2.3 РЯДЫ

3.1. Числовые ряды. Основные понятия. Необходимый признак сходимости ряда

Основные понятия

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел:

$$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$$

выражение

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$$

называется бесконечным ***числовым рядом*** (или просто рядом).

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

Числа $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ – называются членами ряда, а член ряда U_n – его ***общим членом.***

Примеры рядов:

1) $1-1+1-1+\ldots,$

2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$

3) $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$

Ряд можно задать с помощью общего члена, например, $U_n=\frac{1}{2n-1}$,

определяет следующий ряд:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

Частичной суммой S_n числового ряда называется сумма его первых *n* членов,

$$S_1=U_1, \quad S_2=U_1+U_2, \quad S_3=U_1+U_2+U_3, \quad S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n.$$

Суммой числового ряда *S* называется предел последовательности его частичных сумм, если этот предел существует

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n,$$

причем ряд называется ***сходящимся***, в противном случае, если же $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует, или $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty,$ то ряд называется ***расходящимся.***

Пример 31 Исследовать на сходимость ряды

а) $1-1+1-1+1-\ldots$

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$

Решение:

а) Рассмотрим ряд $1-1+1-1+1-\ldots$. Найдем его частичные суммы $S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ldots$ Последовательность его частичных сумм 1,0,1,0.1,0... не имеет предела, следовательно ряд расходится.

б) Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...,$$

найдем его частичные суммы:

$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};$

$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=1-\frac{1}{3},...$

$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}.$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1,$ то рассматриваемый ряд сходится: его сумма равна 1.

Пример 32 Исследовать на сходимость

$$a+aq+aq^2+aq^3+...+aq^{n-1}+...$$

Решение:

Данный ряд составлен из членов геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q (будем считать $a\neq 0$):

$$a+aq+aq^2+aq^3+...+aq^{n-1}+...,$$

известно, что сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии определяется по формуле

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q},\ \text{или}\ S_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)$, очевидно, что при $|q|<1$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q})=\frac{a}{1-q}$ (т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$), ряд сходится и его сумма $S=\frac{a}{1-q}$. В остальных случаях, при $|q|\geq 1$, ряд расходится (доказать самостоятельно).

Например, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{2^m}{5^m}$ сходится, т.к. $q=\frac{2}{5}$ и его сумма $S=\frac{2/5}{1-2/5}=\frac{2}{3}$, а ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{7^m}{3^m}$ расходится, т.к. $q=\frac{7}{3}$.

Свойства сходящихся числовых рядов

1. Два сходящихся ряда

$$A=a_1+a_2+...+a_n+...\ \text{и}$$

$$B=b_1+b_2+...+b_n+...$$

можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+...+(a_n\pm b_n)+...$$

также сходится, и его сумма S равна, соответственно, $S=A\pm B$.

Доказать самостоятельно

2. Если члены сходящегося ряда умножить на один и тот же множитель *c*, то его сходимость не нарушится (а сумма лишь умножится на *c*).

Доказать самостоятельно

3. Данное свойство связано с понятием остатка ряда. Если в числовом ряде отбросить первые *m* членов, то получится ряд:

$$U_{m+1}+U_{m+2}+...+U_{m+k}+...=\sum_{n=m+k}^{\infty}U_n,$$

называемый ***остатком ряда***. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{U_n}$, то сходится и любой из его остатков $U_{m+1}+U_{m+2}+...+U_{m+k}+...=\sum_{n=m+k}^{\infty}U_n$; обратно, из сходимости остатка вытекает сходимость исходного ряда .

Иными словами, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение вначале его нескольких новых членов не отражается на сходимости ряда.

4. Необходимый признак сходимости ряда.

Если ряд сходится, то общий член U_n стремится к нулю, то есть $\lim_{n\to\infty}U_n=0$.

Доказательство.

По условию ряд сходится, следовательно $\lim_{n\to\infty}S_n=0$. Очевидно, что $S_n=S_{n-1}+U_n$, тогда $\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$.

Отсюда следует ***достаточный признак расходимости:***.

Если $\lim_{n\to\infty}U_n\neq 0$, то ряд $\sum U_n$ расходится.

Пример 33 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n+1}$$

Решение:

Найдем предел общего члена ряда при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}\neq 0$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Замечание.

Необходимо условие сходимости ряда не является достаточным. Существует много расходящихся рядов, у которых общий член ряда стремится к нулю. Примером такого ряда служит ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...,$$

который называется ***гармоническим.***

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, хотя $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

3.2 Достаточные признаки сходимости рядов

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, члены которого положительны, т.е. $a_n > 0$ (n=1,2,3,…).

Признак Даламбера

Пусть для числового ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \qquad a_n > 0$$

имеет место $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D,$ тогда

при $D<1$ ряд сходится,

при $D>1$ ряд расходится,

при $D=1$ ряд может сходиться или расходиться (в этом случае требуется дополнительные исследования).

Признак Коши

Пусть для числового ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \qquad a_n > 0$$

имеет место $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = D,$ тогда

при $D<1$ ряд сходится,

при $D>1$ ряд расходится,

при $D=1$ ряд может сходиться или расходиться (в этом случае требуется дополнительные исследования).

Пример 34 Исследовать на сходимость ряд

$$\sum\frac{3^n}{n!} = 3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}+...+\frac{3^n}{n!}+...$$

Решение:

Применим признак Даламбера, вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0$$

число $D=0<1$, следовательно, ряд сходится.

Пример 35 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{2^n}\right)^n$.

Решение:

Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{2^n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2^n}\right)=2>1$$ – ряд расходится.

Интегральный признак Маклорена-Коши

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ числовой ряд с положительными числами.

Пусть члены ряда удовлетворяют следующим условиям:

1) составляют монотонную не возрастающую последовательность

$$a_0\ge a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n\ge\ldots;$$

2) можно построить монотонную не возрастающую функцию $y=f(x)$ $x\in[x_0,\infty)$ такую, что $f(0)=a_0;\ \ f(1)=a_1;\ \ f(2)=a_2;\ \ \ldots;f(n)=a_n;\ \ \ldots;$, тогда заданный ряд $\sum a_n$ – сходится и расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_{x_0}^{\infty}f(x)dx$.

Пример 36 Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$$

Решение:

Члены ряда составляют монотонно убывающую последовательность $1>\frac{1}{2^p}>\frac{1}{3^p}>\ldots.>\frac{1}{n^p}>\ldots.$

Следовательно, функцией $f(x)$ будет $\frac{1}{x^p};\ f(x)=\frac{1}{x^p}$.

Тогда $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}0, p>1;\\ \infty, p<1.\end{cases}$ (доказать самостоятельно).

Если p=1, то имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Признак сравнения

Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся или расходящимся.

Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+...+b_n+...$$

Если имеет место неравенство $a_n\le b_n$, то

1) из сходимости второго ряда вытекает сходимость первого ряда; 2) из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда.

Предельный признак сравнения

Если существует предел (в предположении, что $b_n\neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K \qquad (0\le K\le+\infty)$$

то оба ряда сходятся или оба расходятся одновременно.

Примеры 37 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+...+\frac{1}{n\cdot 2^n}+...$$

Решение:

Члены ряда не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда, составленного из членов геометрической прогрессии с общим членом

$$U_n=\frac{1}{2^n}:$$

$$\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}\ (n=1,2,3,...).$$

Согласно признаку сравнения, данный ряд также сходится.

Примеры 38 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}\ (0<x<\pi)$$

Решение:

Ряд расходится по предельному признаку сравнения, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{1}{n}}=x,$$

где известно, что гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \text{расходится}.$$

3.3 Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

Знакопеременным рядом называется ряд, членами которого являются действительные числа произвольного знака.

Например,

$$1)\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\ldots$$

$$2)\ \frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+\frac{\sin 3\alpha}{9}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$$

$$3)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\ldots$$

Знакопеременный ряд называется ***знакочередующимся***, если соседние его члены имеют различные знаки.

Например, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{3^{n-1}}=1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\ldots.$

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ называется:

- Абсолютно сходящимся, если сходится ряд составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$.
- Условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Имеют место следующие ***свойства абсолютно сходящихся рядов***:

1) Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.

2) Если в абсолютно сходящемся ряде произвольным образом переставить члены, то полученный ряд также будет абсолютно сходится, а сумма его будет равна сумме исходного ряда.

Пример 37 Исследовать ряд $\sum\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ на сходимость.

Решение:

Составим ряд из модулей $\sum\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$, он сходится.

По признаку сравнения, так как

$$\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$$

Ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ – сходится, следовательно сходится и ряд $\sum\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$.

Таким образом сходится абсолютно ряд $\sum\frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Для знакочередующихся рядов имеет место
признак сходимости Лейбница.
Если члены знакочередующегося ряда

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots$$

1) монотонно убывают по абсолютной величине, т. е.

$$U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \ldots \geq U_n \geq U_{n+1} \geq \ldots,$$

и

2) общий член ряда стремится к нулю, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$,

то:

1) ряд сходится;

2) его сумма не превосходит величины первого члена ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n \leq U_1;$$

3) модуль суммы остатка ряда не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена (первого члена остатка):

$$|r_n| \leq U_{n+1}; r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k U_k$$

и имеет знак своего первого члена.

Пример 38 Исследовать на сходимость ряды

а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$

б) $1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2(n-1)3^{n-1}} + \ldots$

Решение:

а) ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$ сходится по признаку Лейбница, так как члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине

$$1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} \geq \ldots$$

и общий член ряда стремится к нулю, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

б) ряд $1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2(n-1)3^{n-1}} + \ldots$ сходится по признаку Лейбница:

$$\frac{1}{2(n-1)3^{n-1}} > \frac{1}{2(n+1)3^n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n-1)3^{n-1}} = 0.$$

Если положить его сумму *S*, приближенно равной сумме первых шести членов этого ряда, то получим ошибку, абсолютная величина которой меньше, чем

$$\frac{1}{13 \times 3^6} < \frac{1}{9477} < 0{,}001, \quad S=0{,}907.$$

3.4 Функциональные ряды. Степенные ряды

Функциональным рядом называется выражение

$$\sum f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_4(x) + \ldots,,$$

члены которого $f_1(x), f_2(x), f_{,3}(x), \ldots, f_4(x)\ \ldots,$ являются функциями от x.

Придавая x числовое значение x_0, мы получаем числовой ряд

$$\sum f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \ldots + f_4(x_0) + \ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Множество тех значений, x, при которых функциональный ряд сходится, называется его ***областью сходимости***. Ясно, что в области сходимости сумма функционального ряда является некоторой функцией от x. Обозначим се через $S(x)$.

Функциональный ряд сходится в точке x_0, если сходится числовой ряд .

Функциональный ряд сходится на интервале *J*, если он сходится в каждой точке этого интервала.

На интервале сходимости *J* сумма ряда есть некоторая функция *S(x).*

Например, используя известные признаки сходимости числовых рядов, можно найти интервалы сходимости функциональных рядов:

1) $\sum \frac{x^n}{2^n};\quad q = \frac{x}{2};\quad |x| \le 1;\quad \frac{|x|}{2} < 1;\quad |x| < 2.$

2) $\sum \frac{1}{n^2 + x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \ldots;\quad \frac{1}{n^2+x} \le \frac{1}{n^2}$ сходится для $\forall x$

3) $\sum \frac{1}{n^x}$ – ряд Дирихле: при $x > 1$ сходится, при $x \le 1$ расходится.

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \sin x};\quad \frac{1}{n+\sin x} \ge \frac{1}{n+1};\quad$ расходится для $\forall x$.

Специальный класс функциональных рядов составляют гак называемые степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = c_0 + c_1 x\ + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots,,$$

где c_0, c_1, c_2, ..., c_n,... -- последовательность действительных чисел, называют ***коэффициентами ряда***.

Выясним, какой вид имеет "область сходимости" степенного ряда, то есть множество $\{x\}$ тех значений переменной, для которых ряд сходятся.

Теорема Абеля.

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ сходится в точке $x_0 \ne 0$, то он сходится и притом абсолютно в интервале $\left(-|x_0|,\ |x_0|\ \right)$, то есть при всех значениях x, удовлетворяющих условию. $|x| < |x_0|$.

Следствие:

Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях $|x| > |x_1|$.

Любой степенной ряд сходится при значении $x=0$. Есть степенные ряды, которые сходятся только при $x=0$ и расходятся при остальных значениях x.

Область сходимости может состоять из всех точек оси *Ox*, другими словами, ряд может сходится при всех x.

Пример 39 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение:

Ряд $1+x+x^2+...+x^n+...$, представляет геометрическую прогрессию со знаменателем x, сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|\geq 1$.

Из теоремы Абеля и ее следствия получаем, что все точки сходимости расположены от начала координат не дальше, чем любая из точек расходимости. Совершенно ясно, что точки сходимости будут целиком заполнять некоторый интервал с центром в начале координат.

Таким образом, можно сказать, что для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число R, что для всех x, по модулю меньших R $(|x|<R)$, ряд абсолютно сходится, а для всех x, по модулю больших R $(|x|>R)$, ряд расходится.

Что касается значений $x=R,\ x=-R$ здесь могут быть различные возможности: ряд может сходится в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной. При этом ряд может сходиться как абсолютно, так и условно.

Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ называется такое число R, что для всех x, $|x|<R$, степенной ряд сходится, а для всех $|x|>R$, расходится. Интервал $(-R,R)$ называется ***интервалом сходимости***.

Условимся для рядов, расходящихся при всех x, кроме $x=0$. считать $R=0$, а для рядов, сходящихся при всех x, считать $R=\infty$.

Как найти радиус сходимости?

Если все коэффициенты степенного ряда, начиная с некоторого, отличны от нуля, то его радиус сходимости равен пределу при $n\to\infty$ отношения абсолютных величин коэффициентов общего и следующего за ним членов ряда.

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

$$|c_0|+|c_1 x|+|c_2 x^2|+...+|c_n x^n|+...$$

Найдем отношение $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ для этого ряда:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{|c_{n-1}\times x^{n+1}|}{|c_n x^n|}=|x|\cdot\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$$

а затем предел его при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(|x|\cdot\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\right)=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=|x|\cdot\frac{1}{R}$$

Здесь множитель $|x|$ вынесен за знак предела, как не зависящий от n и введено обозначение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\frac{1}{R},$$

если этот предел существует и не равен нулю. Согласно признаку Даламбера, ряд сходится, если $|x|\cdot\frac{1}{R}<1$,. откуда $|x|<R$. Отсюда следует, что ряд сходится, и притом абсолютно, при значениях $|x|<R$.

Согласно тому же признаку Даламбера, ряд расходится, если $|x|\cdot\frac{1}{R}>1$ или $|x|>R$. Однако в этом случае из признака Даламбера следует, что члены ряда не стремятся к нулю. Тогда при $n\to\infty$ не стремятся к нулю и члены ряда, а потому и он расходится при значениях $|x|>R$. Следовательно, согласно определению, число R – радиус сходимости степенного ряда. из соотношения получим

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}},\ \text{т.е.}\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

Пример 40 Найти радиус сходимости ряда $1+x+\frac{x}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

Решение:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{n!}\right|}{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Пример 41 Найти область сходимости степенного ряда

$$1+\frac{x}{10}+\frac{2!x^2}{10^2}+\ldots+\frac{n!x^n}{10^n}+\ldots$$

Решение:

Найдем отношение

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{n!}{10^n}:\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}=\frac{10n!}{n!(n+1)}=\frac{10}{n+1}$$

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0.$ т. е. ряд сходится только при $x=0$ и расходится при остальных значениях x.

Пример 42 Найти область сходимости степенного ряда:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Решение:

Здесь $|c_n| = \frac{1}{n}$, $|c_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$, т.е. $\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} == \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x = 1$ имеем ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$ он сходится по теореме Лейбница.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - ... - \frac{1}{n} - ...$., который расходится как произведение расходящегося гармонического ряда на -1. Следовательно; областью сходимости служит полуинтервал $(-1;\ 1]$.

Пример 43 Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...,$$

Решение:

Найдем радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n} : \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3.$$

Исследуем сходимость ряда при значениях $x = \pm 3$. Подставив их в данный ряд соответственно получим $1 + 1 + 1 + ... + 1 + 1 + ...$;

$1 - 1 + 1 - ... + (-1) + ...$ Оба ряда расходятся, так как не выполняется необходимое условие сходимости (их общие члены не стремятся к нулю при $n \to \infty$). На обоих концах интервала сходимости данный ряд расходится а область его сходимости $(-3;\ 3)$.

Замечание.

Формула радиуса сходимости степенного ряда получена в предположении, что все коэффициенты членов ряда начиная с некоторого, отличны от нуля. Применение формулы допустимо только в этих случаях. Если это условие нарушается, то радиус сходимости степенного ряда следует искать или с помощью признаков Даламбера. Коши, или же сделав замену переменной, преобразованием ряда к виду в котором указанное условие выполняется.

Свойства степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...$$

имеющий радиус сходимости $R > 0$ (R может равняться ∞). Тогда каждому значению x из интервала сходимости соответствует некоторая сумма ряда. Следовательно, сумма степенного ряда есть функция от x на интервале сходимости. Обозначим ее через $S(x)$. Тогда можно записать равенство

$$S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...$$

понимая его в том смысле, что сумма ряда в каждой точке x из интервала сходимости равна значению функции $S(x)$ в этой точке. В этом же смысле будем говорить, что ряд сходится к функции $S(x)$ на интервале сходимости. Вне интервала сходимости равенство не имеет смысла.

Пример 44 Найти сумму степенного ряда

$$1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots .$$

Решение:

Это ряд составленный из членов геометрической прогрессии, у которой $b_1=1,\ q=-x$. Следовательно, его сумма есть функция $S(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Ряд сходится, если $|x|<1$. Поэтому равенство

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

справедливо лишь для значений $x\in(-1;\ 1)$, хотя функция $S(x)=\dfrac{1}{1+x}$ определена для всех значений x кроме $x=-1$.

Можно доказать, что сумма степенного ряда $S(x)$ непрерывна и дифференцируема на любом отроке $[a,b]$ внутри интервала сходимости.

Равенство справедливое в интервале сходимости степенного ряда называют разложением $S(x)$ в степенной ряд.

Для степенных рядов справедливы следующие утверждения:

1) Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно дифференцировать неограниченное число раз причем получающиеся при этом степенные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд а суммы их соответственно равны $S'(x), S''(x),\ \ldots\ , S^{(n)}(x)..$

2) Степенной ряд можно неограниченное число раз почленно интегрировать в пределах от 0 до x, если $x\in(-R;\ R)$, причем получающиеся при этом степенные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд, а суммы их соответственно равны

$$\int_0^x S(x)dx,\ \ \int_0^x\left(\int_0^x S(x)dx\right)dx,\ \ldots .$$

2.3.5 Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора, Маклорена

Пусть дана функция $f(x)$, которую требуется разложить в степенной ряд, т. е. представить в виде

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Задача состоит в определении коэффициентов a_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$ ряда. Для этого продифференцируем равенство, получим:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} + ...$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + ... + (n-1)\cdot na_nx^{n-2} + ...$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot na_n + ...$$

Полагая в этих равенствах $x = 0$, найдем

$$f(0) = a_0,\ f(0) = a_1,\ f'(0) = 2!a_2,\ f''(0) = 3!a_3,\ ...\ ,$$
$$f^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot na_n = n!a_n$$

Тогда $a_0 = f(0),\ a_1 = \dfrac{f'(0)}{1!},\ a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!}x^2,\ a_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3, ...,\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$

Подставляя значения найденных коэффициентов a_n в равенства, получим

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Это разложение функции $f(x)$ в ряд называется ***рядом Маклорена***, это разложение функции называют ***разложением по степеням*** x.

Рядом Тейлора называю ряд вида:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n$$

называют ***разложением по степеням*** $(x-a)$.

Пример 45 Разложить в ряд Маклорена функцию e^x.

Решение:

Найдем производные $(e^x)^{(n)} = e^x$, поэтому при $x = 0$ имеем $f(0) = f(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = 1.$ Подставляя эти значения в формулу получим искомое разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Этот ряд сходится на всей числовой прямой $R = \infty$.

Пример 46 Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin x$.

Решение:

$$f(x) = \sin x,\ \ f'(x) = \cos x,\ \ f''(x) = -\sin x,\ \ f'''(x) = -\cos x,\ \ f''''(x) = \sin x,$$

Так как производная четвертого порядка совпадает с функцией, то производные следующих порядков повторяются в той же последовательности. Найдем значения функции и ее производных при $x = 0$:

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad f''''(0)=0,$$

Поэтому ряд Маклорена для функции $f(x)=\sin x$ имеет вид

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Пример 47 Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos x$.

Решение:

Аналогично, получим

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}+\ldots$$

2.3.6 Применение рядов в приближенных вычислениях

Степенные ряды имеют самые разнообразные приложения. С их помощью вычисляют с заданной степенью точности значения:

функций, определенных интегралов.

Находятся приближенные решения дифференциальных уравнений.

Пример 48 Вычислить приближенно $e^{-\frac{3}{5}}$, с точностью 0,01.

Решение:

Используем ряд Маклорена для функции

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

подставим $x=-\frac{3}{5}$, получим

$$e^{-\frac{3}{5}}=1-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1!}+\frac{3^2}{5^2 2!}-\frac{3^3}{5^3 3!}+\ldots+\frac{(-1)^n 3^n}{5^n n!}+\ldots,$$

или

$$e^{-\frac{3}{5}}=1-0{,}6+0{,}18-0{,}036+0{,}0054-\ldots$$

получили знакочередующийся ряд, из теоремы Лейбница следует, что погрешность $|r_n|$, не превышает первого из отброшенных членов (по абсолютной величине). Так как пятый член ряда меньше заданной точности

$$u_5=0{,}0054<0{,}01,$$

то сумма ряда равна

$$e^{-\frac{3}{5}}=1-0{,}6+0{,}18-0{,}036=0{,}58.$$

Пример 49 Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, с точностью 0,1.

Решение:

Используем ряд Маклорена для функции

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

подставим $x = -x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots$$

вычислим интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \ldots =$$

$$= 1 - 0{,}33 + 0{,}1 - 0{,}024 + \ldots$$

Так как четвёртый член ряда меньше заданной точности $u_4 = 0{,}024 < 0{,}1$, то данный интеграл равен

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - 0{,}33 + 0{,}1 = 0{,}77$$

Задачи 141 – 160 Исследовать на сходимость числовой ряд:

141. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$

142. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

143. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$

144. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}$

145. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$

146. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$

147. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$

148. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$

149. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$

150. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$

151. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

152. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$

153. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$

154. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$

155. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$

156. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^2+1)}{(n+1)!}$

157. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

158. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$

159. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$

160. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$

Задачи 161 – 180. Найти область сходимости степенного ряда:

161. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+2n+1}$

162. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot x^n}{n^3-1}$

163. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

164. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^{2n}}{n+1}$

165. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n(n+1)}$

166. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^{n-1}}{3^n\cdot n}$

167. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(3n+1)^2}$

168. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{2n}}{2^n\cdot 3^{n+1}}$

169. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3^n(n+1)}$

170. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^n\cdot(7n-1)}$;

171. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^{n-1}\cdot(n+1)}$;

172. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\cdot x^{2n-1}}{2n-1}$;

173. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$;

174. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n+2}}{5n+1}$;

175. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+6}\cdot(\frac{x}{3})^n$;

176. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+7)x^{n-3}}{7^n}$;

177. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot x^n}{8^n\cdot(n^2+2)}$;

178. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+5})^n\cdot x^n$;

179. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n(n+9)}$;

180. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10x^{n+1}}{5n+3}$.

Задачи 181 – 200 Вычислить интеграл с точностью до 0,001:

181. $\int_0^{0.1}\cos(100x^2)dx$

182. $\int_0^{1}\sin x^2 dx$

183. $\int_0^{0.5}e^{-\frac{3x^2}{25}}dx$

184. $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

185. $\int_0^{0.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

186. $\int_0^{0.4}\cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

187. $\int_0^{0.2}\cos(25x^2)dx$

188. $\int_0^{0.5}\sin 4x^2 dx$

189. $\int_0^{0.5}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$

190. $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$

191. $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$

192. $\int_0^{0.5}\cos 4x^2 dx$

193. $\int_0^{0.5}\cos(4x^2)dx$

194. $\int_0^{0.2}\sin 25x^2 dx$

195. $\int_0^{0.3}e^{--2x^2}dx$

196. $\int_0^{1.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$

197. $\int_0^{0.5}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

198. $\int_0^{1}\cos x^2 dx$

199. $\int_0^{0.1}e^{-6x^2}dx$

200. $\int_0^{0.1}\sin 100x^2 dx$

Учебное пособие
Лукинова С. Г. Высшая математика для экономистов. Часть III.