{(y')^2}{1^2}=1$.

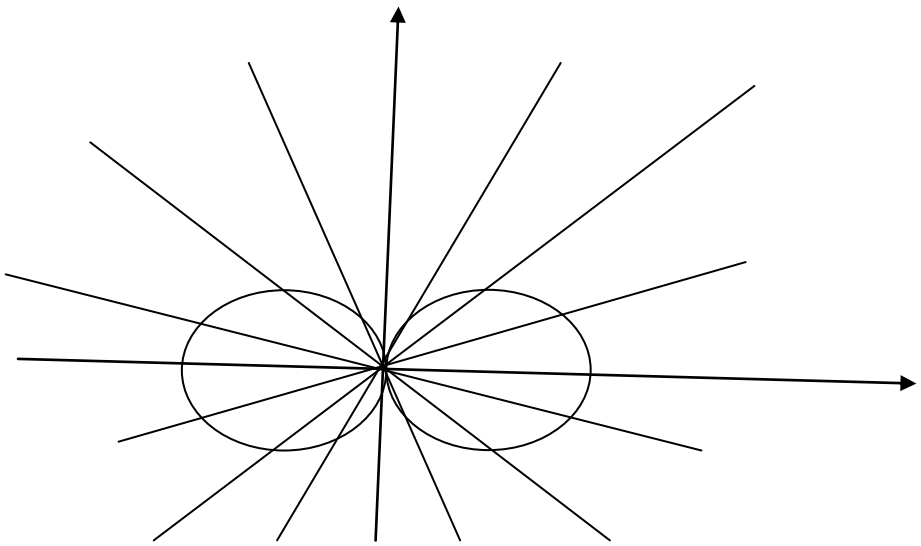


Пример

Построить кривую □ = 3(1–cos2□), заданную в полярных координатах.

□	0	п/8	п/4	3п/8	п/2	5п/8	3п/4	7п/8	п
□	4	3,4	2	0,6	0	0,6	2	3,4	4

□	9п/8	5п/4	11п/8	3п/2	13п/8	7п/4	15п/8	2п
□	3,4	2	0,6	0	0,6	2	3,4	4



Пример

Вывести уравнение кривой, если абсолютная величина разности расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-7;0)$ и $F_2(13;0)$ есть величина постоянная и равна p=16. Сделать чертеж.

Пусть M(x;y)- произвольная точка кривой

$$\left|\overline{MF_1}\right| = \sqrt{(-7-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(7+x)^2 + y^2}$$

$$\left|\overline{MF_2}\right| = \sqrt{(13-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(13-x)^2 + y^2}$$

$$\left|\overline{MF_1}\right| - \left|\overline{MF_2}\right| = 16$$

$$\sqrt{(7+x)^2 + y^2} - \sqrt{(13-x)^2 + y^2} = 16$$

$$\sqrt{(7+x)^2 + y^2} = \sqrt{(13-x)^2 + y^2} + 16$$

$$\left(\sqrt{(7+x)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(13-x)^2 + y^2} + 16\right)^2$$

$$(7+x)^2 + y^2 = \left(\sqrt{(13-x)^2 + y^2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{(13-x)^2 + y^2}\cdot 16 + 16^2$$

$$(7+x)^2 + y^2 = (13-x)^2 + y^2 + 32\cdot\sqrt{(13-x)^2 + y^2} + 256$$

$$49 + 14x + x^2 + y^2 = 169 - 26x + x^2 + y^2 + 32\cdot\sqrt{(13-x)^2 + y^2} + 256$$

$$-376 + 40x = 32\cdot\sqrt{(13-x)^2 + y^2}$$

$$-47 + 5x = 4\cdot\sqrt{(13-x)^2 + y^2}$$

$$(-47 + 5x)^2 = \left(4\cdot\sqrt{(13-x)^2 + y^2}\right)^2$$

$$2209 - 470x + 25x^2 = 16\left((13-x)^2 + y^2\right)$$

$$2209 - 470x + 25x^2 = 2704 - 416x + 16x^2 + 16y^2$$

$$9x^2 - 54x - 16y^2 = 495$$

$$9\left(x^2 - 6x\right) - 16y^2 = 495$$

$$9\left(x^2 - 6x + 9 - 9\right) - 16y^2 = 495$$

$$9(x-3)^2 - 81 - 16y^2 = 495$$

$$9(x-3)^2 - 16y^2 = 276$$

$$\frac{9(x-3)^2 - 16y^2}{576} = \frac{276}{576}$$

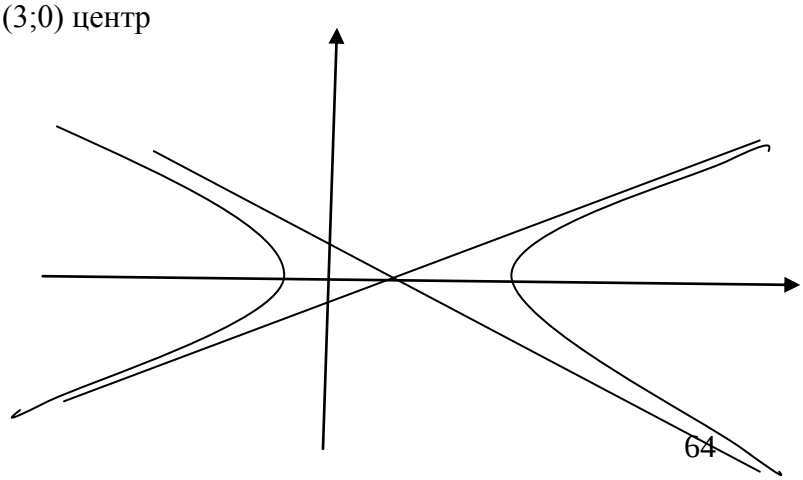
$$\frac{(x-3)^2}{64} \frac{y^2}{36} = 1$$

Гипербола

$$a = \sqrt{64} = 8$$

$$b = \sqrt{36} = 6$$

(3;0) центр



Пример

Привести уравнение $36x^2+49y^2+72x-196y-1442=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Решение:

$$36\ x^2 + 49\ y^2 + 72\ x - 196\ y - 1442 = 0$$

$$(36\ x^2 + +72\ x) + (49\ y^2 - 196\ y) - 1442 = 0$$

$$36 \cdot (x^2 + 2x) + 49 \cdot (y^2 - 4y) - 1442 = 0$$

$$36 \cdot (x^2 + 2x + 1 - 1) + 49 \cdot (y^2 - 4y + 4 - 4) - 1442 = 0$$

$$36 \cdot ((x^2 + 2x + 1) - 1) + 49 \cdot ((y^2 - 4y + 4) - 4) - 1442 = 0$$

$$36 \cdot ((x+1)^2 - 1) + 49 \cdot ((y-2)^2 - 4) - 1442 = 0$$

$$36 \cdot (x+1)^2 - 36 + 49 \cdot (y-2)^2 - 196 - 1442 = 0$$

$$36 \cdot (x+1)^2 + 49 \cdot (y-2)^2 - 1674 = 0$$

$$36 \cdot (x+1)^2 + 49 \cdot (y-2)^2 = 1674$$

$$\frac{36 \cdot (x+1)^2}{1674} + \frac{49 \cdot (y-2)^2}{1674} = \frac{1674}{1674}$$

$$\frac{(x+1)^2}{46\ .5} + \frac{(y-2)^2}{34\ .16} = 1$$

Эллипс, (-1;2) центр эллипса

$$a = \sqrt{46\ .5}$$

$$b = \sqrt{34\ .16}$$

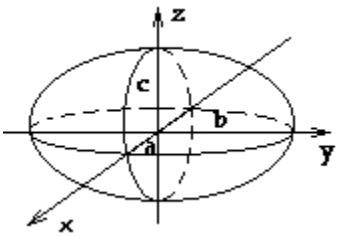
Тема 8. Поверхности второго порядка

Поверхность второго порядка—геометрическое место точек трёхмерного пространства, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13} отличен от нуля.

Эллипсоид



Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (1)

Уравнение (1) называется каноническим уравнением эллипсоида.

Установим геометрический вид эллипсоида. Для этого рассмотрим сечения данного эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида z=h, где h – любое число, а линия, которая получается в сечении, определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \quad (2)$$

Исследуем уравнения (2) при различных значениях h.

1. Если $|h|>c$ (c>0), то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$ и уравнения (2) определяют мнимый эллипс, т. е. точек пересечения плоскости z=h с данным эллипсоидом не существует.

2. Если $h=\pm c$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ и линия (2) вырождается в точки (0; 0; + c) и (0; 0; - c) (плоскости $z=\pm c$ касаются эллипсоида).

3. Если $|h|>c$

, то уравнения (2) можно представить в виде

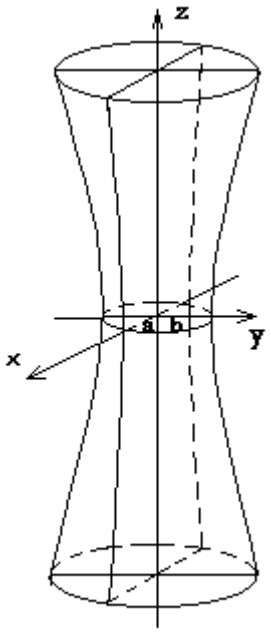
$a^*=a$

откуда следует, что плоскость z=h пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями $a^*=a\sqrt{1-h^2/c^2}$ и $b^*=b\sqrt{1-h^2/c^2}$. При уменьшении $|h|$ значения a^* и b^* увеличиваются и достигают своих наибольших значений при $h=0$, т. е. в сечении эллипсоида координатной плоскостью Oxy получается самый большой эллипс с полуосями $a^*=a$ и $b^*=b$.

Аналогичная картина получается и при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить эллипсоид как замкнутую овальную поверхность (рис. 156). Величины a, b, c называются полуосямиэллипсоида. В случае a=b=c эллипсоид является сферой.

Однополосный гиперболоид



Однополосным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (3)$$

Уравнение (3) называется каноническим уравнением однополосного гиперболоида.

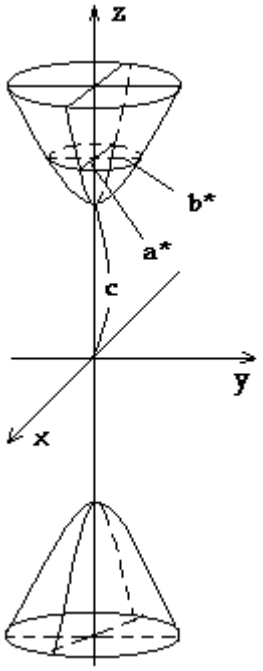
Установим вид поверхности (3). Для этого рассмотрим сечение ее координатными плоскостями Oxy (y=0) и Oyx (x=0). Получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

из которых следует, что в сечениях получаются гиперболы.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями z=h, параллельными координатной плоскости Oxy. Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (4)$$



из которых следует, что плоскость z=h пересекает гиперболоид по эллипсу с полуосями $a^* = a\sqrt{1 + h^2/c^2}$ и $b^* = b\sqrt{1 + h^2/c^2}$,

достигающими своих наименьших значений при h=0, т.е. в сечении данного гиперболоида координатной осью Oxy получается самый маленький эллипс с полуосями a*=a и b*=b. При бесконечном возрастании $|h|$ величины a* и b* возрастают бесконечно.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить однополосный гиперболоид в виде бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся по мере удаления (по обе стороны) от плоскости Oxy. Величины a, b, c называются полуосями однополосного гиперболоида.

Двуполосный гиперболоид

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (5)$$

Уравнение (5) называется каноническим уравнением двуполостного гиперболоида.

Установим геометрический вид поверхности (5). Для этого рассмотрим его сечения координатными плоскостями Oxy и Oyz. Получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

из которых следует, что в сечениях получаются гиперболы.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями z=h, параллельными координатной плоскости Oxy. Линия, полученная в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \\ z=h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1 \\ z=h \end{cases} \qquad (6)$$

из которых следует, что при $|h|>c$ ($c>0$) плоскость z=h пересекает гиперболоид по эллипсу с полуосями $a^*=a\sqrt{h^2/c^2-1}$ и $b^*=b\sqrt{h^2/c^2-1}$. При увеличении $|h|$ величины a* и b* тоже увеличиваются.

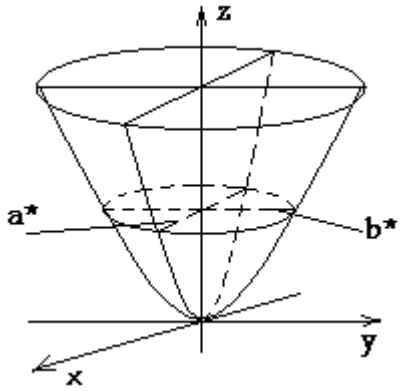
При $h=\pm c$ уравнениям (6) удовлетворяют координаты только двух точек: (0;0;+c) и (0;0;-c) (плоскости $z=\pm c$ касаются данной поверхности).

При $|h|<c$ уравнения (6) определяют мнимый эллипс, т.е. точек пересечения плоскости z=h с данным гиперболоидом не существует.

Величина a, b и c называются полуосями двуполостного гиперболоида.

Эллиптический параболоид

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением



$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z \qquad (7)$$

где p>0 и q>0.

Уравнение (7) называется каноническим уравнением эллиптического параболоида.

Рассмотрим сечения данной поверхности координатными плоскостями Oxy и Oyz. Получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} x^2=2pz \\ y=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y^2=2qz \\ x=0 \end{cases}$$

из которых следует, что в сечениях получаются параболы, симметричные относительно оси Oz, с вершинами в начале координат.

Теперь рассмотрим сечения данного параболоида плоскостями z=h, параллельными координатной плоскости Oxy. Линия, получающаяся в сечении, определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h \\ z=h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1 \\ z=h \end{cases} \qquad (8)$$

из которых следует, что при $h>0$ плоскость z=h пересекает эллиптический параболоид по эллипсу с полуосями $a^*=\sqrt{2hp}$ и $b^*=\sqrt{2hq}$. При увеличении h величины a и b тоже увеличиваются; при h=0 эллипс вырождается в точку (плоскость z=0 касается данного гиперболоида). При h<0 уравнения (8) определяют мнимый эллипс, т.е. точек пересечения плоскости z=h с данным гиперболоидом нет.

Таким образом, рассмотренные сечения позволяют изобразить эллиптический параболоид в виде бесконечно выпуклой чаши.

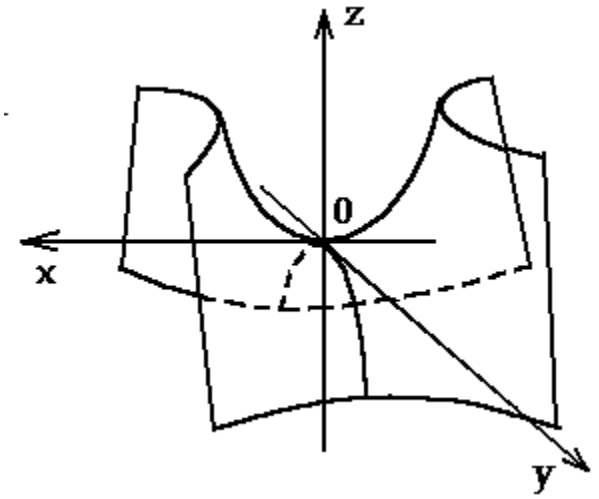
Точка (0;0;0) называется вершиной параболоида; числа p и q – его параметрами.

В случае p=q уравнение (8) определяет окружность с центром на оси Oz, т.е. эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг её оси (параболоид вращения).

Гиперболический параболоид

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат, определяется уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (9)$$



где p>0, q>0.

Уравнение (9) называется каноническим уравнением гиперболического параболоида.

Рассмотрим сечение параболоида плоскостью Oxz (y=0). Получаем уравнение

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

из которых следует, что в сечении получается парабола, направленная вверх, симметричная относительно оси Oz, с вершиной в начале координат. В сечениях поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxz (y=h), получаются так же направленные вверх параболы.

$$\begin{cases} x^2 = 2p(z + \frac{h^2}{2q}) \\ y = h \end{cases}$$

рассмотрим сечение данного параболоида плоскостью Oyz (x=0).

Получаем уравнение

$$\begin{cases} y^2 - 2qz \\ x = 0 \end{cases}$$

из которых следует, что и в этом случае в сечении получается парабола, но теперь направленная вниз, симметричная относительно оси Oz, с вершиной в начале координат. Рассмотрев сечения параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oyz (x=h), получим уравнения

$$\begin{cases} y^2 = -2q(z - \frac{h^2}{2p}) \\ x = h \end{cases}$$

из которых следует, что при любом h в сечении получается парабола, направленная вниз, а вершина её лежит на параболе, определённой уравнениями (10).

Рассмотрим сечения параболоида плоскостями z=h, параллельными плоскости Oxy . получим уравнения

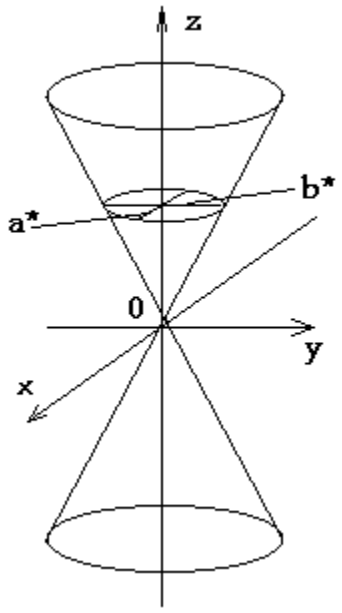
$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases}$$

из которых следует, что при h>0 в сечении получаются гиперболы, пересекающие плоскость Oxy; при h<0 – гиперболы, пересекающие плоскости Oyz; при h=0 – гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

точка (0;0;0) называется вершиной параболоида; числа p и q – его параметрами.
Конус второго порядка

Конусом второго порядка называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (11)$$

Рассмотрим геометрические свойства конуса. В сечение этой поверхности плоскостью Oxy (y=0) получаем линию

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

распадающуюся на две пересекающиеся прямые

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Аналогично, в сечении конуса плоскостью Oyz (x=0) также получаются две пересекающиеся прямые

$$\begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим сечения поверхности плоскостями z=h, параллельными плоскости Oxy. Получим

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1 \\ z=h \end{cases}$$

из которых следует, что при h>0 и h<0 в сечениях получаются эллипсы с полуосями $a^*=\frac{a|h|}{c}, \quad b^*=\frac{b|h|}{c}$. При увеличении абсолютной величины h полуоси a* и b* также увеличиваются.

При h=0 линия пересечения поверхности с плоскостью z=h вырождается в точку (0;0;0).

Пример

Построить поверхности и определить их вид (название).

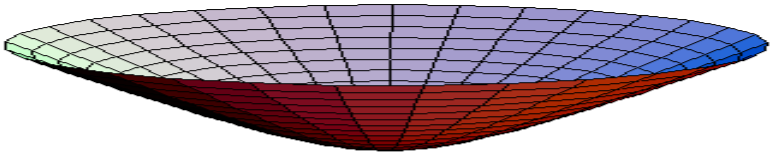
$$2x^2-3y^2-5z^2+30=0$$

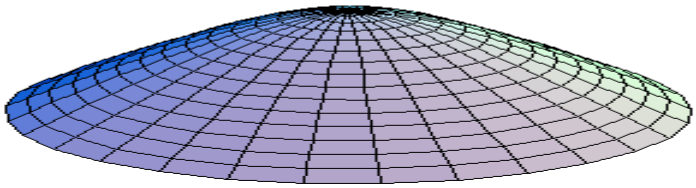
$$2x^2-3y^2-5z^2=-30$$

$$-\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}+\frac{z^2}{6}=1$$

$\frac{y^2}{10}+\frac{z^2}{6}-\frac{x^2}{15}=1$ (двуполостный гиперболоид),

где a и b — мнимые полуоси, а c — действительная полуось.





Раздел 5. Приложения матричного анализа в экономике

Тема 9. Балансовые модели

Хозяйство любой развитой страны насчитывает десятки отраслей и тысячи предприятий. Предприятия соединены множеством различных связей.

Каждая отрасль производит продукцию для производственного потребления (промежуточную) и для потребления населением и накопления (конечную). Поэтому сумма потребления продукции различными отраслями и конечная продукция равна всему производству данной отрасли, т.е. ее валовой продукции.

Пусть наше хозяйство содержит п отраслей. Обозначим через x_i величину валовой продукции i-й отрасли за планируемый период, а через y_i – величину конечного продукта этой отрасли. Кроме того, через x_{ij} обозначим величину продукции i-й отрасли, которая затрачивается на производство продукции j-й отрасли. Теперь можно составить таблицу.

		Потребление							
		1	2	…	j	…	п	Конечный продукт	Вал
Производство	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	y_2	x_2
	⋮	⋮	⋮					⋮	⋮
	i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	y_i	x_i
	⋮								
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	y_n	x_n

Каждый столбец этой таблицы показывает материальные затраты на производство продукции соответствующей отрасли. Полученная таблица представляет собой межотраслевой баланс производства и распределения продукции между отраслями хозяйства.

Очевидно, что сумма промежуточной и конечной продукции каждой отрасли равна ее валовой продукции. Поэтому величины, расположенные в строках приведенной таблицы, связаны следующими балансовыми уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 - (x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n}) = y_1, \\ x_2 - (x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n}) = y_2, \\ \vdots \\ x_n - (x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn}) = y_n. \end{cases} \qquad (32)$$

Введем обозначение: $a_{ik} = \dfrac{x_{ik}}{x_k}$.

Коэффициенты a_{ik} называются коэффициентами прямых затрат и представляют собой затраты продукции i-й отрасли на изготовление единицы продукции к-й отрасли. Величина a_{ik} зависит главным образом от технологии производства в к-й отрасли. Опыт показывает относительную устойчивость большинства коэффициентов прямых затрат на протяжении некоторого отрезка времени (среднего срока освоения и внедрения технологических новшеств). Поэтому мы будем считать, что a_{ik} – постоянные величины в течение планируемого периода.

Подставим значения $x_{ik} = a_{ik}x_к$ во все уравнения системы (32) и получим систему линейных балансовых уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = y_1, \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = y_2, \\ \vdots \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = y_n. \end{cases} \qquad (33)$$

Система уравнений (33) помогает ответить на различные вопросы, связанные с межотраслевым балансом. К примеру, применим ее для нахождения так называемых коэффициентов полных затрат.

Перепишем систему (33) в виде:

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = y_1, \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = y_2, \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - (1-a_{nn}x_n) = y_n. \end{cases} \quad (34)$$

Квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей коэффициентов прямых затрат. Матрица системы (34) получается вычитанием матрицы А из единичной матрицы Е:

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} \ldots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} = E - A.$$

Если ввести матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то систему (34)можно записать в виде матричного уравнения

X(E-A) = У.

Если матрица Е-А невырожденная, то получим

$$X = (E-A)^{-1} У, \quad (35)$$

или в более подробной записи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (36)$$

где через b обозначены элементы матрицы $(E-A)^{-1}$, обратной к матрице (Е-А).

Выясним экономический смысл коэффициентов b_{ij}. Для этого из системы (5) запишем:

$x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

и предположим, что конечный продукт y_j j-й отрасли увеличили на единицу, а конечные продукты всех остальных отраслей оставили без изменения. В этом случае валовая продукция i-й отрасли увеличится на b_{ij}, так как

$b_{i1}y_1+b_{i2}y_2+\ldots+b_{ij}(y_i+1)+\ldots+b_{in}y_n-b_{i1}y_1-b_{i2}y_2 - \ldots - b_{ij} - \ldots - b_{in}y_n = b_{ij}$.

Таким образом, b_{ij} является приращением валового продукта i-й отрасли, отвечающим единичному приращению конечного продукта j-й отрасли. Числа b_{ij} принято в экономике называть коэффициентами полных затрат, потому что они характеризуют не только прямые затраты продукта i-й отрасли на производство единицы конечного продукта j-й отрасли, но и косвенные затраты продукта i-й отрасли во всех других отраслях, так или иначе связанных с j-й отраслью. Так, например, электроэнергия необходима и для выплавки стали, и для производства чугуна, из которого выплавляется сталь, и для добычи руды, из которой производится чугун, и т.д.

Еще раз подчеркнем, что коэффициенты полных затрат выражают затраты валовой продукции i-й отрасли, отнесенные не к единице валовой продукции, а к единицы конечного продукта j-й отрасли.

Матрица $(E-A)^{-1}$ называется матрицей коэффициентов полных затрат.

Формула (35) показывает, что для нахождения валового производства во всех отраслях достаточно матрицу коэффициентов полных затрат умножить слева на столбец конечных продуктов.

Пример 1. Найти объемы годового валового производства угля x_1, чугуна x_2 и стали x_3 при следующей матрице коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 1 \\ 0,18 & 0,11 & 0,1 \end{pmatrix}$$

и заданных объемах конечных продуктов (в млн. т.): $y_1 = 30$, $y_2 = 10$, $y_3 = 20$.

Решение. Находим сначала матрицу E–A:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -2 & 0 \\ 0 & 0,9 & -1 \\ -0,18 & -0,11 & 0,1 \end{pmatrix}$$

и вычислим ее определитель $|E - A| = 0,2$ (проверьте!). составляем присоединенную матрицу для E–A:

$$(E - A)^* = \begin{pmatrix} 0,7 & 1,8 & 2 \\ 0,18 & 0,72 & 0,8 \\ 0,162 & 0,448 & 0,72 \end{pmatrix}$$

Находим матрицу коэффициентов полных затрат:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{|E - A|}(E - A)^* = \begin{pmatrix} 3,5 & 9 & 10 \\ 0,9 & 3,6 & 4 \\ 0,81 & 2,24 & 3,6 \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу на столбец конечных продуктов, получаем

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 & 9 & 10 \\ 0,9 & 3,6 & 4 \\ 0,81 & 2,24 & 3,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 395 \\ 143 \\ 118,7 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 395$, $x_2 = 143$, $x_3 = 118,7$ (млн. т.).

Пример 2. Рассмотрим крайне упрощенное описание экономики, в котором выделены две отрасли (сельское хозяйство и промышленность), один фактор производства (труд) и государственный сектор, который ничего не производит для экономики, и его потребление представляет собой конечный спрос на товары, производимы в отраслях. Кроме того, государственный сектор использует труд. В процессе производства каждая отрасль потребляет некоторое количество другой (и своей) отрасли, а также труд; рабочая сила нуждается в продукции обеих отраслей и, наряду с этим, в затратах труда для своего производства. Допустим, что мы наблюдали натуральные потоки продукции между этими четырьмя секторами экономики на протяжении некоторого периода и составили таблицу межотраслевого баланса.

Производственный сектор	Потребляющий сектор			
	Сельское хозяйство	Промышленность	Труд	Конечный спрос (государство)
Сельское хозяйство (т)	600	400	1400	600
Промышленность (машин)	1500	800	700	1000
Труд (число занятых)	900	4800	700	600

Предположим, что в следующем периоде государственный сектор предполагает потребить 1000 т сельскохозяйственной продукции, 1200 машин и ему потребуется нанять на работу 800 человек. Определим, каковы должны быть уровни выпуска в каждом производственном секторе и трудовые ресурсы в следующем периоде.

Чтобы воспользоваться предыдущими результатами, нам надо составить матрицу A коэффициентов прямых затрат. Напомним, что элемент a_{ij} матрицы A определяется как количество продукции i, использованное для производства единицы продукции j. Если разделить объем продукции i, нужный сектору j, на общий выпуск продукции сектора j, то и получим коэффициент a_{ij}. Таким образом, a_{11} = 600:3000 = 0,2; a_{21} = 1500:300 = 0,5; a_{31} = 900:3000 = 0,3 (здесь 3000 = 600 + 400 + 1400 + 600 – сумма показателей первой строки, т.е. общий выпуск продукции сельского хозяйства).

Аналогично a_{21} = 400:4000 = 0,1;

a_{22} = 800: 4000 = 0,2; a_{23} = 4800:400 = 1,2;

(4000 = 1500 + 800 + 700 + 1000); a_{31} = 1400:700 = 0,2; a_{32} = 700:7000 = 0,1; a_{33} = 700:7000 = 0,1

(7000 = 900 + 4800 + 700 + 600).

Итак,

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 1,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить искомый ответ, надо матрицу $(E-A)^{-1}$ умножить на У. Опуская промежуточные выкладки (сделайте их самостоятельно), получим:

$$(E - A)^{-1} Y = \frac{1}{0,264} \begin{pmatrix} 0,60 & 0,33 & 0,17 \\ 0,48 & 0,66 & 0,18 \\ 0,84 & 0,99 & 0,59 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4287,88 \\ 5363,64 \\ 9469,70 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для удовлетворения новых показателей спроса необходимо произвести примерно 4288 т сельскохозяйственной продукции и 5364 машины, для чего потребуется 9470 работников.

ПОДГОТОВКА К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Для подготовки к контрольной работе необходимо ещё раз прорешать задания аналогичные заданиям контрольной работы. Образцы заданий аудиторных контрольных работ представлен ниже.

Раздел 1. Матрицы и определители

Контрольная работа № 1

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -8 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5221 & 5223 & 5225 \\ 5220 & 5221 & 5221 \\ 5218 & 5221 & 5224 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение относительно неизвестной матрицы X , если A, B, C, D, E – заданные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot B^2 + A^T \cdot C^T = E \cdot X$

5. Найти общую стоимость сырья, планируемую для производства продукции двух видов P_1 и P_2, если план выпуска продукции задан матрицей $P = (p_1, p_2)$; нормы расхода сырья трех типов S_1, S_2, S_3 на единицу продукции P_i заданы матрицей S и известна стоимость сырья каждого вида – матрица C.

$$P = (40 \quad 20), \; S = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Раздел 2. Системы линейных уравнений
Контрольная работа № 2

1.Решить систему линейных уравнений:
а) методом Крамера,
б) при помощи обратной матрицы,
в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} -x + y + 4z = 1, \\ 2x + 2y - z = 0, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$$

2. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

3.Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Раздел 3. Элементы матричного анализа
Контрольная работа № 3

1. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (2;–1;1), b = (–1;2;1), c = (1;3;1), d = (–1;–2;3).

2. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:
а) (2a–b)(3a+4b), б) |(2a–b)×(3a+4b)|,
где |a|=2, |b|=3, a^b=π/6.

3. Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, е) уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC. если A(1;3;3), B(–1;2;–2), C(0;–1;3), D(2;1;0).

4. Даны точки A, B, C, D. Найти координаты и длину вектора $\vec{c}$. Построить вектор $\vec{c}$.
A(0,1,4), B(3,–2,7), C(2,5,–3), D(4,4,0), $\vec{c} = -\overrightarrow{DC} + 4\overrightarrow{AB}$

5. Написать матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

6. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 27\ x_1^2 - 10\ x_1x_2 + 3x_2^2$.

Раздел 4. Приложения матричного анализа в геометрии

Контрольная работа №4

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

2. Построить кривую y = 2sin(2x), заданную в полярных координатах.

3. Вывести уравнение кривой, если сумма расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-5;0)$ и $F_2(3;0)$ есть величина постоянная и равна p=10. Сделать чертеж.

4. Привести уравнение $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

5. Заданы функции спроса $D = D(p)$ и предложения $S = S(p)$ на товар в зависимости от цены p. Требуется:

1) найти область определения и множество значений функций;

2) найти объем предложения и объем спроса товара по цене p_1; определить, что будет – избыточное предложение или избыточный спрос; вычислить выручку продавцов $U(p_1)$;

3) найти равновесную цену p_0, равновесный объем продаж q_0 и выручку продавцов $U(p_0)$;

4) построить графики функций $D = D(p)$ и $S = S(p)$ в одной системе координат, указать значение p_0.

$D = 200 - 10p$, $S = 35 + 5p$, $p_1 = 20$

Раздел 5. Приложения матричного анализа в экономике

Контрольная работа №5

1) Требуется определить конечный продукт фирмы 1 и фирмы 2, если известны объемы совокупных продуктов C1 и C2 и матрица коэффициентов прямых затрат A

Данные к выполнению задания :

C1=200 C2=400 a11=10 a22=30 a12=50 a21=72

2) Определить продуктивность матриц:

1)$\begin{pmatrix}0.3 & 0.8\\ 0.7 & 0.1\end{pmatrix}$; 2)$\begin{pmatrix}1.1 & 0.05\\ 0.03 & 0.09\end{pmatrix}$; 3)$\begin{pmatrix}0.4 & 0.2\\ 0.1 & 0.8\end{pmatrix}$; 4)$\begin{pmatrix}0.3 & 0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.5 & 0.1\\ 0.6 & 0.1 & 0.2\end{pmatrix}$

3)Восстановить пропущенные значения в таблице межотраслевого баланса.

Таблица №1

	P_1	P_2	∑	y	x
P_1	150		160		300
P_2		140	180	120	
∑	190	150	340		
V					
X					

Таблица №2

	P_1	P_2	∑	y	x
P_1		25	40	20	
P_2		20	30	60	
∑					
V					
X					

4)Пусть в некотором производстве используется четыре вида продуктов: A, B, C, D, причем для производства каждого продукта используются только три из имеющихся четырех продуктов, а в производстве каждого из этих продуктов он не участвует. Коэффициенты прямых затрат приведены в таблице для каждого варианта. Используя данные таблиц, составленные по вариантам, выполнить следующие задания.

Задание 1. Вычислить коэффициенты полных материальных затрат продукта B на производство единицы продукта A, учитывая при этом косвенные затраты только первых двух порядков.

Задание 2. Вычислить коэффициенты полных затрат: а) продукта A; б) продукта C; в) продукта D на производство единицы продукта A, учитывая при этом косвенные затраты только первых двух порядков.

Затрачиваемый продукт	Выпускаемый продукт			
	A	B	C	D
A	0	0,2	0,3	0,3
B	0,1	0	0,5	0,1
C	0,3	0,1	0	0,3
D	0,2	0,6	0,1	0

ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ И ДОМАШНИМ ЗАДАНИЯМ

Задание 1 Перемножить матрицы:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.	1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.	3. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.	4. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.	5. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 2 данную систему уравнений исследовать и решить тремя способами: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса; в) средствами матричного исчисления.

1. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - z = 4 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = -4 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 6 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ x + y + 3z = -2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -9 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x - 5y = 31 \\ 4x + 11z = -43 \\ 2x + 3y + 4z = -20 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y - 2z = 3 \\ x + 2y = 4 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$

Задание 3

Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведения:

1 а) (2a-b)(3a+4b),	б) $\lvert(2a-b)\times(3a+4b)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=2$, $\lvert b\rvert=3$, a^b=π/6;
2 а) (a-3b)(2a+b),	б) $\lvert(a-3b)\times(2a+b)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=4$, $\lvert b\rvert=2$, a^b=2π/3;
3 а) (a+2b)(b-3a),	б) $\lvert(a+2b)\times(b-3a)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=2$, $\lvert b\rvert=3$, a^b=π/4;
4 а) (2a+b)(a-3b),	б) $\lvert(2a+b)\times(a-3b)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=3$, $\lvert b\rvert=2$, a^b=π/3;
5 а) (2a+3b)(b-3a),	б) $\lvert(2a+3b)\times(b-3a)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=6$, $\lvert b\rvert=2$, a^b=π/6;
6 а) (2a-3b)(a-2b),	б) $\lvert(2a-3b)\times(a-2b)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=4$, $\lvert b\rvert=3$, a^b=π/3;
7 а) (2a-b)(a+3b),	б) $\lvert(2a-b)\times(a+3b)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=4$, $\lvert b\rvert=1$, a^b=2π/3;
8 а) (4a-b)(a+2b),	б) $\lvert(4a-b)\times(a+2b)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=3$, $\lvert b\rvert=2$, a^b=π/4
9 а) (2a-3b)(a+2b),	б) $\lvert(2a-3b)\times(a+2b)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=5$, $\lvert b\rvert=2$, a^b=3π/4;
10 а) (a-4b)(a+2b),	б) $\lvert(a-4b)\times(a+2b)\rvert$,	где $\lvert a\rvert=3$, $\lvert b\rvert=2$, a^b=5π/6;

Задание 4

Показать, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют базис R^3 и найти разложение вектора $\bar{a}$ по векторам $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$.

1	$\bar{a}$=(3,1,8);	$\bar{e}_1$=(0,1,3);	$\bar{e}_2$=(1,2,-1);	$\bar{e}_3$=(2,0,-1).
2	$\bar{a}$=(-1,2,4);	$\bar{e}_1$=(2,3,1);	$\bar{e}_2$=(0,0,2);	$\bar{e}_3$=(-3,0,4).
3	$\bar{a}$=(7,1,9);	$\bar{e}_1$=(5,1,2);	$\bar{e}_2$=(8,1,-3);	$\bar{e}_3$=(-1,3,2).
4	$\bar{a}$=(-3,5,7);	$\bar{e}_1$=(1,3,-3);	$\bar{e}_2$=(-4,1,5);	$\bar{e}_3$(-2,1,6).
5	$\bar{a}$=(-2,1,5);	$\bar{e}_1$=(1,4,2);	$\bar{e}_2$=(1,-3,1);	$\bar{e}_3$=(-1,1,0).
6	$\bar{a}$=(6,22,23);	$\bar{e}_1$=(1,5,10);	$\bar{e}_2$=(1,4,5);	$\bar{e}_3$=(1,3,1).
7	$\bar{a}$=(1,2,-3);	$\bar{e}_1$=(1,8,-4);	$\bar{e}_2$=(1,3,-1);	$\bar{e}_3$=(-1,-6,3).
8	$\bar{a}$=(9,4,18);	$\bar{e}_1$=(4,2,5);	$\bar{e}_2$=(-3,5,6);	$\bar{e}_3$=(2,3,-2).
9	$\bar{a}$=(-1,-4,-2);	$\bar{e}_1$=(1,2,4);	$\bar{e}_2$=(1,-1,1);	$\bar{e}_3$=(2,2,4).
10	$\bar{a}$=(4,-23,0);	$\bar{e}_1$=(2,5,3);	$\bar{e}_2$=(-1,2,-1);	$\bar{e}_3$=(5,13,5).

Задание5 даны координаты вершин треугольника ABC. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнение стороны AB; 3) уравнение высоты CH; 4) уравнение медианы AM; 5) точку N пересечения медианы AM и высоты CH; 6) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

1.	A (1,-3),	B (0,7),	C (-2,4);
2.	A (7,0),	B (1,4),	C (-8,-4);
3.	A (0,2),	B (-7,-4),	C (3,2);
4.	A (3,-1),	B (11,3),	C (-6,2);
5.	A (-2,-3),	B (0,7),	C (8,3);
6.	A (1,2),	B (3,12),	C (11,8);
7.	A (-4,-1),	B (-2,9),	C (6,5);
8.	A (5,4),	B (7,11),	C (15,10);
9.	A (-8,-3),	B (4,-12),	C (8,10);
10.	A (1,0),	B (13,-9),	C (17,13);

Задание 6

Дана пирамида ABCD.

Найти:

а) объем пирамиды;

б) площадь грани ABC, высоту пирамиды;

в) угол между ребром AB и AC;

г) уравнение ребра AD;

д) уравнение плоскости ABC;
е) уравнение высоты, опущенной из вершины D;
ж) точку пересечения высоты и основания.

1	A(2,1,0);	B(3,4,6);	C(-2,1,5);	D(1,4,5).
2	A(1,5,-7);	B(-3,6,3);	C(-2,7,3);	D(-4,8,-12).
3	A(-1,2,-3);	B(4,-1,0);	C(2,1,-2);	D(3,4,5).
4	A(1,2,0);	B(3,0,-3);	C(5,2,6);	D(8,4,-9).
5	A(0,-1,-1);	B(-2,3,5);	C(1,-5,-9);	D(-1,-6,3).
6	A(1,1,2);	B(-1,1,3);	C(2,-2,4);	D(-1,0,-2).
7	A(2,-4,-3);	B(5,-6,0);	C(-1,3,-3);	D(-10,-8,7).
8	A(-1,2,4);	B(-1,-2,-4);	C(3,0,-1);	D(7,-3,1).
9	A(1,-5,-9);	B(-1,-6,3);	C(0,-1,-1);	D(-2,3,5).
10	A(4,0,-1);	B(2,3,8);	C(-1,4,7);	D(-3,4,-8).

Задание 7
Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B – точки, лежащие на кривой; F – фокус; a – большая (действительная) полуось; в – малая (мнимая) полуось; ε - эксцентриситет; y = ± kx – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, 2c – фокусное расстояние).

1.	а) в = 15,	F (-10,0);	б) a = 13,	$\varepsilon = 14/13$;	в) $D: x = -4$.
2.	а) в = 2,	F (4√2;0);	б) a = 7,	$\varepsilon = \sqrt{85}/7$;	в) $D: x = 5$.
3.	а) A (3;0),	$B(2; \sqrt{5}/3)$;	б) $\kappa = 3/4$,	$\varepsilon = 5/4$;	в) $D: y = -2$.
4.	а) a = 4,	F (3,0);	б) $в = 2\sqrt{10}$,	F (-11,0);	в) $D: x = -2$.
5.	а) a = 6,	F (-4,0);	б) в = 3,	F (7,0);	в) $D: x = -7$.
6.	а) в = 7,	F (5,0);	б) a = 11,	$\varepsilon = 12/11$;	в) $D: x = 10$.
7.	а) $\varepsilon = 3/5$,	A (0;8);	б) $A(\sqrt{6},0)$,	$B(-2\sqrt{2};1)$;	в) $D: y = 9$.
8.	а) в = 5,	$\varepsilon = 12/13$;	б) $\kappa = 1/3$,	2a = 6;	в) ось симметрии Oy и A (-9;6);
9.	а) в = 5,	F (-10,0);	б) a = 9,	$\varepsilon = 4/3$;	в) $D: x = 12$.
10.	а) 2a = 22,	$\varepsilon = 10/11$;	б) $\kappa = \sqrt{11}/5$,	2c = 12;	в) ось симметрии Ox и A (-7;5);

Задание 8
Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Найти: 1) угол между ребрами AB и AD; 2) уравнение плоскости ABC; 3) угол между ребром AD и гранью ABC; 4) площадь грани ABC; 5) объем пирамиды; 6) уравнение высоты опущенной из вершины D на грань ABC.

1.	A (4,2,5),	B (0,7,1),	C (0,2,7),	D (1,5,0).
2.	A (4,6,5),	B (6,9,4),	C (2,10,10),	D (7,5,9).
3.	A (7,7,3),	B (6,5,8),	C (3,5,8),	D (8,4,1).
4.	A (2,-3,1),	B (6,1,-1),	C (4,8,-9),	D (2,-1,2).
5.	A (1,-4,0),	B (5,0,-2),	C (3,7,-10),	D (1,-2,1).
6.	A (-3,4,-3),	B (-2,2,-1),	C (8,6,7),	D (5,8,3).
7.	A (3,1,-2),	B (4,-1,0),	C (14,3,8),	D (11,5,6).
8.	A (-2,0,-2),	B (2,4,-4),	C (0,11,-12),	D (-2,2,-1).

9.	A (0,4,5),	B (3,-2,1),	C (4,5,6),	D (3,3,2).
10.	A (2,-1,7),	B (6,3,1),	C (3,2,8),	D (2,-3,7).

Задание 9

Задана линия $\rho = \rho(\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\pi/8$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

1. $\rho = 2 \cdot (1 + \cos\ \varphi)$.
2. $\rho = 4 \cdot (1 + \sin\ \varphi)$.
3. $\rho = 6 \cdot \cos\ 2\varphi$.
4. $\rho = 3 \cdot \sin\ 2\varphi$.
5. $\rho = \dfrac{1}{2 + 2 \cdot \cos\ \varphi}$.
6. $\rho = \dfrac{1}{2 + \cos\ \varphi}$.
7. $\rho = \dfrac{3}{2 + \sin\ \varphi}$.
8. $\rho = 5 \cdot (1 - \sin\ \varphi)$.
9. $\rho = 4 \cdot (1 - \cos\ \varphi)$.
10. $\rho = \dfrac{1}{1 + \cos\ \varphi}$.

Задание 10

Найти общую стоимость сырья, планируемую для производства продукции двух видов P_1 и P_2, если план выпуска продукции задан матрицей $P=(p_1, p_2)$; нормы расхода сырья трёх типов S_1, S_2, S_3 на единицу продукции P_i заданы матрицей S и известна стоимость (у.е.) единицы сырья каждого вида – матрица C.

1 $P = (10,30)$; $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 $P = (20,30)$; $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 $P = (20,40)$; $S = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4 $P = (30,10)$; $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5 $P = (50,20)$; $S = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

6 $P = (30,30)$; $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7 $P = (40,20)$; $S = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

8 $P = (50,50)$; $S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

9 $P = (10,30)$; $S = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10 $P = (40,10)$; $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задание 11

Фирма специализируется по выпуску кожаных изделий 3-х видов (перчатки, портмоне и сумки). Для производства используется сырье 3-х видов. Известна норма расхода на единицу изделия и объем расхода сырья на 1 неделю (заданы в таблице). Найти еженедельный объем выпускаемой продукции каждого вида.

№ зад.	Вид сырья	Норма расхода сырья на 1 ед. изд.			Недельный расход сырья в усл.ед.
		Перчатки	Портмоне	Сумки	
1	S_1	2	0	1	130
	S_2	3	2	0	230
	S_3	1	2	2	190
2	S_1	1	1	3	390
	S_2	2	1	0	250
	S_3	3	0	1	380
3	S_1	3	0	1	140
	S_2	2	5	1	400
	S_3	2	2	1	220
4	S_1	2	1	0	90
	S_2	0	1	2	160
	S_3	1	1	2	195
5	S_1	2	2	1	130
	S_2	1	2	1	120
	S_3	3	1	3	160
6	S_1	1	2	3	230
	S_2	3	1	1	140
	S_3	2	1	0	170
7	S_1	1	2	4	230
	S_2	3	2	1	280
	S_3	0	2	1	70
8	S_1	0	1	1	90
	S_2	2	0	3	180
	S_3	3	1	2	220
9	S_1	2	3	1	185
	S_2	0	1	2	80
	S_3	1	0	1	95
10	S_1	2	3	1	230
	S_2	2	2	0	130
	S_3	1	1	2	185

Задание 12

По заданным (в таблице) данным межотраслевого баланса (условные денежные единицы) найти необходимый объем валового выпуска каждой из двух отраслей, если конечное потребление первой отрасли увеличится на 100%, а второй – сохраниться на прежнем уровне.

№ зад.	Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
			P_1	P_2		
1	Производство	P_1	5	20	62	100
		P_2	10	14	110	200
2	Производство	P_1	6	25	80	200
		P_2	12	50	121	250

3	Производство	P_1	4	21	74	100
		P_2	12	15	174	150
4	Производство	P_1	7	40	84	100
		P_2	12	20	130	200
5	Производство	P_1	11	18	67	110
		P_2	22	30	115	150
6	Производство	P_1	10	15	81	100
		P_2	15	30	121	150
7	Производство	P_1	21	46	92	150
		P_2	15	12	143	200
8	Производство	P_1	21	18	81	100
		P_2	32	90	130	180
9	Производство	P_1	11	22	81	100
		P_2	23	44	100	110
10	Производство	P_1	10	15	73	100
		P_2	18	30	131	150

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература:

1. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для бакалавриата ; рекомендовано Мин. образования / ред. Н. Ш. Кремер. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2013. - 909 с
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики./ Под ред. Н.Ш. Кремера. Учебно–справочное пособие – М.: Юрайт–издат, 2012. – 312 с.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие/ Под ред. Ермакова В.И. – М.: ИНФРА–М, 2009. — 575 с.
4. Клюшин, В. Л. Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения [Текст] : учеб. пособие для бакалавров ; рекомендовано методсоветом по направлению / В. Л. Клюшин ; Рос. ун-т Дружбы Народов. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2013. - 165 с.
5. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для бакалавриата ; рекомендовано Мин. образования / ред. Н. Ш. Кремер. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2013. - 909 с.
6. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум для бакалавриата ; рекомендовано Мин. образования / ред. Н. Ш. Кремер. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт : ИД Юрайт, 2012. - 909 с.
7. Виленкин, И. В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов [Текст] : учебное пособие / И. В. Виленкин, В. М. Гробер. - 5-е изд. - Ростов н/Д : Феникс, 2009. - 414, [1] с. : ил.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины:

http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm
http://window.edu.ru
http://ru.wikipedia.org
http://math.ru
http://www.exponenta.ru

ЭБС Znanium.com:

1. Шершнев В. Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии [Электронный ресурс - Znanium.com] : учебное пособие / В. Г. Шершнев. - М. : НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 168 с. Бобрик Г. И. Высшая математика для экономистов: сборник задач [Электронный ресурс] : учебное пособие / Г. И. Бобрик [и др.]. - М. : НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 539 с.
2. Шевцов Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты [Электронный ресурс] : учебное пособие / Г. С. Шевцов. - 3-е изд., испр. и доп. - М. : Магистр : НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 544 с.
3. Рудык Б. М. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б. М. Рудык. - М. : НИЦ Инфра-М, 2014. - 318 с.
4. Шершнев В. Г. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. Г. Шершнев. - М. : НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 168 с.
5. Ячменёв Л Т. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебник / Л. Т. Ячменёв. - М. : ИЦ РИОР : НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.
6. Красс М. С. Математика для экономического бакалавриата [Электронный ресурс] : учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. - М. : НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 472 с.

Дополнительная литература:

1. Данко П.Е, Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть 2, – М.: Высшая школа, 2009. — 416 с.
2. Математика в экономике: учебно–методическое пособие. Под ред. Н.Ш Кремера. – М.: Финстатинформ, 2009.
3. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : программа и контрольные задания для студентов направления «экономика» заочной формы обучения специальностей и направлений 080109.62 "Бухгалтерский учет, анализ и аудит",080507.62 "Менеджмент организации", 080102.62 "Мировая экономика" / сост. Ю. Г. Кошкин ; НОУ СИБУП, Экономический факультет, НОУ СИБУП, Кафедра прикладной математики и информатики. - Красноярск : НОУ СИБУП, 2011. - 30 с.
4. Линейная алгебра [Электронный ресурс] : контрольная работа для студентов направления «экономика» заочной формы обучения специальностей и направлений 080109.62 "Бухгалтерский учет, анализ и аудит",080507.62 "Менеджмент организации", 080102.62 "Мировая экономика" / сост. Ю. Г. Кошкин ; НОУ СИБУП, Экономический факультет, НОУ СИБУП, Кафедра прикладной математики и информатики. - Красноярск : НОУ СИБУП, 2011. - 9 с.