1. Матрицы, виды матриц, действия над матрицами. Определители, свойства, приложение определителей к решению задач. Решение систем линейных уравнений

Матрица – это прямоугольная таблица чисел коэффициентов при переменных в соответствующей системе линейных уравнений.

Матрицы обозначаются большими буквами А,Б,С,В,М,…

Матрицы берутся в круглые скобки.

Числа в матрицах называются элементами матрицы.

Элементы матрицы обозначаются маленькими буквами с указанием номера строки и столбца, в которых они стоят.

Матрицы делятся на основные и расширенные.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - основная матрица.

Расширенная матрица - это основная матрица, дополненная столбцом свободных членов.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & в_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & в_m \end{array}\right)$$

Пример:

Пусть дана система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

Соответствующая расширенная матрица имеет вид:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

☺ Размерностью матрицы называют количество ее строк и столбцов.

(m x n)

$$A = \left(\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{array}\right)$$ Размерность матрицы (3 x 2)

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{array}\right)$$ Размерность матрицы (2 x 3)

$$C = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{array}\right)$$ Размерность матрицы (3 x 3)

☺ Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов (m = n)

Если число строк матрицы не равно числу столбцов матрицы, то матрица называется прямоугольной.

Для квадратных матриц указывается только их порядок.

(2x2) – второго порядка; (3x3) третьего порядка и т.д.

$$A = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right)$$ Матрицы второго порядка.

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$ матрица третьего порядка

В квадратных матрицах можно выделить элементы, стоящие в главной диагонали и элементы, стоящие в побочной диагонали. Главная диагональ проходит из левого верхнего угла в правый нижний угол.

Побочная диагональ проходит из левого нижнего угла в правый верхний угол.
Главная диагональ «___ »
Побочная диагональ «---»

Диагональная матрица – это такая матрица, у которой элементы по диагонали отличны от нуля, а все остальные нули.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица – это такая матрица, у которой все элементы главной диагонали единицы, а все остальные нули.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица называется нулевой если все её элементы - нули.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица называется треугольной, если под главной диагональю стоят все элементы – нули, а остальные а остальные элементы – отличие нуля.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ Нижняя диагональная матрица

Матрица называется трапецевидной, если под главной диагональю стоят элементы нули и есть нулевые строки.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☺ Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Трапецевидными могут быть как квадратные, так и прямоугольные матрицы.

Действия над матрицами.

Матрицы можно складывать, вычитать, умножать на число, делить на число, умножать одну матрицу на другую, транспонировать, находить для квадратной матрицы обратную.

Складывать можно матрицы только одной размерности! Результатом сложения двух матриц будет матрица той же размерности.

Законы сложения матриц

1. Коммутативный закон сложения матриц / от перемены мест при сложении матриц результат не изменяется/. A+B=B+A
2. Ассоциативный закон сложения матриц./ матрицы можно складывать в любом порядке/

(A+B)+C=A+(B+C)

Чтобы сложить две матрицы, нужно сложить элементы, стоящие на одинаковых местах в матрицах.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + в_{11} & a_{12} + в_{12} & a_{13} + в_{13} \\ a_{21} + в_{21} & a_{22} + в_{22} & a_{23} + в_{23} \\ a_{31} + в_{31} & a_{32} + в_{32} & a_{33} + в_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+6 \\ 2+7 & -1+2 \\ 0+9 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Чтобы вычесть две матрицы, нужно из элементов первой матрицы вычесть элементов второй матрицы, стоящие на одинаковых местах.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \\ в_{31} & в_{32} & в_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} - в_{11} & a_{12} - в_{12} & a_{13} - в_{13} \\ a_{21} - в_{21} & a_{22} - в_{22} & a_{23} - в_{23} \\ a_{31} - в_{31} & a_{32} - в_{32} & a_{33} - в_{33} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 & 1-2 & 2-4 & 6-1 \\ 7-6 & 3-7 & 4-9 & 5-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число.

Чтобы умножить матрицу на число, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы.

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad k=3$$

$$K\,C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} =3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \\ -8 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

Умножать матрицы можно только в случае, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. A= (m x n) B= (n x p).

Размерность матрицы, равной произведению двух матриц равна (число строк первой матрицы X число столбцов второй матрицы)

A x B $\neq$ B x A /При умножении двух матриц коммутативный (переместительный) закон не выполняется/.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ Размерность матрицы (3 x 2)

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ Размерность матрицы (2 x 3)

Размерность итоговой матрицы, полученной произведением матрицы A на матрицу B, равна (3x3)

Пример

$$К=АхВ=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 16 \\ 10 & 6 & -3 \\ -8 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

☺ Чтобы транспонировать матрицу, нужно поменять местами строки и столбцы.

$$А=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Способы решения систем линейных уравнений

1. Метод сложения
2. Метод подстановки
3. Графический метод
4. Метод Гаусса
5. Метод Крамера
6. Матричный метод

Пример

Метод подстановки

(Выражаем одну переменную через другие и подставляем во второе уравнение)

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 4x-2y=18 \end{cases} \Big| :2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=13 \\ 2x-y=9 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=13 \\ -2x+y=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 4y=4 \end{cases} \Big| :4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=13 \\ y=1 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot 1 \\ :(-3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=13 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3\cdot 1=13 \\ y=1 \end{cases} \Big| :4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=13-3 \\ y=1 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot 1 \\ :(-3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=10 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

Графический способ

(Строим графики линий, соответствующих каждому уравнению и находим координаты точек пересечения)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - 2y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{13 - 2x}{3} \\ y = \dfrac{18 - 4x}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{13 - 2x}{3} \\ y = -9 + 2x \end{cases}$$

Определитель второго порядка находится как разность произведений чисел главной и побочной диагоналей.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 27 - 10 = 17$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 6 = 4 - 0 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 9 \cdot 5 = 16 - 45 = -29$$

Метод Крамера

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$ Формулы Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} в_1 & a_{21} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{21} & в_2 \end{vmatrix}$$

Пример

Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - 2y = 18 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad A_{расш} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 13 \\ 4 & -2 & 18 \end{array}\right) \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Так как найденный определитель отличен от нуля, то ранг матрицы A=2

Данный определитель является минором матрицы $A_{расш}$, rang A=rang $A_{расш}$ =2, система совместна и имеет единственное решение.

Найдем решение системы методом Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = -4 - 12 = -16$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 18 & -2 \end{vmatrix} = 13 \cdot (-2) - 18 \cdot 3 = -26 - 54 = -80$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 4 & 18 \end{vmatrix} = 2 \cdot 18 - 4 \cdot 13 = 36 - 52 = -16$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-80}{-16} = 5 \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1$$

Пример

Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A_{расш} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 13 \\ 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Так как найденный определитель отличен от нуля, то ранг матрицы A=2

Данный определитель является минором матрицы $A_{расш}$, rang A=rang $A_{расш}$ =2, система совместна и имеет единственное решение.

Найдем решение системы методом Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = 6 - 20 = -14$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 13 \cdot 2 - 8 \cdot 5 = 26 - 40 = -14$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 13 = 24 - 52 = -28$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1 \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2$$

2. Задачи на проценты

Процентом называется сотая часть какого-либо числа. Процент обозначается знаком %.

Если данное число принять за 1, то

1% составляет 0,01 этого числа,

25% составляют 0,25 числа,

73% составляют 0,73 этого числа.

Чтобы число процентов выразить в виде дроби, нужно число процентов разделить на 100.

Нахождение процентов данного числа.

Чтобы найти проценты X от данного числа A, нужно число разделить на 100% и умножить на данное число процентов B%

Пример: Найдите 30% от числа 80.

$$\frac{80}{100\ \%} \cdot 30\ \% = 24$$

$$X = \frac{A \cdot B\ \%}{100\ \%}$$

Нахождение числа по его процентам.

Чтобы найти число X по его процентам A%, нужно число B, составляющее данное количество процентов, умножить на 100% и разделить на количество процентов.

40% неизвестного числа равны 20. найдите исходное число

$$X \quad - \quad 100\%$$
$$40\%$$

$$x=\frac{20 \cdot 100\ \%}{40\ \%}=50$$

$$x=\frac{B \cdot 100\ \%}{A\%}$$

Нахождение процентного отношения чисел.
Чтобы найти процентное соотношение чисел А и В, нужно одно число разделить на другое число и умножить на 100%
Пример : Найдите процентное соотношение чисел 16 и 80

$$16 \quad - \quad 100\%$$
$$x\%$$

$$x\%=\frac{80}{16}100\ \%=500\ \%$$

$$x\%=\frac{A}{B}\cdot 100\ \%$$

Пример 1
Работникам предприятия повысили заработную плату на 30%, а затем еще на 25 %. На сколько всего повысилась заработная плата по сравнению с первоначальной?

Решение:

X –первоначальная зарплата работников.
Найдем зарплату после первого повышения :

$$X \quad - \quad 100\%$$
$$? \quad 130\%$$

$$?=\frac{X \cdot 130\ \%}{100\ \%}=1{,}3X$$

Найдем зарплату после второго повышения:

$$1{,}3X \quad - \quad 100\%$$
$$? \quad 125\%$$

$$?=\frac{1{,}3X \cdot 125\ \%}{100\ \%}=1{,}625\ X$$

Итак, зарплата выросла на $1{,}625\ X - X = X(1{,}625 - 1) = 0{,}625\ X$

Найдем процентное выражение повышения зарплаты

X - 100%

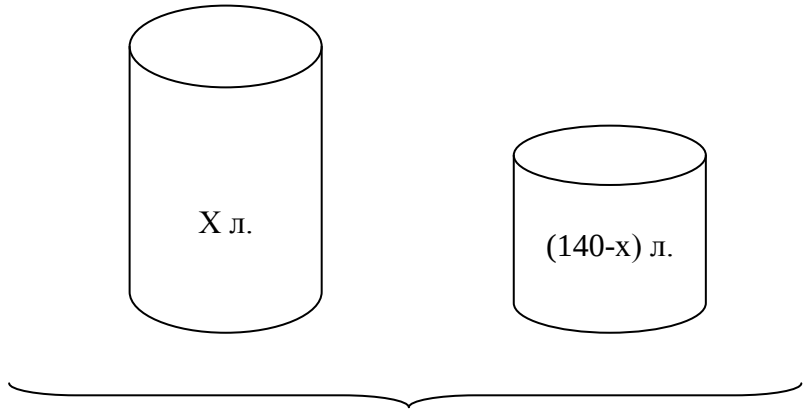
0,625X ?%

$$?\% = \frac{0,625\ X \cdot 100\ \%}{X} = 62,5\%$$

Ответ: Зарплата повысилась на 62,5%

Пример 2

В двух сосудах находится вода общим объемом 140 литров. Если из первого сосуда перелить 12,5% воды, находящегося в нем, во второй сосуд, то воды в обоих сосудах станет поровну.



Пусть в первом сосуде X литров воды. Тогда во втором сосуде (140-X) литров.

Найдем 12,5% от количества воды, находящейся в первом сосуде.

$$T = \frac{A \cdot B\%}{100\ \%}$$

$$T = \frac{X \cdot 12,5\%}{100\ \%} = 0,125\ X$$ воды перелили во второй сосуд.

В первом сосуде осталось X-0,125X=0,875X л. воды

Во втором сосуде стало (140-X)+0,125Xлитров воды

Количество воды в первом и втором сосуде после переливания стало поровну.
Решим полученное уравнение

0,875X=(140-X)+0,125X
0,875X=140-0,875X
0,875X+0,875X=140
1,75X=140
X=140:1,75
X=80 литров в первом сосуде.
140-80=60 литров во втором сосуде.
0,125*80=10 литров перелили из первого сосуда во второй.
В сосудах стало по 70 литров воды.
Ответ: 80л. и 60л.

Пример 3
Автовладелец решил продать два своих новых автомобиля . Он купил их по цене 205000 рублей вместе, а продал, получив 40% чистой прибыли.
По какой цене автовладелец приобретал каждый из автомобилей, если при продаже с первого он получил 25% прибыли, а со второго 50% прибыли?

Решение:

Пусть X-стоимость первого автомобиля,
Тогда (205000-X) - стоимость второго автомобиля
Прибыль составила

$$П = \frac{A \cdot B\,\%}{100\ \%} = \frac{205000 \cdot 40\ \%}{100\ \%} = 82000$$

$$П_1 = \frac{A_1 \cdot B_1\,\%}{100\ \%} = \frac{X \cdot 25\ \%}{100\ \%} = 0,25\ X$$

$$П_2 = \frac{A_2 \cdot B_2\ \%}{100\ \%} = \frac{(205000 - X) \cdot 50\ \%}{100\ \%} = 0,5(205000 - X) =$$

$$= 102500 - 0,5X$$

☺ Итак, составим уравнение

$$П_1 + П_2 = П$$

0,25X+102500-0,5X=82000
-0,25X=82000-102500
-0,25X=-20500

X=82000

205000-82000=123000
Ответ: Стоимость первого автомобиля 82000 рублей,
Стоимость второго автомобиля 123000рублей.
Задача 4.

Два слитка сплава золота и серебра имеют различное процентное содержание золота.
Первый слиток имеет массу килограмм и соотношение золота и серебра 2:3, а второй слиток имеет массу 2 килограмма и соотношение золота и серебра 1:3. Оба слитка сплавили вместе. Каким стало процентное содержание золота в последнем слитке?

☺ Масса слитка, полученного после плавки

$$M_{общ} = M_1 + M_2 = 6 + 3 = 9 \text{ кг.}$$

☺ Найдем массу золота в первом слитке:
Всего первый слиток делится на 2+3=5 частей.
На каждую часть приходится 6кг:5частей=1,2 кг.
Так как в первом слитке золота всего две части , значит, масса золота в первом слитке равна 2 части *1,2кг.=2,4 кг.
☺ Второй слиток делится на 1+3=4 части.
На каждую часть приходится 2кг:4части=0,5 кг.
На золото приходится 1 часть*0,5 кг=0,5кг.золота
☺ Итак, общая масса золота в двух слитках составляет:

$$Мз_1 + Мз_2 = 2,4 + 0,5 = 2,9 \text{ кг.}$$

☺ Нахождение процентного отношения чисел.

Чтобы найти процентное соотношение чисел А и В, нужно одно число разделить на другое число и умножить на 100%

$$З\% = \frac{Мз_{общ}}{M_{общ}} = \frac{2,9}{9} \cdot 100\ \% = 32,22\ \%$$

Ответ: Золота в общем слитке 32,22%

3. Точные и приближенные вычисления

Числа, выражающие точные значения величин, называются точными числами.

Числа, выражающие приближенные значения величин, называются приближенными числами.

Пример

Технические данные вертолета МИ

1. Число посадочных мест 26- точное число, так как можно число мест пересчитать
2. Масса не нагруженного вертолета 7,5 тонн- приближенное число, так как происходит округление, а килограммы, граммы и т.д. не учитываются
3. Крейсерская скорость 200 км/час- также приближенная величина
4. Число газотурбинных двигателей 2- точная величина.

Разность между точным числом х и его приближенным значением а называется погрешностью приближения.

х- точное значение величины

а- приближенное значение

х-а – погрешность приближения

Пример

скорость машины точная х =207 км/час

скорость машины приближенная а =200 км/час

погрешность приближения х-а =207-200=7 км/час

☺ Если погрешность приближения положительная, то приближение взято с недостатком.

длина юбки точная х =43 см

длина юбки приближенная а =40 см
погрешность приближения х-а =43-40=3 см

- ☺ Если погрешность приближения отрицательная, то приближение взято с избытком.

ширина стола точная х =78 см
ширина стола приближенная а =80 см
погрешность приближения х-а =78-80= -2 см
Модуль погрешности приближении называются абсолютной погрешностью
!х-а!

Способы записи приближенного числа

Цифра приближенного числа, записанного в виде десятичной дроби, называется верной (точной) , если абсолютная погрешность приближения не превышает единицы того разряда, в котором стоит эта цифра, в противном случае она называется сомнительной.

Стандартный вид записи числа $x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_m \cdot 10^n$

Пример

$238300 = 2,38300 \cdot 10^5$

$73946 = 7,3946 \cdot 10^4$

$2835,427 = 2,835427 \cdot 10^3$

$0,0006835 = 6,835 \cdot 10^{-4}$

Округление чисел

Если число, записанное в виде десятичной дроби, содержит только верные цифры, то цифры, начиная с первой слева, отличные от нуля, называются значащими цифрами.
Чтобы округлить число до n- ого разряда, нужно цифры, стоящие правее этого разряда, отбросить, если н меньше нуля и заменить нулями, если n больше нуля

Округление с недостатком и округление с избытком

Если цифру нужного разряда увеличиваем на единицу, то получаем округление с избытком

Если цифру нужного разряда оставляем прежней, то получаем округление с недостатком

Округление с наименьшей погрешностью

Если не оговорено, какое округление производить, то будем считать, что нужно взять округление с недостатком, если следующая цифра меньше пяти и с избытком, если больше или равна пяти. Такое округление называется округлением с наименьшей погрешностью.

Относительная погрешность и ее границы

Относительная погрешность является показателем качества данного приближения и ее часто выражают в процентах.

Практические приемы приближенных вычислений.

- ☺ При сложении двух приближенных величин погрешности складываются
- ☺ При вычитании двух приближенных величин погрешности складываются
- ☺ При умножении приближенных величин погрешности умножаются на приближенные вычисления, а результаты складываются

Образец заполнения таблицы

а	Δ_a	в	$\Delta_в$	А+в	$\Delta_a + \Delta_в$	(А+в)-($\Delta_a + \Delta_в$)	(А+в)+($\Delta_a + \Delta_в$)

а	Δ_a	в	$\Delta_в$	А+в	$\Delta_a + \Delta_в$	(А-в)-($\Delta_a + \Delta_в$)	(А-в)+($\Delta_a + \Delta_в$)

$$(a+b)-(\Delta a+\Delta b) \le x+y \le (a+b)+(\Delta a+\Delta b)$$

$$(a-b)-(\Delta a+\Delta b) \le x-y \le (a-b)+(\Delta a+\Delta b)$$

$$(a\cdot b)-(a\cdot\Delta b+b\cdot\Delta a) \le x\cdot y \le (a\cdot b)+(a\cdot\Delta b+b\cdot\Delta a)$$

$$\frac{a}{b}-\frac{a\cdot\Delta b+b\cdot\Delta a}{b^2} \le \frac{x}{y} \le \frac{a}{b}+\frac{a\cdot\Delta b+b\cdot\Delta a}{b^2}$$

4. Комплексные числа

Комплексные числа являются расширением множества действительных чисел.

Они возникли при решении уравнений, содержащих корень четной степени из отрицательных чисел.

$\sqrt{-1} = i$ - мнимая единица

$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i = 2i$

$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3 \cdot i = 3i$

$\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4 \cdot i = 4i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5 \cdot i = 5i$

$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6 \cdot i = 6i$

Алгебраическая форма записи комплексного числа имеет вид : x+yi , где x - действительная часть числа, y - мнимая часть числа,i-мнимая единица.

$z = 2 + 3i \quad \Rightarrow x = 2 \quad y = 3$

$z = 7 + 6i \quad \Rightarrow x = 7 \quad y = 6$

$z = 1 - 8i \quad \Rightarrow x = 1 \quad y = -8$

$z = -9 - 7i \quad \Rightarrow x = -9 \quad y = -7$

$z = 4i = 0 + 4i \quad \Rightarrow x = 0 \quad y = 4$

$z = 2 = 2 + 0i \quad \Rightarrow x = 2 \quad y = 0$

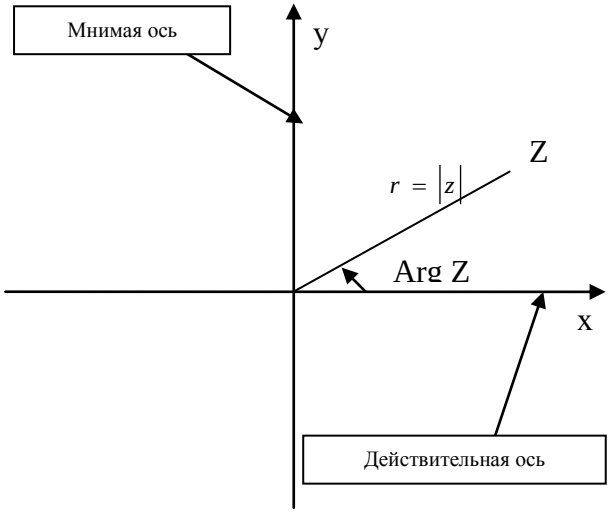
Любое комплексное число можно изобразить точкой на комплексной плоскости.

Комплексная плоскость изображается с помощью двух взаимно-перпендикулярных пересекающихся прямых, на которых выбрано положительное направление, выбрана единица измерения, размечены шкалы.

Оси координат на комплексной плоскости имеют свои названия.

Горизонтальная ось ox называется действительной осью и на ней отмечаются действительные части комплексных чисел.

Вертикальная ось oy называется мнимой осью и на ней отмечаются мнимые части комплексных чисел.



Радиус- вектором комплексного числа называется вектор, соединяющий начало координат комплексной плоскости с точкой, изображающей комплексное число.
Модулем комплексного числа называется длина радиус- вектора.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$z = 3 + 4i$

$$\Rightarrow x = 3 \quad y = 4 \quad \Rightarrow r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$z = 8 + 6i$

$$\Rightarrow x = 8 \quad y = 6 \quad \Rightarrow r = |z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$z = 4 - 3i$

$$\Rightarrow x = 4 \quad y = -3 \quad \Rightarrow r = |z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Аргументом комплексного числа называется угол между радиус-вектором комплексного числа и положительным направлением оси ох.

$$\varphi = arctg \frac{y}{x}$$

$$z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$$

$$x = 1 \qquad y = \sqrt{3}$$

$$\varphi = arctg \ \frac{y}{x} = arctg \ \frac{\sqrt{3}}{1} = arctg \ \sqrt{3} = 60^{\circ}$$

$$z = 2 + 2 \cdot i$$

$$x = 2 \qquad y = 2$$

$$\varphi = arctg \ \frac{y}{x} = arctg \ \frac{2}{2} = arctg \ 1 = 45^{\circ}$$

$$z = \sqrt{3} + 1 \cdot i$$

$$x = \sqrt{3} \qquad y = 1$$

$$\varphi = arctg \ \frac{y}{x} = arctg \ \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^{\circ}$$

Тригонометрическая форма записи

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Пример:

Пусть дано комплексное число. Записать его в тригонометрической форме

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} \cdot i$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = arctg \ \frac{y}{x}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad y = \frac{1}{4}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\ \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = arctg\ \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$$

$$z = |z| \cdot (\cos\ \varphi + i \cdot \sin\ \varphi)$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot (\cos\ 30^\circ + i \cdot \sin\ 30^\circ)$$

Показательная форма записи

$$z = e^{i\varphi}$$

$$z = \frac{1}{2} \cdot e^{30^\circ \cdot i}$$

Действия с комплексными числами

Комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить, возводить в степень, извлекать корни любой степени

1) Чтобы сложить два комплексных числа, нужно сложить их действительные части и сложить мнимые части.

$$z_1 = (2 + 3i)$$

$$z_2 = (5 + 4i)$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 + 4i) = (2 + 5) + (3 + 4)i = 7 + 7i$$

2) Чтобы найти разность двух комплексных чисел, нужно из действительной части первого числа вычесть действительную часть второго числа и из мнимой части первого числа вычесть мнимую часть второго числа.

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 + 4i) = (2 - 5) + (3 - 4)i = -3 - 1 \cdot i$$

3) Чтобы умножить два комплексных числа, нужно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) =$$

$$= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i =$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (5 + 4i) =$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4i + 3i \cdot 5 + 3i \cdot 4i = 10 + 8i + 15 \cdot i + 12\, i^2 =$$

$$= 10 + 23 \cdot i - 12 = -2 + 23 \cdot i$$

4) Чтобы разделить два комплексных числа, нужно деление записать в виде дроби, умножить числитель и знаменатель дроби на комплексно- сопряженное знаменателю число, , выполнить умножение , выделить действительную и мнимую часть комплексного числа

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)} = \frac{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i) \cdot (x_2 - y_2 i)} =$$

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 - y_1 i \cdot y_2 i}{(x_2)^2 - (y_2 i)^2} =$$

$$= \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + (-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) i}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 3i)}{(5 + 4i)} = \frac{(2 + 3i) \cdot (5 - 4i)}{(5 + 4i) \cdot (5 - 4i)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 5 - 2 \cdot 4i + 3i \cdot 5 - 3i \cdot 4i}{(5)^2 - (4i)^2} =$$

$$= \frac{10 - 8i + 15i + 12}{25 + 16} = \frac{22 + 7i}{41} = \frac{22}{41} + \frac{7}{41} i$$

Извлечение корней из комплексных чисел проводится по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\psi + 360^\circ \cdot k}{n} + i \cdot \sin \frac{\psi + 360^\circ \cdot k}{n} \right)$$

Пример

$z = (\sqrt{3} + i)$ алгебраическая форма записи комплексного числа

$$w^3 = z$$

$$w^3 = \sqrt{3} + 1i$$

$$w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1 \cdot i}$$

$$\left| - z \right| = \sqrt{(x)^2 + (- y)^2}$$

$$x_1 = \sqrt{3} \qquad y_1 = 1$$

$$\left| z \right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\psi = arctg \quad \frac{y_1}{x_1} = arctg \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ 3$$

$$w_k = \sqrt[n]{\left| z \right|} \cdot \left(\cos \frac{\psi + 360^\circ \cdot k}{n} + i \cdot \sin \frac{\psi + 360^\circ \cdot k}{n} \right)$$

3

$$w_0 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{30^\circ + 360^\circ \cdot 0}{3} + i \cdot \sin \frac{30^\circ + 360^\circ \cdot 0}{3} \right) =$$

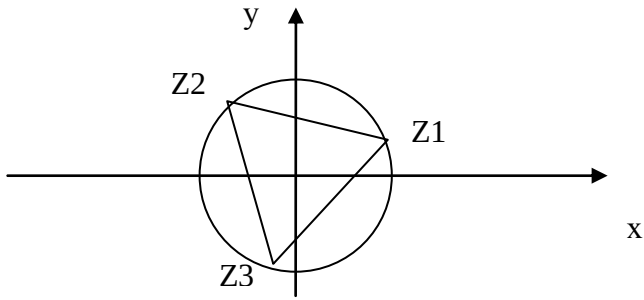
$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos 10^\circ + i \cdot \sin 10^\circ \right)$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{30^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3} + i \cdot \sin \frac{30^\circ + 360^\circ \cdot 1}{3} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos 130^\circ + i \cdot \sin 130^\circ \right)$$

$$w_3 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{30^\circ + 360^\circ \cdot 2}{3} + i \cdot \sin \frac{30^\circ + 360^\circ \cdot 2}{3} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos 250^\circ + i \cdot \sin 250^\circ \right)$$

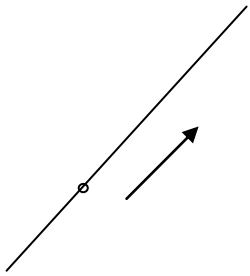


5. Элементы аналитической геометрии. Векторы, действия над векторами. Линии на плоскости и в пространстве. Кривые второго порядка.

Уравнения прямых на плоскости и в пространстве

Способы задания прямых

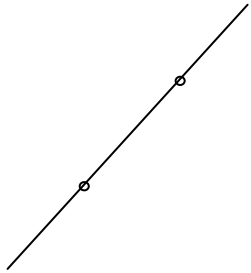
1. Прямая задана точкой и направляющим вектором



$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$

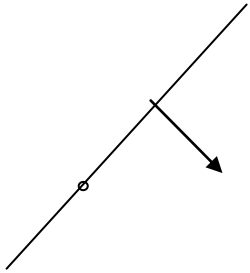
2. Прямая задана двумя точками



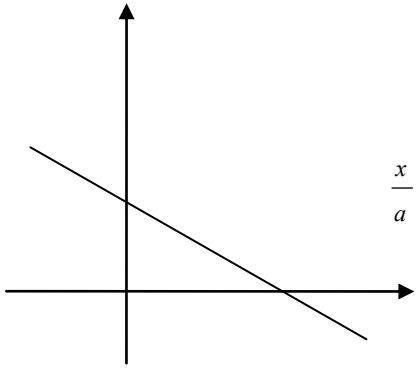
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + p \cdot t \end{cases}$$

3. Прямая задана точкой и вектором, перпендикулярным данной прямой



4. Прямая задана отрезками, отсекаемыми ей на координатных осях(прямая в отрезках)



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{в} = 1$$

Векторы, действия над векторами

Вектор- это отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Обозначение $\vec{a}$, $\overline{a}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$

Последовательность чисел называют н мерным вектором.

Количество координат у вектора называют его размерностью.

Вектор называют нулевым, если все его координаты равны нулю.

Векторы называются коллинеарными, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

Векторы называются ортогональными, если находятся на взаимно перпендикулярных прямых.
Коллинеарные векторы называются сонаправленными, если они имеют одинаковое направление и противоположно направленными, если они имеют разные направления.
Два коллинеарных вектора называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.
Если два вектора попарно равны третьему вектору, то они равны между собой.
Любой вектор равен самому себе.

Действия над векторами.

Векторы можно
складывать, вычитать, умножать на число, умножать скалярно, умножать векторно, находить смешанное произведение векторов, находить длину векторов.
Суммой двух векторов называется вектор, координаты которого находятся как сумма соответствующих координат исходных векторов.

$$\vec{a} + \vec{в} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

Разностью двух векторов называется вектор, координаты которого находятся как разность соответствующих координат исходных векторов.

$$\vec{a} - \vec{в} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$$

Сумма любого вектора X и нулевого вектора равна исходному вектору X.
Чтобы умножить вектор на число, нужно каждую координату вектора умножить на это число.

$$к\vec{a} = (кx; ку; кz)$$

Если мы умножим вектор на число(-1), то получим противоположный вектор.

$-1\vec{a} = (-x;-y;-z) = -\vec{a}$

Чтобы найти длину вектора, нужно его координаты возвести в квадрат, сложить результаты и найти квадратный корень из результата. Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов координат.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число.

1. При сложении векторов выполняется коммутативный закон сложения.

$\vec{a} + \vec{в} = \vec{в} + \vec{a}$

2. Выполняется ассоциативный закон сложения векторов (сочетательный закон - скобки при сложении нескольких величин можно ставить в любом порядке)

$\vec{a} + (\vec{в} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{в}) + \vec{c}$

3.Сумма векторов, умноженная на число, равна сумме произведений каждого из векторов на это число.

$К(\vec{a} + \vec{в}) = К\vec{a} + К\vec{в}$

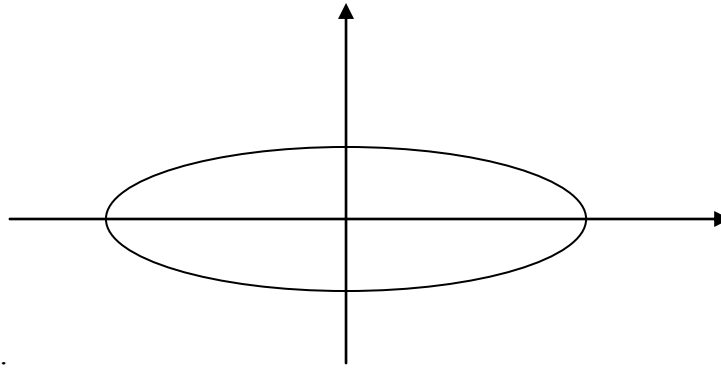
Кривые второго порядка

Окружность-это геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки- центра окружности.

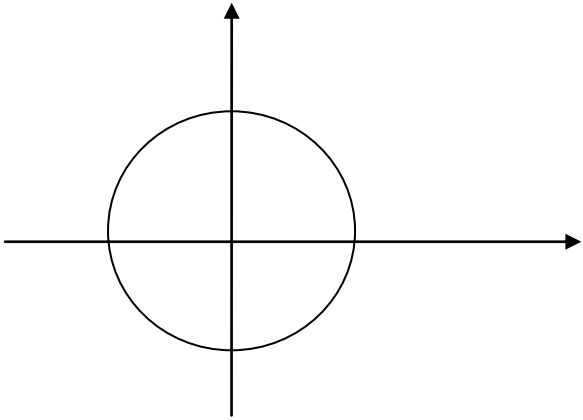
Эллипс- это геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек-фокусов эллипса, всегда постоянна и равна 2а.

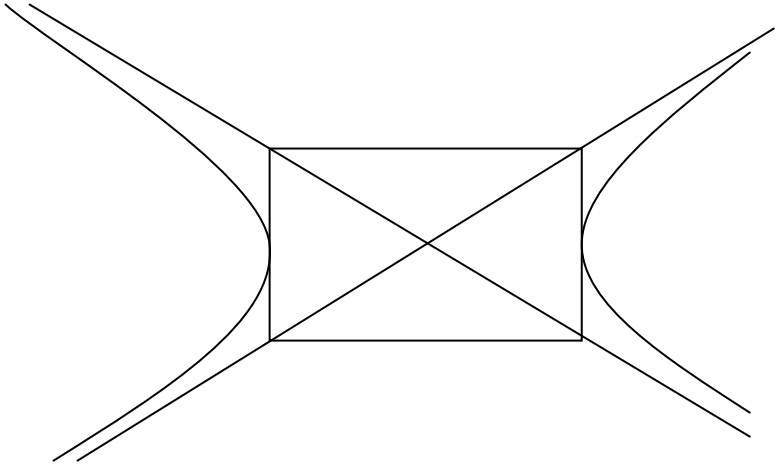
Гипербола- это геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек-фокусов гиперболы, всегда постоянна и равна 2а.

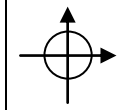
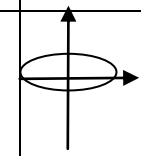
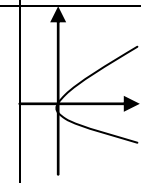
Парабола- это геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки- фокуса параболы до данной прямой- директрисы



параболы.





Название кривой	Каноническое уравнение	Параметрическое уравнение	Чертеж
Окружность	$x^2 + y^2 = R^2$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$	
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$	
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\begin{cases} x = acht \\ y = bsht \end{cases}$ $\begin{cases} x = a\frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = b\frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$	
Парабола	$x^2 = 2qy$ $x^2 = -2qy$ $y^2 = 2px$ $y^2 = -2px$	$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$	

6. Последовательности. Предел и непрерывность.

Пределы. Правила вычисления пределов

Числовой последовательностью называется последовательность чисел, найденных по определенным правилам.

Примеры числовых последовательностей:

1,3,5,7,9,11…арифметическая прогрессия

Предел числовой последовательности - это число, к которому стремятся члены числовой последовательности при увеличении номеров членов последовательности.

Пределом числовой последовательности называется число А, в окрестности которого находятся все члены числовой последовательности, начиная с некоторого номера.

Окрестность данного числа должна быть достаточно малой.

Основные теоремы о пределах

1) Предел постоянного числа есть постоянное число.

$$\lim_{x \to a} C = C \qquad C - const$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to a} Cf(x) = C \lim_{x \to a} f(x)$$

3) Предел суммы или разности равен суммы или разности пределов.

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

4) Предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

5) При вычислении предела степени находим предел основания и предел показателя степени.

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

Правило1

Если $x \to \infty$ и под знаком предела стоит дробь, в числителе и в знаменателе которой стоят многочлены, тогда делим числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень переменной.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^3+x^2)}{(1+7x+x^3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3})}{(\frac{1}{x^3}+\frac{7x}{x^3}+\frac{x^3}{x^3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(5+\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x^3}+\frac{7}{x^2}+1)}=$$

$$=\frac{(5+\frac{1}{\infty})}{(\frac{1}{\infty^3}+\frac{7}{\infty^2}+1)}=\frac{5+0}{0+0+1}=5$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(8x+6x^2)}{(3+7x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{8x}{x^2}+\frac{6x^2}{x^2})}{(\frac{3}{x^2}+\frac{7x}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{8}{x}+6)}{(\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x})}=$$

$$=\frac{(\frac{8}{\infty}+6)}{(\frac{3}{\infty^2}+\frac{7}{\infty})}=\frac{0+6}{0+0}=\frac{6}{0}=\infty$$

Правило 2

Если X стремится к нулю и под знаком предела имеем следующие выражения sin x, tg x, arcsin x, arctg x, $\ln(1+x)$, (e^x-1)

то их можно заменить на соответствующие эквивалентные бесконечно малые величины.

ТАБЛИЦА ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ

$\sin ax \approx ax$

$tgax \approx ax$

$\arcsin ax \approx ax$

$arctgax \approx ax$

$\ln(1+ax) \approx ax$

$(e^{ax}-1) \approx ax$

Пример 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\arcsin 5x}=\left|\begin{matrix}при & x\to 0\\ \arcsin 5x\approx 5x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,9x}{\sin 5x}=\left|\begin{matrix}при & x\to 0\\ \sin 5x\approx 5x\\ tg\,9x\approx 9x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{9x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{9}{5}=\frac{9}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+8x)}=\left|\begin{matrix}при & x\to 0\\ e^{3x}-1\approx 3x\\ \ln(1+8x)\approx 8x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ 11x}{\cos 5x}=\left|\begin{matrix}при & x\to 0\\ artg\ 11x\approx 11x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{11x}{\cos 5x}=\frac{11\cdot 0}{\cos 5\cdot 0}=\frac{0}{1}=0$$

Предел постоянного числа есть постоянное число

Правило 3

Если X стремится к a, где a постоянное число, и под знаком предела находится дробь, в числителе или знаменателе которой стоит выражение , содержащее разность корней ,при этом возникает неопределенность 0/0, то числитель и знаменатель дроби умножаем на сумму корней/ в случае разности кубических корней умножаем на неполный квадрат суммы корней/. В результате получаем разность квадратов или разность кубов и избавляемся от иррациональности выражений, приводим подобные слагаемые, выносим общие множители за скобки, сокращаем выражения

Пример 4

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}=$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 3^2}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} = \lim_{x \to 8} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 3^2}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{x+1-9}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} = \lim_{x \to 8} \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+3)} = \frac{1}{\sqrt{8+1}+3} = \frac{1}{6}$$

Правило 5

Если $X \to \infty$ или $x \longrightarrow 0$ и получаем неопределенность

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ или, то можем использовать правило Лопиталя.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Предел отношения двух функций равен пределу отношения производных этих функций.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(5x^3 + x^2)}{(1 + 7x + x^3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{(5x^3 + x^2)'}{(1 + 7x + x^3)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{(15x^2 + 2x)}{(7 + 3x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(15x^2 + 2x)'}{(7 + 3x^2)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{(30x + 2)}{(6x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{(30x + 2)'}{(6x)'} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{30}{6} = \lim_{x \to \infty} 5 = 5$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если односторонние пределы функции в данной точке не равны между собой.

Функция называется ограниченной сверху, если все значения данной функции меньше или равны некоторого числа M , называющегося верхней границей функции.

Функция называется ограниченной снизу, если все значения данной функции больше или равны некоторого числа м , называющегося нижней границей функции.
Функция называется ограниченной, если существуют нижняя и верхняя границы.
Число А называется пределом функции в точке, если для любого числа E>0 существует B>0, такое, что для всех x выполняются неравенства: модуль разности между точками x и x нулевое меньше B, и модуль разности между значениями функции в этих точках соответственно меньше E.

Виды точек разрыва функции:

1. Точка разрыва первого рода

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если односторонние пределы принимают постоянные значения, не равные между собой.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \neq \lim_{x \to a+0} f(x)$$

2.Точка разрыва второго рода

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов принимает значение, равное $+\infty$ или $-\infty$.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$$

3. Точка устранимого разрыва.

Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если односторонние пределы принимают постоянные значения, равные между собой, а значение функции в данной точке отлично от значений односторонних пределов или вообще не определено.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$$

7. Производные и их приложения.

Определение: Производной функции y = f(x) называется конечный предел приращения функции к приращению аргумента.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Пример:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = (2x + 0) = 2x$$

Производные элементарных функций	Производные сложных функций
$C' = 0$	$C' = 0$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'_x$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u u'_x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'_x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$
$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'_x$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'_x$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'_x$

$$y' = \left(\cos\left(x^2+1\right)\right)' = \boxed{(\cos\ u)' = -\sin\ u \cdot u'_x} =$$

$$= \left(-\sin(\ x^2+1)\right)\cdot(x^2+1)' = \left(-\sin(\ x^2+1)\right)\cdot 2x = -2x\sin(\ x^2+1)$$

$$y' = \left(\sin\left(x^2+1\right)\right)' = \boxed{(\sin\ u)' = \cos\ u \cdot u'_x} =$$

$$= \left(\cos(\ x^2+1)\right)\cdot(7x+5)' = \left(\cos(\ 7x+5)\right)\cdot 7 = 7\left(\cos(\ 7x+5)\right)$$

$$y' = \left(e^{3x+4}\right)' = \boxed{(e^u)' = e^u u'_x} = \left(e^{3x+4}\right)\cdot\left(3x+4\right)' = \left(e^{3x+4}\right)\cdot 4 =$$

$$= 4\cdot e^{3x+4}$$

$$y' = \left(5^{2x+8}\right)' = \boxed{(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'_x} = \left(5^{2x+8}\right)\cdot \ln 5 \cdot \left(2x+8\right)' =$$

$$= \left(5^{2x+8}\right)\cdot \ln 5 \cdot 2 = 2\cdot 5^{2x+8}\cdot \ln 5$$

$$y' = \left(tg\left(x^3+4\right)\right)' = \boxed{(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'_x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(x^3+4\right)}\cdot\left(x^3+4\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x^3+4\right)}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\cos^2\left(x^3+4\right)}$$

$$y' = \left(5x^6 + e^x + \ln 2\right)' = \left(5x^6\right)' + \left(e^x\right)' + \left(\ln 2\right)' =$$

$$= 5\cdot 6\cdot x^5 + e^x + 0 = 30\cdot x^5 + e^x$$

$$y' = \left(\sqrt{x}\cdot\cos\ x\right)' = \boxed{\left[(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'\right]} =$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\cos\ x + \sqrt{x}\cdot(\cos\ x)' =$$

$$= \left(\sqrt{x}\right)'\cdot\cos\ x + \sqrt{x}\cdot(\cos\ x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\ x + \sqrt{x}\cdot(-\sin\ x) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\ x - \sqrt{x}\cdot\sin\ x$$

$$y' = \left(\frac{2x^2+3}{4+x}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}\right] =$$

$$\frac{\left(2x^2+3\right)'\cdot(4+x) - \left(2x^2+3\right)\cdot(4+x)'}{(4+x)^2} =$$

$$= \frac{(2\cdot 2x+0)\cdot(4+x) - \left(2x^2+3\right)\cdot(0+1)}{(4+x)^2} = \frac{4x\cdot(4+x) - \left(2x^2+3\right)\cdot 1}{(4+x)^2} =$$

$$\frac{16x+4x^2-2x^2-3}{(4+x)^2} = = \frac{16x+2x^2-3}{(4+x)^2}$$

$$y' = \left(\left(\sin^3 x\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)' = \boxed{(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'} =$$

$$= \left(\sin^3 x\right)'\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin^3 x\cdot\left(\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)' =$$

$$= 3\cdot\sin^2 x\cdot(\sin x)'\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin^3 x\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' =$$

$$= 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \sin^3 x\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= 3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{3}\sin^3 x\cdot\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$y' = \left(e^{2x}\cdot\cos(2x)\right)' = \boxed{(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'} =$$

$$\left(e^{2x}\right)'\cdot\cos(2x) + e^{2x}\cdot(\cos(2x))' =$$

$$= e^{2x}\cdot(2x)'\cdot\cos(2x) + e^{2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot(2x)' =$$

$$e^{2x}\cdot 2\cdot\cos(2x) + e^{2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 =$$

$$= 2\cdot e^{2x}(\cos(2x) - \sin(2x))$$

$$y' = \left(\frac{e^{x^2}}{\sin x} \right)' = \left[\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \right] = \frac{\left(e^{x^2}\right)' \cdot (\sin x) - e^{x^2} \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} =$$

$$\frac{\left(e^{x^2}\right)' \cdot (\sin x) - e^{x^2} \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = = \frac{e^{x^2}\left(x^2\right)' \cdot (\sin x) - e^{x^2} \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} =$$

$$= \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot (\sin x) - e^{x^2} \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{e^{x^2} \cdot (2x \cdot \sin x - \cos x)}{\cos^2 x}$$

$$y' = ((x+1) \cdot (x+2))' = \boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} =$$

$$(x+1)' \cdot (x+2) + (x+1) \cdot (x+2)' = = 1 \cdot (x+2) + (x+1) \cdot = x + 2 + x + 1$$

$$= 2x + 3$$

$$y' = \left(x \cdot e^x\right)' = \boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} = (x)' \cdot e^x + x \cdot \left(e^x\right)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

$$= e^x \cdot (1 + x)$$

$$y' = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} \right)' = \frac{\left(x^2 - 1\right)' \cdot (x+1) - \left(x^2 - 1\right) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{2x \cdot (x+1) - \left(x^2 - 1\right) \cdot 1}{(x+1)^2} = = \frac{2 \cdot x^2 + 2x - x^2 + 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = 1$$

Применение производных к решению геометрических задач

Название	Уравнение
Уравнение касательной к графику кривой	$y = y(x_0) + y(x_0) \cdot (x - x_0)$

Уравнение нормали к графику кривой	$y = y(x_0) - \frac{1}{y(x_0)} \cdot (x - x_0)$
Вычисление приближенного значения функции в точке с помощью дифференциала	$y(x) \approx y(x_0) + y(x_0) \cdot (x - x_0)$

1) Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$

$$\boxed{y = y(x_0) + y(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

$$y(x_0) = y(1) = 1^3 = 1$$

$$y' = \left(x^3\right)' = 3x^2$$

$$y'(x_0) = y'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$y = 1 + 3 \cdot (x - 1)$$

$y = 3x - 2$ Уравнение касательной

2) Найдите уравнение нормали к графику функции $y = x^4 + 2$ в точке x=1

$$\boxed{y = y(x_0) - \frac{1}{y(x_0)} \cdot (x - x_0)}$$ Уравнение нормали к графику функции

$$y(x_0) = y(1) = 1^4 + 2 = 3$$

$$y' = \left(x^4 + 2\right)' = 4x^3$$

$$y'(x_0) = y'(1) = 4 \cdot 1^3 = 4$$

$$y = 3 - \frac{1}{4} \cdot (x - 1)$$

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$ Уравнение нормали

3) Вычислите значение выражения $\sqrt{4,02}$

$y = \sqrt{x}$

x=4,02 $x_0 = 4$

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y(x_0) = y(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$y'(x_0) = y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$y(x) \approx y(x_0) + y(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\sqrt{4,02} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot (4,02 - 4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,02 = 2,005$$

☞ Производные применяются для решения физических задач:

☺ Производная функции пути , которая задает пройденный путь материальной точки с момента начала движения есть скорость.

$$v(t) = y' = f'(t)$$

☺ Производная скорости движения материальной точки есть ускорение

$$a(t) = v'(t) = y'' = f''(t)$$

8. Интеграл и первообразная. Определенный интеграл и его приложения.

Если производная функции известна, а сама функция не задана, данную функцию можно найти по производной.

📖 Обратная операция для нахождения производной функции (для операции дифференцирования) называется операцией интегрирования, а сама найденная функция называется первообразной**.**

📖 Если известна производная функции $y = f(x)$, то чтобы найти саму функцию, нужно проинтегрировать данную производную.

📖 Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$

📖 Любая функция $f(x)$ имеет множество первообразных $F(x)$, так как :

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

$$\left(x^2 - 8\right)' = 2x$$

$$\left(x^2 + 5\right)' = 2x$$

$$\left(x^2 - 11\right)' = 2x$$

$$\left(x^2 + C\right)' = 2x$$

$f(x) = 2x$ - функция

$F(x) = x^2 + C$ - первообразная

$$\int 2xdx = \frac{2x^2}{2} + C = x^2 + C$$

📖 Множество всех первообразных называется неопределенным интегралом

Таблица основных интегралов

$\int dx = x + C$.	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$.	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 + a} \right\rvert + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$	$\int \sin kx dx = \frac{-1}{k} \cos kx + C$.
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

Примеры

$\int x^7 dx = \frac{x^8}{8} + C$	$\int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + C$
$\int x^{142} dx = \frac{x^{143}}{143} + C$	$\int x^{\frac{42}{20}} dx = \frac{x^{\frac{62}{20}}}{\frac{62}{20}} + C$

$\int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C$	$\int x^{-13}dx = \frac{x^{-12}}{-12} + C$
$\int x^{-\frac{5}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C$	$\int x^{-\frac{11}{6}}dx = \frac{x^{-\frac{5}{6}}}{-\frac{5}{6}} + C$
$\int \sqrt[7]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{7}}dx = \frac{x^{\frac{9}{7}}}{\frac{9}{7}} + C = \frac{7}{9}x^{\frac{9}{7}} + C = \frac{7}{9}\sqrt[7]{x^9} + C$	

📖 Интегралом на отрезке называется приращение первообразной функции на данном отрезке

📖 Приращение первообразной не зависит от выбора первообразной .

📖 Обозначения: $\int_a^b f(x)dx$

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

2. Интеграл от суммы функций на отрезке равен сумме интегралов от этих функций на данном отрезке.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

3. Интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределом равен нулю.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

4. Если поменять местами верхний и нижний пределы интегрирования, то знак интеграла изменится на противоположный.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5. Интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям, составляющим этот отрезок.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. Формула Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Способы вычисления интегралов

1) Непосредственное интегрирование
2) Замена переменной (подстановка);
3) Интегрирование по частям;
4) Разложение на элементарные дроби.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot dx = \frac{-1}{2} \cdot \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{-1}{2} \cdot \cos(2 \cdot 0)$$

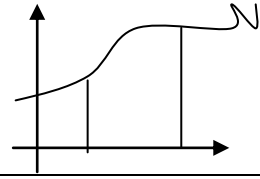
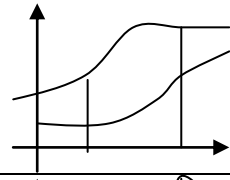
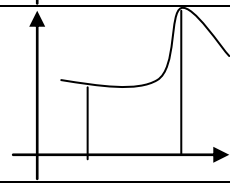
=

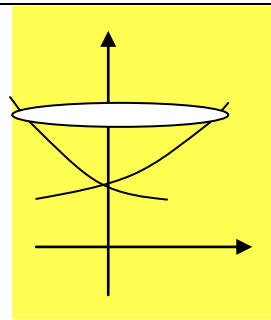
$$= \frac{-1}{2} \cdot \cos(\pi) + \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = \frac{-1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = (\sin x)' dx = \cos x dx \\ t_1 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 4 \cdot t^3 dt = \frac{4t^4}{4} \Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = t^4 \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{5}{16}$$

📖 Применение интегралов

Площади криволинейных трапеций	$S = \int_a^b y(x) dx$	
Площади фигур	$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx$	
Длины дуг кривых	$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$	

Объемы тел вращения вокруг осей координат	$V_{ox} = \pi \int_a^b (y^2_2(x) - y^2_1(x))\,dx$ $V_{oy} = 2\pi \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) \cdot x\,dx$	

Пример

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболами:

$y = 2x - x^2$

$y = (x-1)^2 - 1$

☺ Найдем точки пересечения

$2x - x^2 = (x-1)^2 - 1$

$2x - x^2 = x^2 - 2x + 1 - 1$

$-2x^2 + 4x = 0$

$-2x(x-2) = 0$

$x = 0 \quad$ *или* $\quad x = 2$

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx = \int_0^2 \left((2x - x^2) - ((x-1)^2 - 1)\right)dx =$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2 - (x^2 - 2x + 1 - 1))\,dx = \int_0^2 (2x - x^2 - x^2 + 2x))\,dx =$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx = (4\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3})\Big|_0^2 =$$

$$= \left(2 \cdot 2^2 - 2 \cdot \frac{2^3}{3} \right) - \left(2 \cdot 0^2 - 2 \cdot \frac{0^3}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

Ответ:8/3 кв.ед.

Пример 2

Применение формулы $\int x^n dx = x^{n+1} + C$

$$\int \frac{dx}{x \ln^5 x} = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5} dt = \frac{t^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-4t^4} + C =$$

$$= \frac{1}{-4 \ln^4 x} + C$$

Пример 3

Применение формулы $\left[\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \right]$

$$\int \frac{x^3 dx}{4 + x^4} = \left| \begin{array}{c} t = 4 + x^4 \\ dt = (4 + x^4)' dx = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{4}}{t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln |t| + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| 4 + x^4 \right| + C$$

Пример 4

Применение формулы $\left[\int e^x dx = e^x + C \right]$

$$\int e^{x-7} dx = \left| \begin{array}{c} t = x - 7 \\ dt = (x - 7)' dx = dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{x-7} + C$$

9. Системы счисления и их применение.

Любые натуральные числа можно записать в различных системах счисления.

Человечество не сразу пришло к использованию недесятичных систем счисления, потому что использование

десятичной системы счисления связано с использованием десяти пальцев на руках

При решении задач на перевод чисел в другую систему счисления применяют операцию деления с остатком

$235_{10} \rightarrow x_2$

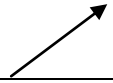
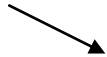
235	2 _ *остаток*	_ 1
117	2 _ *остаток*	_ 1
58	2 _ *остаток*	_ 0
29	2 _ *остаток*	_ 1
14	2 _ *остаток*	_ 0
7	2 _ *остаток*	_ 1
3	2 _ *остаток*	_ 1
1		

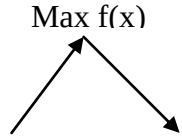
$235_{10} \rightarrow 1101011_2$

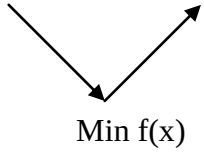
10. Функции и их свойства.

Функцией называется соответствие значения независимой переменной только одному значению зависимой переменной
Функции широко используются для научных и иных исследований

Для исследования функций часто применяются производные

Значение y'	Функция	
$y'(x) = 0$	Критическая точка 1 порядка	Может быть точкой экстремума
$y'(x) > 0$	возрастает	
$y'(x) < 0$	убывает	





Пример 1.

- Материальная точка движется прямолинейно. Пройденный путь задается формулой $y = f(t) = t^3 - 5t^2 + 2$
- скорость.
- $v(t) = y' = f'(t) = \left(t^3 - 5t^2 + 2\right)' = 3t^2 - 10t$
  - ускорение
- $a(t) = v'(t) = y'' = f''(t) = \left(3t^2 - 10t\right)' = 6t - 10$

Пример 2.
Найдите промежутки монотонности функции $y = f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

☺ Найдем производную функции

$$y' = f'(x) = \left(3x^3 + 3x^2 - 3x + 2\right)' = 9x^2 + 6x - 3$$

☺ Приравняем производную к нулю

$$y' = 0$$

$$9x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

☺ Найдем корни квадратного уравнения

$$Д = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$$

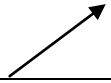
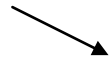
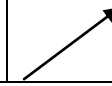
☺ У квадратного уравнения два корня

$$x_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-2-4}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

☺ Итак , производная функции имеет вид

$$y' = 9(x - \frac{2}{3})(x+1)$$

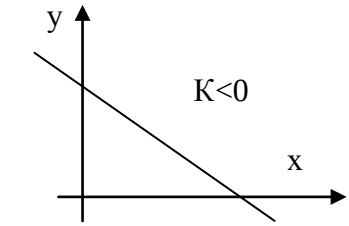
x	$(-\infty, -1)$	-1	$\left(-1, \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
y'	+	0	-	0	+
y		мах		мин	

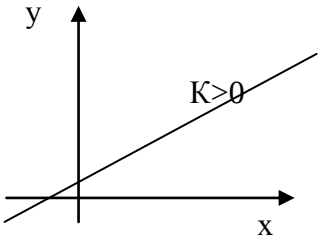
$$y_{мах} = f(-1) = 3(-1)^3 + 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = 5$$

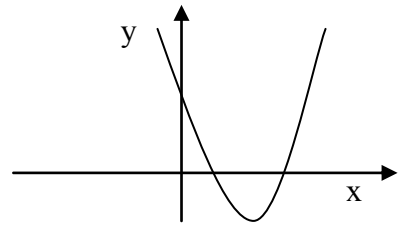
$$y_{мин} = f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{20}{9}$$

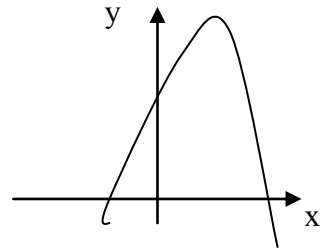
Исследование функций

Линейная функция $y = kx + b$	Квадратическая функция $y = ax^2 + bx + c$
1. $D(x) = (-\infty; +\infty)$ 2.не четная и не нечетная 3.не периодическая 4.если $k > 0$, то возрастающая если $k < 0$, то убывающая 5. График-прямая линия	1. $D(x) = (-\infty; +\infty)$ 2. не периодическая 3. График - парабола 4.если $a > 0$, то ветви вверх если $a < 0$, то ветви вниз





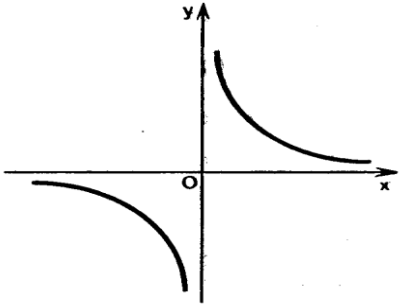




Обратная пропорциональность

$y = \frac{\kappa}{x}$

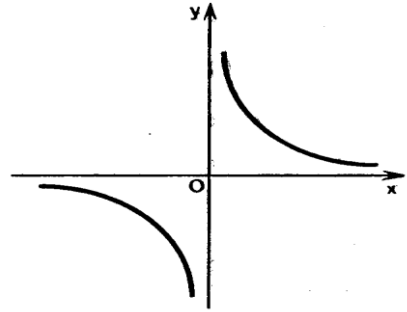
1. $D(x) = (-\infty;0) \cup (0,+\infty)$
2. не периодическая
3. нечетная
4. График – гипербола
5. если $\kappa > 0$, убывающая
   если $\kappa < 0$,
   возрастающая

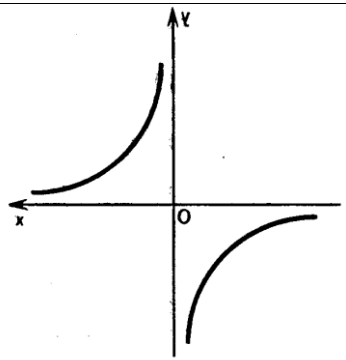


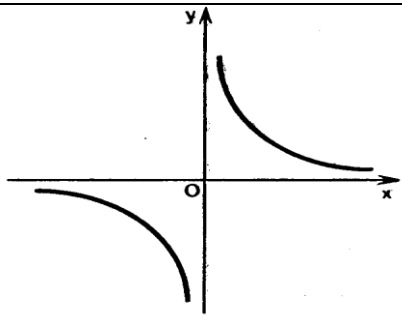
Дробно-линейная функция

$y = \frac{ax + b}{cx + d}$

1. $D(x) = (-\infty;-\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c},+\infty)$
2. не периодическая
3. График - гипербола



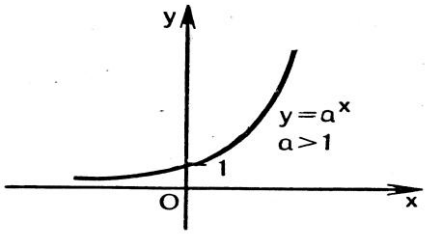


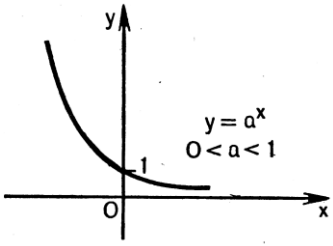


Показательная функция

$y = a^x$

1. $D(x) = (-\infty;+\infty)$
2. не четная и не нечетная
3. не периодическая
4. если $a > 1$, возрастает
   если $0 < a < 1$, убывает

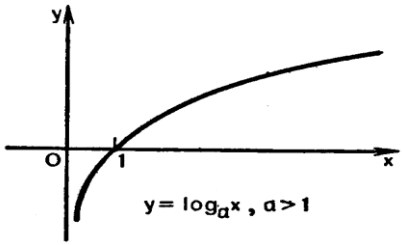


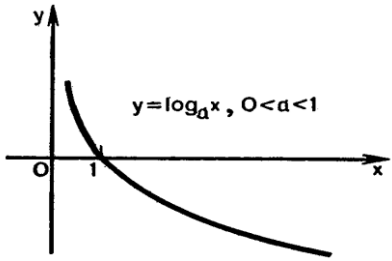


Логарифмическая функция

$y = \log_a x$

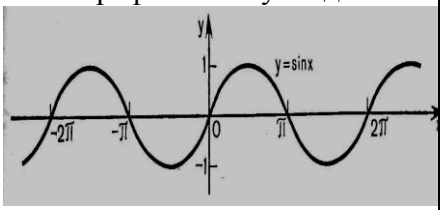
1. $D(x) = (-\infty;+\infty)$
2. не четная и не нечетная
3. не периодическая
4. если $a > 1$, возрастает
   если $0 < a < 1$, убывает





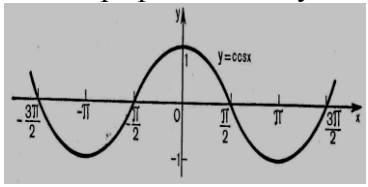
Функция y= sin x

1. $D(x) = (-\infty;+\infty)$
2. периодическая
3. нечетная.
4. График – синусоида



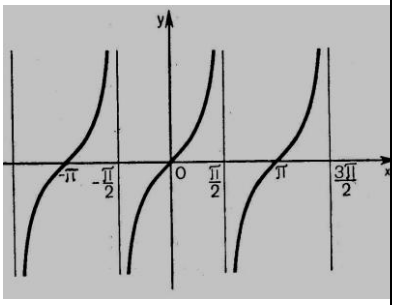
Функция y= cos x

1. $D(x) = (-\infty;+\infty)$
2. периодическая
3. четная.
4. График – косинусоида



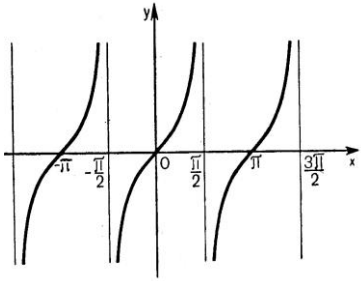
Функция y= tgx

1. $D(x) = (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$
2. периодическая
3. нечетная



Функция y= $ctg\ x$

1. $D(x) = (0 + \pi\grave{o}\ ;\ \pi + \pi\grave{o}\ )$
2. периодическая



- ✓ Функция называется четной, если
  1. Область определения этой функции симметрична относительно начала координат
  2. Выполняется свойство $y(-x) = y(x)$
- ✓ Функция называется нечетной, если
  1. Область определения этой функции симметрична относительно начала координат
  2. Выполняется свойство $y(-x) = -y(x)$
- ✓ Функция называется периодической, если существует такое число T, что выполняется свойство

$$y(x+T) = y(x-T) = y(x)$$

Полное исследование функции

Общая схема исследования:

1. Область определения
2. Точки пересечения с осями координат
3. Четность-нечетность, периодичность.
4. Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания функции.
5. Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости.
6. Асимптоты вертикальные и наклонные.
7. График.

Пример1

Провести полное исследование функции:

$y = x^3 - 3x^2 + 5$

1) Область определения

Д(х)= $(-\infty;+\infty)$

2) Точки пересечения с осями координат

С ось ох =>y=0

$y = x^3 - 3x^2 + 5$ =0 корень принадлежит отрезку (-2;-1)

(5,0)-точка пересечения с осью ох

3) Четность-нечетность, периодичность

$y(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 5 = -x^3 - 3x^2 + 5 \neq -y(x), \neq y(x)$ не четная и не нечетная, график не симметричен относительно оси оу и начала координат

Функция не содержит тригонометрических выражений- не является периодической.

4)Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания.

$y' = \left(x^3 - 3x^2 + 5\right)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
y'	+	0	-	0	-

y		5		1	

5)Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости

$y'' = \left(3x^2 - 6x\right)'$ =6x-6

y'' =0

6x-6 = 0

X=1

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;\infty)$
y''	-	0	+
y		1	

6) Асимптоты

У=кх+в

К= $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 5}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 - 3x + \dfrac{5}{x}\right) =$

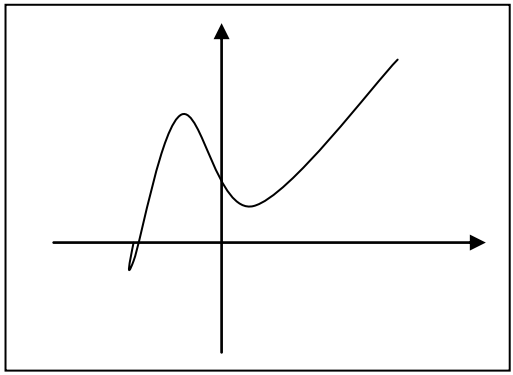
$= \infty^2 - 3\cdot\infty + \dfrac{1}{\infty} = \infty$

Наклонных асимптот нет

в= $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - kx$

Вертикальные асимптоты

Д(х)= $(-\infty;+\infty)$ точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет



Пример 2

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

3) Область определения

$x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$

Д(х)= $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$

4) Точки пересечения с осями координат

С ось ох =>y=0

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases}$$

(0,0)-точка пересечения с осями координат

3) Четность-нечетность, периодичность

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = y(x)$ четная, график симметричен относительно оси оу

Функция не содержит тригонометрических выражений- не является периодической.

4)Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{\left(x^2\right)' \cdot \left(x^2 - 1\right) - \left(x^2\right) \cdot \left(x^2 - 1\right)'}{\left(x^2 - 1\right)^2} =$$

$$\frac{2x \cdot \left(x^2 - 1\right) - \left(x^2\right) \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = = \frac{2x \cdot \left(x^2 - 1 - x^2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

$$\frac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ \left(x^2 - 1\right)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases}$$

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	+	Не опр	+	0	-	Не опр	-
y	↗	Не опр	↗	0	↘	Не опр	↘

5)Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости

$$y'' = \left(\frac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} \right)'' = \frac{\left(-2x\right)' \cdot \left(x^2 - 1\right)^2 - \left(-2x\right) \cdot \left(\left(x^2 - 1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2 - 1\right)^2\right)^2} =$$

$$\frac{-2 \cdot \left(x^2 - 1\right)^2 + 2x \cdot 2 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 - 1\right)'}{\left(x^2 - 1\right)^4} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(-\left(x^2 - 1\right) + 4x^2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^4} = = \frac{2 \cdot \left(-\left(x^2 - 1\right) + 4x^2\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(3x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}$$

$y'' = 0$

$$\frac{2 \cdot \left(3x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 \neq 0 \\ \left(x^2 - 1\right) \neq 0 \end{cases}$$

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;\infty)$
y''	+	Не опр	-	Не опр	+
y		Не опр		Не опр	

6) Асимптоты

У=кх+в

$$К=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

$$в=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}-0\,x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\infty^2}}=\frac{1}{1-0}=1$$

У=0х+1

У=1 –горизонтальная асимптота

Вертикальные асимптоты

$$\lim_{x\to-1-\Delta}f(x)=\lim_{x\to-1-\Delta}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{(-1-\Delta)^2}{(-1-\Delta)^2-1}=\frac{1+2\Delta+\Delta^2}{1+2\Delta+\Delta^2-1}=$$

$$\frac{1+2\Delta+\Delta^2}{2\Delta+\Delta^2}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$$\lim_{x \to -1+\Delta} f(x) = \lim_{x \to -1+\Delta} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{(-1+\Delta)^2}{(-1+\Delta)^2 - 1} = \frac{1 - 2\Delta + \Delta^2}{1 - 2\Delta + \Delta^2 - 1} =$$

$$\frac{1 - 2\Delta + \Delta^2}{-2\Delta + \Delta^2} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

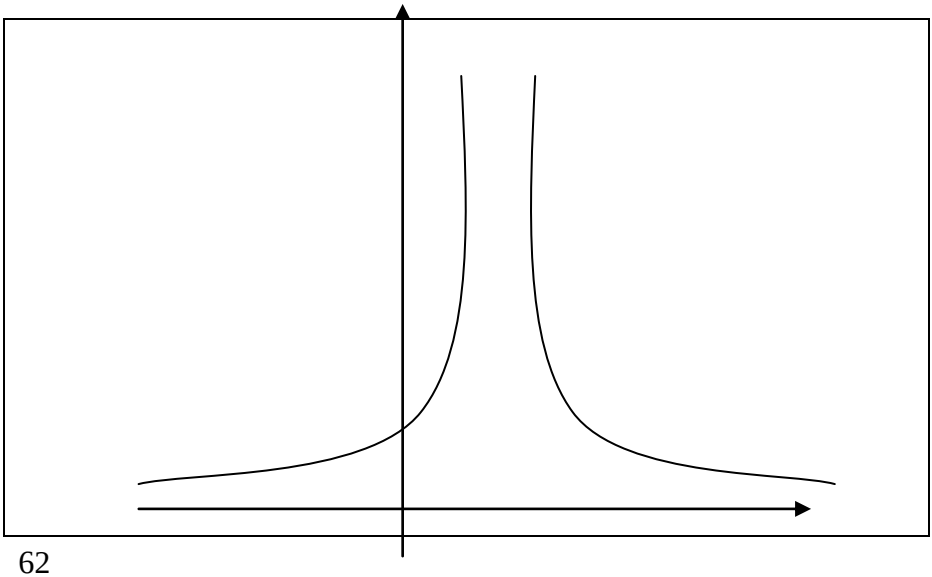
$$\lim_{x \to 1-\Delta} f(x) = \lim_{x \to 1-\Delta} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{(1-\Delta)^2}{(1-\Delta)^2 - 1} = \frac{1 - 2\Delta + \Delta^2}{1 - 2\Delta + \Delta^2 - 1} =$$

$$\frac{1 - 2\Delta + \Delta^2}{-2\Delta + \Delta^2} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+\Delta} f(x) = \lim_{x \to 1+\Delta} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{(1+\Delta)^2}{(1+\Delta)^2 - 1} = \frac{1 + 2\Delta + \Delta^2}{1 + 2\Delta + \Delta^2 - 1} =$$

$$\frac{1 + 2\Delta + \Delta^2}{2\Delta + \Delta^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Чертеж



11. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения- это уравнения , которые связывают независимую переменную Х, функцию У и производные данной функции различных порядков.
Дифференциальные уравнения имеют порядок, равный порядку старшей производной.
Дифференциальные уравнения применяются для решения прикладных физических, химических, геометрических задач.

Типы дифференциальных уравнений 1 порядка.

Тип	Общий вид	Замены
Уравнения с разделяющимися переменными	M(x,y)dx+N(x,y) dy=0	-
Уравнения с разделенными переменными.	M(x)dx=N(y)dy	-
Линейные дифференциальные уравнения.	$y' + P(x)y = Q(x)$	$y = u \cdot v$ $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Уравнения Бернулли	$y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$y = u \cdot v$ $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Однородные уравнения	$y' = f(x, y)$ $f(tx, ty) = f(x, y)$	$y = t \cdot x$ $y' = t' \cdot x + t$
Уравнения, допускающие понижение порядка. (для Д.У. старше первого порядка)	Не содержат функцию у $F(x, y', y'', \ldots y^n) = 0$	$p = y'$ $p' = y''$
	Не содержат переменную х	$y' = p$

	$F(y, y', y'', \ldots y^n) = 0$	$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$

Примеры

1. $y' = y \cdot \cos x$

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \cos x$$

$$dy = y \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \cos x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x \cdot dx$$

$$\ln|y| = \sin x + C$$

2. $y' = 2x + 3$

☺ Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

☺ Запишем производную первого порядка в виде отношения двух дифференциалов (в виде дроби) $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$

$$dy = (2x + 3) \cdot dx$$

$$\int dy = \int (2x + 3) \cdot dx$$

$$\boxed{y = \frac{2x^2}{2} + 3x + C}$$

Общее решение

Пример

$$\left(1 + x^2\right)dy + yxdx = 0$$

$$x = 1$$

$$y = 1$$

☺ Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\left(1 + x^2\right)dy = -yxdx$$

$$\frac{dy}{-y} = \frac{xdx}{\left(1 + x^2\right)}$$

$$\int \frac{dy}{-y} = \int \frac{xdx}{\left(1 + x^2\right)}$$

$$-\ln|y| = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1 + x^2\right)}{1 + x^2}$$

$$-\ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + \ln C$$

$$\ln\frac{1}{|y|} = \ln\sqrt{\left|1 + x^2\right|} \cdot C$$

$$\frac{1}{|y|} = \sqrt{\left|1 + x^2\right|} \cdot C$$

$$\frac{1}{|1|} = \sqrt{\left|1 + 1^2\right|} \cdot C$$

$$1 = \sqrt{2} \cdot C$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{|y|} = \sqrt{\left|1 + x^2\right|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$ Частное решение

Пример $y' = \frac{y}{2}$

☺ Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}$$

$$dy = \frac{y}{2} \cdot dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2}$$

$$\ln|y| = \frac{x}{2} + C$$

$$\ln|1| = \frac{0}{2} + C$$

0=0 +C

C=0

$$\ln|y| = \frac{x}{2}$$ Частное решение

3. $(x+1)dy = y \cdot dx$

☺ Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$(x+1)dy = y \cdot dx \qquad |:(x+1) \cdot y$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\boxed{\ln|y| = \ln|x+1| + \ln C}$$

Общее решение

$y = (x+1) \cdot C$

$x = 1$

$y = 8$

8=(1+1)C
8=2C
C=4
$y = (x + 1) \cdot 4$

12. Элементы теории вероятностей и математической статистики.

Теория вероятности - это наука, изучающая закономерности случайных явлений.
Математическая статистика – наука о массовых случайных событиях.
Теория вероятностей устанавливает связь между числовыми характеристиками
случайных событий
Математическая статистика - определяет эти характеристики.
Испытанием называют **опыт, эксперимент , наблюдение** какого – либо явления

Пример
бросание монеты,
загорание светофора,
выстрел из винтовки,
бросание игральной кости (игрального кубика).
Событием называют результат испытания(исход испытания)

Пример
Выпадение орла или решки,
Горение зеленого, желтого или красного света на светофоре,
Попадание или промах,
Выпадения числа очков на кубике.
Испытания обычно записываются в виде текста, где указываются также особые условия их проведения:
Испытание – горит светофор
А (испытание) - бросание монеты
Испытание –звоним по телефону, если линия исправна/ особое условие/

События обозначаются большими буквами латинского или русского алфавита.
W1, W2, W3, …, А, Б, В, ….
Множество всех возможных исходов опыта, испытания называется **пространством элементарных событий.**
Обозначения: Ω - пространство элементарных событий.

Пример
1 способ
А (испытание**) - бросание монеты**
W1-выпадение герба
W2-выпадение решки
Ω = (W1; W2)
Других исходов данного испытания быть не может.
2 способ записи
Испытание - бросание монеты
Г- выпадение герба
Р - выпадение решки
Ω = (Г; Р)

Пример
Испытание – горит светофор
А - красный свет
В – желтый свет
С – зеленый свет
Ω = (А,В,С)

Пример
Испытание – бросание игрального кубика
К - выпало 1 очко
М - выпало 2 очка
Л - выпало 3 очка
Н - выпало 4 очка
Р - выпало 5 очков
С - выпало 6 очков

Ω = (К,М,Л,Н,Р,С)

Пример
Испытание – Исследование кислотности раствора на уроках химии.
А – раствор кислый
В – раствор щелочной
С – раствор нейтральный
Ω = (А,В,С)

Пример
Испытание – Исследование траектории полета космического аппарата в физике
А – космический аппарат упадет на Землю
В – космический аппарат станет спутником Земли
С – космический аппарат улетит в открытый космос.
Ω = (А,В,С)

Классификация событий

1) **Достоверное событие** – событие, которое происходит всегда при каждом испытании.
2) **Невозможное событие** – событие, которое не может произойти ни при одном испытании.
3) **Случайное событие** – событие, которое может произойти, а может не произойти в результате испытания.
4) **Равновозможные события** – это события, которые имеют объективно одинаковую вероятность появления в данном испытании.
5) **Единственно возможное событие**- это событие, которое является единственным исходом испытания.
6) **Противоположное событие** – это событие $\bar{A}$, которое происходит тогда, когда не происходит событие А

Пример
Испытание – бросание игрального кубика
А – выпадет число очков не больше 6-

достоверное событие

В - выпадет число очков 9

В- невозможное событие, так как на гранях кубика только 1,2,3,4,5 и 6 очков , сколько кубик ни бросай, 9 очков не выпадет.

С - выпало 6 очков

Случайное событие, так как может выпасть любое число очков. При бросании игрального кубика, если он не деформирован, появление **1,2,3,4,5 и 6 очков** – события равновозможные.

Пример

Испытание – двукратная стрельба из заряженной винтовки по мишеням

А – два попадания в мишень – событие случайное

В – попаданий в мишень.не более двух раз – событие достоверное

С – девять пробоин в мишени после двух выстрелов – событие невозможное

Пример

Испытание – извлечение двух игральных карт из колоды

А –извлечены два туза – событие случайное

В –извлечены карты черной или красной масти– событие достоверное

С – извлечены карты зеленой масти – событие невозможное

Пример

Испытание – стрельба из заряженной винтовки по мишеням

А - мишень поражена.

$\overline{A}$ - мишень не поражена**.**

События Аи $\overline{A}$ являются противоположными.

Пример

Испытание - бросание монеты

Г- выпадение герба

Р - выпадение решки
События Г и **Р** являются противоположными.

1) **Совместные события** – это такие события, которые в условиях данного испытания могут появиться вместе, т.е. появление одного из них не исключает возможность появления другого.
2) **Несовместные события** – это такие события, которые при данном испытании вместе появиться не могут, т.е. появление одного из них исключает появление другого.
3) **Зависимые события** – это события, у которых возможность появления одного из них зависит от появления или не появления другого.
   Мы хотим на заправке заправить машину и можем это сделать только в том случае, если есть бензин.

4) **Независимые события** – это события, у которых возможность появления одного из них не зависит от появления или не появления другого.

Пример

Испытание – бросание игрального кубика

Элементарные события:
А - выпала 1
В - выпала 2
С - выпала 3
Д - выпала 4
Е - выпала 5
Ф - выпала 6
М - выпало четное число очков
М=В+Д+Ф
Событие М зависит от элементарных событий В,Д или Ф.
Н – выпало число очков меньше трех
Н=А+В
События М и Н являются совместными, так как может выпасть число очков 2 и оно является четным и меньше трех.

Если мы изменим условия проведения испытания и будем бросать уже не один кубик, а два кубика, то получим совсем иные результаты. Элементарные исходы будут те же самые для каждого кубика. Но комбинаций этих исходов будет больше.
И если в результате бросания только одного кубика события А и В будут несовместными, так как на одном кубике выпасть одновременно 1 и 2 очка не А Если же мы бросаем два кубика и на одном выпадает 1, а на другом 2 очка, то события А и В будут совместными.
Таким образом, получается, что одни и те же события в одних испытаниях будут совместными, а в других – несовместными.

Пример

Испытание- стрельба из двух винтовок двумя стрелками по мишени.
Происходящие элементарные события-
A_1 **– первый стрелок попал в мишень.**
A_2 **–второй стрелок попал в мишень.**
$\overline{A_1}$ **первый стрелок промахнулся.**
$\overline{A_2}$ **второй стрелок промахнулся.**
Происходящие сложные события(события, зависящие от появления или не появления элементарных событий)
M- хотя бы один стрелок попал в мишень.
M= A_1 **и** $\overline{A_2}$ **или** $\overline{A_1}$ **и** A_2 **или** A_1 **и** $A_2 = A_1 * \overline{A_2} + \overline{A_1} * A_2 + A_1 * A_2$
N- оба стрелка промахнулись
N= $\overline{A_1}$ **и** $\overline{A_2} = \overline{A_2} * \overline{A_1}$

Виды множеств

1) **Конечные множества**- это множества, у которых число элементов ограничено. Такое множество называется дискретным $\overline{(1, n)}$

Пример

1) Множество называется конечным, если оно имеет ограниченное число элементов.

Множество людей в автобусе является конечным множеством

2) **Счетные множества** - это множества, у которых количество элементов бесконечно и принимает отдельные значения, данному множеству можно поставить в соответствие множество натуральных чисел, то есть можно пересчитать (1,n)

Множество листьев на деревьях является счетным множеством.

3) **Несчетные множества**- это множества, у которых число элементов неограниченно. данному множеству нельзя поставить в соответствие множество натуральных чисел несчетные n , непрерывное

Множество всех значений из некоторого промежутка является несчетным множеством.

Множество называется **упорядоченным**, если указан порядок расположения его элементов.

Комбинаторика-раздел математики , в котором решаются задачи выбора и расположения элементов некоторого множества по определенным правилам.

Обычно выбираем конечное множество с достаточно малым количеством элементов.

Для того, чтобы подсчитать число различных комбинаций элементов в задачах, применяем 3 основные формулы размещений, сочетаний и перестановок

1) **Размещениями** называются различные комбинации элементов, различающиеся составом и порядком расположения элементов.

Размещения N элементов по К элементам называется упорядоченное

множество , состоящее из К элементов.

Размещения считаются различными, если они отличаются порядком расположения элементов.

Обозначение: Количество способов, которыми можно выбрать из n элементов по к

Обозначаются как A_n^m

и вычисляются по следующей формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)$$

2) **Сочетаниями** называются различные комбинации элементов, различающиеся составом элементов

Сочетания - это размещения, которые отличаются хотя бы одним элементом

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

3**) Перестановками** называются различные комбинации элементов, различающиеся только порядком расположения элементов.

Перестановки - такие размещения из n элементов по n, которые различаются только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов по n элементам обозначается P_n

и вычисляется

$Pn = A_n^m = n!$

Формулы	Обозначения	Порядок	Вычисление
Размещения	A_n^m	Важен	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} =$
Сочетания	C_n^m	Не важен	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
Перестановки	$P_n = n!$	Важен	$P_n = n!$

Пример

123, 132, 213, 231, 312, 321 - это различные комбинации одних и тех же элементов, отличающиеся только порядком расположения. Всего комбинаций (**перестановок**) трех элементов мы насчитали шесть.

Число перестановок подсчитаем по формуле

$P_3 = 3! = 1 * 2 * 3 = 6$

Существуют две различных схемы подсчета элементов

1 схема **Выборки без возвращения**

Выбор осуществляется без возвращения элементов обратно во множество. Отбираются или сразу все элементы или отбираются по одному по порядку.

2 схема **Выборки с возвращением**

Осуществляется поэлементно с обязательным возвращением обратно на каждом шаге и тщательным перемешиванием после каждого выбора.

		M ≠ N	M=n
Выборки без возвращения	Без упорядочения	Сочетания C_b^m от n по m	C_b^m
	С упорядочением	Размещения A^M_n от n по m	P_n
Выборки с возвращением	Без упорядочения	Сочетания от (n+m-1) по M C^m_{n+m-1}	C_b^m
	С упорядочением	n^m	C_b^m

Пример

Испытание - бросание 3х монет последовательно (выборка с возвращением и с упорядочением)

Ω = (ГГГ; ГГР , ГРГ, РГГ, РРГ, РГР, ГРР, РРР)
Число элементарных исходов бросания одной монеты
n=2, так как всего два варианта выпадения: герб и решка.
Мы берем три монеты
К= $n^m = 2^3 = 8$ **способов**

Пример
Испытание - рождение двух детей в семье последовательно (выборка с возвращением и с упорядочением)

Ω = (ММ, МД, ДМ, ДД)
Число элементарных исходов рождения одного ребенка
n=2
так как рождается или мальчик или девочка.
Общее число детей в семье
$m = 2$
К= $n^m = 2^2 = 4$ способов

Пример
Испытание - бросание 3х монет одновременно (выборка с возвращением и без упорядочения)
Ω = (ГГГ; ГГР , РРГ, РРР)

$$C^{b}_{n+m-1} = C^{3}_{4} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{1*2*3*4}{1*2*3*1} = 4$$

Пример
Испытание - Рождение в семье двух детей одновременно (выборка с возвращением и без упорядочения)

Ω = (ММ, МД, ДД)

$$C^{b}_{n+m-1} = C^{2}_{2+2-1} = C^{2}_{3} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{1*2*3}{1*2*1} = 3$$

Пример
Испытание: На полке стоят пять книг.
Сколькими способами можно взять две книги с полки
а) одновременно (выборка без возвращения и без упорядочения)

Номера книг			
1и2	**2и3**	**3и4**	**4и5**
1и3	**2и4**	**3и5**	
1и4	**2и5**		
1и5			

$$C_n^m = C_5^2 = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2*1*2*3} = 10$$ спосо

бов

б) последовательно (выборка без возвращения и с упорядочением)

Номера книг				
1и2	**2и1**	**3и1**	**4и1**	**5и1**
1и3	**2и3**	**3и2**	**4и2**	**5и2**
1и4	**2и4**	**3и4**	**4и3**	**5и3**
1и5	**2и5**	**3и5**	**4и5**	**5и4**

$$A_n^m = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2*3} = 20$$ способов взять книги с полки.

Определение вероятностей

1. **Классическое**

Вероятность появления события А равна отношению числа благоприятствующих появлению события А исходов к общему числу исходов.

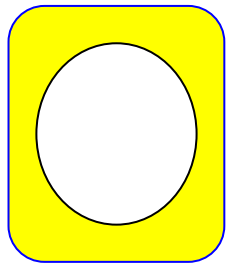
$$P(A)=\frac{м}{н}$$

м- число благоприятствующих появлению события А исходов

н- - общее число исходов

2. Геометрическое

Вероятность появления события А равна отношению меры области, благоприятствующей появлению события А к мере всей области. $P(A)=\frac{S_1}{S_2}$



Относительная частота события, свойство ее устойчивости.

Относительная частота появления события А равна отношению числа благоприятствующих появлению события А исходов к общему числу исходов.

3. Статистическое (число испытаний обычно достаточно велико)

Статистической вероятностью называется относительная частота появления
события А в n испытаниях

Пример

Испытание - бросание двух игральных кубиков

На каждом кубике может выпасть число очков от 1 до 6.

Подсчитаем сумму очков, выпавших на двух кубиках.

Выпало очков	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Общее число исходов испытания равно 36.

n=36

Найдем вероятность того, что сумма очков меньше 7

Выпало очков	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Всего таких исходов 15.

M=15

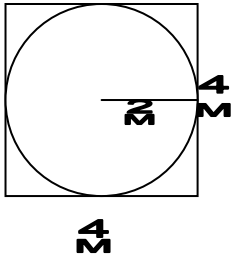
Тогда вероятность наступления события А- сумма очков меньше 7 равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{15}{36}=0,4167$$

Пример

На даче участок имеет квадратную форму 4Х4 метра. Мы посадили огурцы и охранять огород поставили собаку, которую привязали на цепь, вбитую в центре огорода. Длина цепи равна 2 метра.

Вор полез через забор за огурцами. Какова вероятность того, что собака вора покусает?



$$P(A) = \frac{S_{круга}}{S_{квадрата}} = \frac{\pi R^2}{a^2} = \frac{\pi 2^2}{4^2} = \frac{\pi}{4}$$

Практическая работа №1

Тема: Матрицы, виды матриц, действия над матрицами. Определители, свойства, приложение определителей к решению задач. Решение систем линейных уравнений

Цель: Научиться выполнять действия над матрицами, решать системы линейных уравнений с помощью метода

Задание 1

Выполнить действия над матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$A + C$, $A - C$, A^T , B^T , $A \cdot B$, $B \cdot A$, $2A$, $5B$

Задание 2

Решите системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7x + y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 9x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 6y = 6 \\ 7x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 5y = 9 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$$

Практическая работа №2
Тема: Задачи на проценты
Нахождение процентов от числа
1) На товар снизили цену в первый раз на 15 % , а во второй раз на 20%
Какой стала цена товара, если первоначальная цена была 250 рублей
2) На товар повысили цену на 30 %, а затем снизили на столько же процентов . Какой стала цена товара, если первоначальная цена была 1200 рублей
Нахождение числа по его процентам.
3)Гражданин в банк положил деньги под проценты. В конце года он продлил договор еще на один год. Каков был первоначальный размер вклада, если размер процентов составил 1575 рублей к концу второго года , а банк начисляет 5 % годовых.
4)Гражданин взял в банке ссуду под 16 % годовых. Какую сумму он брал в банке, если 2340 рублей ?
Процентное соотношение чисел
5) В банке взята ссуда 230 тысяч рублей, через год должны отдать 258 тысяч рублей. Сколько процентов начисляет банк?
6) В банке взята ссуда 670 тысяч рублей, через год должны отдать 700 тысяч рублей. Сколько процентов начисляет банк?

Практическая работа №3

Тема: Точные и приближенные вычисления

Задание 1

Округлить с недостатком, с избытком и наименьшей погрешностью следующие число до двух значащих цифр после запятой. Результаты занести в таблицу.

Число	С недостатком	С избытком	С наименьшей погрешностью

1) 1,25678
2) 5,6894
3) 3,123235
4) 789,435
5) 5768,2222
6) 478,171717

Задание 2

Выполнить действия с приближенными величинами:

$x + y, \quad x - y, \quad x \cdot y, \quad \frac{x}{y}$

1) x=7 ± 0,5 y=2 ± 1,5
2) x=1 ± 0,5 y=9 ± 1,5

Практическая работа №4

Тема: Комплексные числа

Заполнить таблицу

Алгебраическая форма	Тригонометрическая форма	Показательная форма
		$z = 2e^{30^\circ i}$
	$z = 5(\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)$	
$z = 1 + 1 \cdot i$		
		$z = 2e^{45^\circ i}$
	$z = 5(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$	
$z = 3 \cdot i$		

Заполнить таблицу

$z_1 + z_2$	$z_1 - z_2$	$z_1 \cdot z_2$	$\frac{z_1}{z_2}$
$z_1 = 2 + 3 \cdot i$ $z_2 = 7 + 1 \cdot i$			
$z_1 = 6 + 2 \cdot i$ $z_2 = 3 - 5 \cdot i$			
$z_1 = -8 + 1 \cdot i$ $z_2 = 4 + 4 \cdot i$			
$z_1 = 8 - 3 \cdot i$ $z_2 = 2 - 5 \cdot i$			

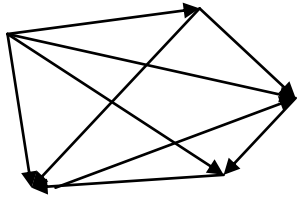
Практическая работа №5

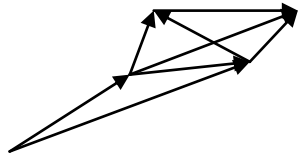
Тема: Элементы аналитической геометрии. Векторы, действия над векторами. Линии на плоскости и в пространстве. Кривые второго порядка.

Цель: Научиться выполнять действия над векторами. Научиться строить по заданным уравнениям кривые в декартовой системе координат и по виду кривой определять ее уравнение.

Задание1

Выразить неизвестный вектор через известные векторы





Задание 2

Даны координаты четырех точек-вершин пирамиды.

Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AД}$, длины этих векторов. Определите, являются ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AД}$ попарно коллинеарными или ортогональными. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Определите, являются ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AД}$ компланарными векторами?

Вычислите

	Координаты	Длина
$\overrightarrow{AB}$		
$\overrightarrow{AC}$		
$\overrightarrow{AД}$		

Задание 3.

Построить кривые второго порядка и заполнить таблицу

Название кривой	Координаты центра	a	в

1) $x^2 + y^2 = 9$

2) $x^2 + y^2 = 4$

3) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$

4) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$

5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

6) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

7) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

8) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$

9) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

10) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

11) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

12) $\frac{(x-5)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

13) $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

14) $x^2 = 4y$

15) $x^2 = -6y$

16) $y^2 = 2x$

17) $y^2 = -4x$

Практическая работа №6

Тема: Последовательности. Предел и непрерывность. Вычисление пределов.

Задание

Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{4 + 3x}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^2 + 3}{4 + 8x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 5x)}{e^{3x} - 1}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1}{\arcsin 6x}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sin 7x}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7x}{\arcsin 47x}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{e^{6x} - 1}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(6x + 1)}{arctgx}$

Практическая работа №7

Тема: Производные и их приложения.

Цель: Научиться вычислять производные сложных функций.

Задание 1

Найти производные:

1) $\left(\sin(x^2+4)\right)'$
2) $\left(\cos(x^3+5x)\right)'$
3) $\left(tg\,(7x^4+\ln x)\right)'$
4) $\left(ctg\,(x^7+6)\right)'$
5) $\left(\ln(\sin x)\right)'$
6) $\left(e^{x^3+2}\right)'$
7) $\left((x^2+4)^5\right)'$
8) $\left(3^{x^3+5}\right)'$

Задание 2

Найдите уравнение касательной к графику функции

$y = x^2$ в точке $x_0 = 3$

Задание 3

Найдите уравнение нормали к графику функции

$y = x^2 + 1$ в точке x=2

Задание 4

Вычислите значение выражения $\sqrt{1{,}08}$

Практическая работа №8

Тема: Интеграл и первообразная. Определенный интеграл и его приложения.

Вычислить неопределенные интегралы:

$\int \sin(x+2)\,dx$

$\int \ln x\,dx$

$\int 5^{4x+3}\,dx$

$\int \cos(x+11)\,dx$

$\int \frac{dx}{(x-1)^2}$

$\int \frac{x\,dx}{x^2+4}$

$\int \frac{3x^2\,dx}{x^3+5}$

$\int tgx\,dx$

$\int (ctgx)^7 \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

$\int \sin(8x+2)\,dx$

$\int \frac{1}{x+5}\,dx$

$\int 3^{9x+2}\,dx$

$\int \cos(7x+5)\,dx$

Практическая работа №9

Тема: Системы счисления и их применение.

Цель: Научиться переводить числа из одной системы счисления в другую систему счисления

1) Переведите числа из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления

25675, 674, 893468, 567353, 675345.

2) Переведите числа из троичной системы счисления в десятичную

221200212, 111200011, 22221100, 210210210

3) Переведите числа из двоичной системы счисления в восьмеричную

12110, 2102, 1111, 100010

4) Перевести из пятеричной системы счисления число в троичную систему счисления 3421123

Практическая работа №10

Тема: Функции и их свойства.

Цель: Закрепить знания на применение производной к исследованию функций, научиться проводить полное исследование функций

1. По рисункам записать свойства функций

Рисунок 1

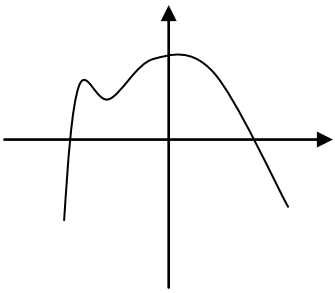


Рисунок 2

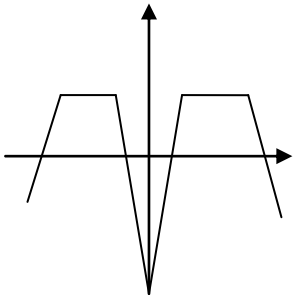


Рисунок 3

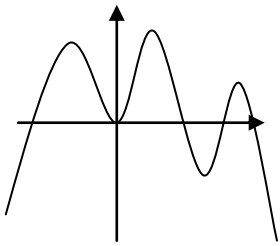


Рисунок 4

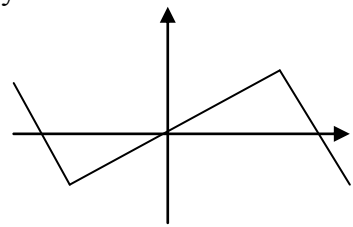
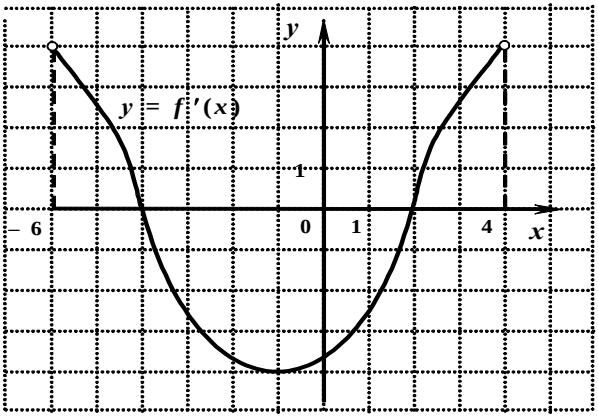


Рисунок 5



2.Проведите полное исследование функций

1. $y = x^3 + 2x^2 + 5x + 1$
2. $y = x^3 + 3x^2 + 6x - 7$
3. $y = x^3 - 4x^2 - 9x - 1$
4. $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 7$

План полного исследования включает в себя нахождение области определения функций, точек пересечения с осями координат, точек перегиба, промежутков монотонности и

выпуклости, вогнутости функции и нахождение ассимптот, на заключительном этапе строим чертеж

Практическая работа № 11

Тема: Дифференциальные уравнения

Цель: Научиться решать простейшие дифференциальные уравнения первого порядка

1. $y \cdot dx = x \cdot dy$
2. $\sin(x) \cdot dx = \cos(y) \cdot dy$
3. $x \cdot \sqrt{1 + y^2} + y \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{1 + x^2} = 0$
4. $\sqrt{3 + y^2} \cdot dx - y \cdot dy = x^2 \cdot y \cdot dy$
5. $6 \cdot x \cdot dx - 6 \cdot y \cdot dy = \left(2 \cdot x^2 \cdot y \cdot dy\right) - 3 \cdot x \cdot y^2 \cdot dx$
6. $x \cdot \sqrt{3 + y^2} \cdot dx + y \cdot \sqrt{2 + x^2} \cdot dy = 0$
7. $\left(e^{2x} + 5\right) \cdot dy + y \cdot e^{2x} \cdot dx = 0$
8. $y \cdot \frac{d}{dx} y \cdot \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - y^2}} + 1 = 0$
9. $6 \cdot x \cdot dx - 6 \cdot y \cdot dy = \left(3 \cdot x^2 \cdot y \cdot dy\right) - 2 \cdot x \cdot y^2 \cdot dx$
10. $x \cdot \sqrt{5 + y^2} \cdot dx + y \cdot \sqrt{4 + x^2} \cdot dy = 0$
11. $y \cdot \left(4 + e^x\right) dy - e^x dx = 0$
12. $2x \cdot dx - 2y \cdot dy = x^2 \cdot y \cdot dy - 2 \cdot x \cdot y^2 \cdot dx$
13. $\sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{d}{dx} y + x \cdot y^2 + x = 0$
14. $x \cdot \sqrt{4 + y^2} \cdot dx + y \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot dy = 0$
15. $\left(8 + e^x\right) dy - y \cdot e^x dx = 0$

Практическая работа № 12

Тема: Элементы теории вероятностей и математической статистики.

Цель: Познакомиться с понятием испытание и событие, научиться записывать пространство элементарных событий, применять основные формулы комбинаторики, познакомиться с понятием вероятности события.

Задание №1

Запишите пространство элементарных событий для следующих испытаний:

1. В урне лежат шары красного, черного, белого и зеленого цвета по два шара каждого цвета. Сколькими способами можно достать два шара из урны?
2. В урне лежат 5 шаров черного и 2 шара белого цвета. Сколькими способами можно достать два шара из урны?
3. В урне лежат 3 шара черного ,2 шара белого, 1 шар зеленого цвета. Сколькими способами можно достать три шара из урны?
4. В урне лежат 5 шаров черного и 3 шара белого цвета. Сколькими способами можно достать три шара из урны?

Задание №2

Два студента решают два задания независимо друг от друга. Запишите с помощью формул следующие события:

1. Оба задания выполнены верно
2. Оба задания выполнены неверно
3. Первый студент выполнил задание правильно, а второй - не правильно
4. Первый студент выполнил задание не правильно, а второй – правильно
5. Только одно задание выполнено неправильно,
6. Хотя бы одно задание выполнено верно
7. Хотя бы одно задание выполнено неверно

Задание №3

Вычислите

1. $A_8^5 \quad A_4^3 \quad A_5^5$
2. $C_8^5 \quad C_4^3 \quad C_5^5$
3. $P_4 \quad P_6 \quad P_7$
4. $\overline{A_3^2} \quad \overline{A_4^3} \quad \overline{A_3^3}$
5. $\overline{C_6^5} \quad \overline{C_4^3} \quad \overline{C_5^5}$
6. $\overline{P_{2,1,4}} \quad \overline{P_{1,6}} \quad \overline{P_{7,0,2}}$

Задание №4

С помощью формул комбинаторики решить задачи:

1. Есть шесть цифр 1,2, 3,4,5,6. Сколько трехзначных чисел можно составить?

1) На полке стоят 5 книг. Из них читатель выбирает две книги для чтения. Сколькими способами он может это сделать
   a. а) если порядок взятия книг не важен?
   b. б) если порядок взятия книг важен?

2. В соревнованиях участвуют 8 человек. Три спортсмена занимают призовые места. Сколько возможных способов занять призовые места существует?
3. 7 книг расставляют на полке. Сколькими способами можно это сделать?
4. Сколько различных трехбуквенных слов можно составить из букв данных слов:

Сумка	$\overline{A}_n^m = n^m$
сосна	$\frac{\overline{A}_n^m}{л_1!\cdot л_2!\, л_3!\cdots л_к!} = \frac{n^m}{л_1!\cdot л_2!\, л_3!\cdots л_к!}$
болото	
засада	
молоток	

5. Сколькими способами можно переставить буквы в словах
6. В коробке 3 белых, 4 черных, 5 зеленых карандаша. Выбираем два карандаша. Сколькими способами можем мы это сделать? Запишите все возможные результаты выбора с учетом цвета карандашей и без учета цвета карандашей.

Литература

Основная литература

1. Дадаян А.А. «Математика»Учебник-М.: Форум, Инфра-М.2004.-552 с.
2. Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. «Сборник задач по математике для техникумов с решениями»- М.: ООО «Издательский дом «Оникс21 век»» ООО «Издательство «Мир и образование»», 2003-464 с.: ил.

Дополнительная литература

1. «Высшая математика для экономистов»/под ред. проф. Кремера. М.Юнити, 2001г.

2. Гмурман В.Е Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для студентов вузов/В.Е.Гмурман.-8-е изд., стер.-М.: Высш. шк. , 2003.-405с.:ил.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/В.Е.Гмурман.-10-е изд., стер. :"Высшая школа",2004.-479с.:ил.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. «Высшая математика в упражнениях и задачах».-М: «Высшая школа»,1999.-ч.1и 2.
5. «Общий курс высшей математики для экономистов»: Учебник./ Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001 г.
6. Пехлецкий И.Д. Математика:Учебник.-2-е изд., стереотип.-М.:" Академия",2002.-304 с.

Оглавление

Введение 3

Содержание *4*

Вопросы по курсу к зачетам и экзаменам *5*

Основные понятия и примеры решения задач *9*

- Матрицы, виды матриц, действия над матрицами. Определители, свойства, приложение определителей к решению задач. Решение СЛУ 9
- Задачи на проценты 18
- Точные и приближенные вычисления 23
- Комплексные числа 26
- Элементы аналитической геометрии. Векторы, действия над векторами. Линии на плоскости и в пространстве. Кривые второго порядка. 32
- Последовательности. Предел и непрерывность. 39
- Производные и их приложения. 43
- Интеграл и первообразная. Определенный интеграл и его приложения. 50
- Системы счисления и их применение. 57
- Функции и их свойства. 57
- Дифференциальные уравнения первого порядка 68
- Элементы теории вероятностей и математической статистики. 72

Задания для проведения промежуточного и итогового контроля.

Практическая работа №1 Тема: Матрицы, виды матриц, действия над матрицами. Определители, свойства, приложение определителей к решению задач. Решение систем линейных уравнений 86

Практическая работа №2 Тема: Задачи на проценты 87

Практическая работа №3Тема:Точные и приближенные вычисления 88

Практическая работа №4 Тема: Комплексные числа 89
Практическая работа №5 Тема: Элементы аналитической геометрии. Векторы, действия над векторами. Линии на плоскости и в пространстве. Кривые второго порядка. 90
Практическая работа №6 Тема: Последовательности. Предел и непрерывность. Вычисление пределов. 92
Практическая работа №7 Тема: Производные и их приложения. 93
Практическая работа №8 Тема: Интеграл и первообразная. Определенный интеграл и его приложения. 94
Практическая работа №9Тема:Системы счисления и их применение.95
Практическая работа №10 Тема: Функции и их свойства. 95
Практическая работа № 11 Тема: Дифференциальные уравнения 97
Практическая работа № 12 Тема: Элементы теории вероятностей и математической статистики. 99
Литература 100