Лекция 1 Тема Предел и непрерывность

Предел функции и непрерывность

§1. Числовая последовательность.

Предел числовой последовательности

1.1. Определение числовой последовательности

Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел (элементов), имеющих определенные номера. Эти числа являются членами последовательности: x_1-первый член, x_2-второй член, ... , x_n-n-ый член. Числовая последовательность обозначается так: $\{x_n\}$.

Числовую последовательность задают формулой n-го члена: $x_n=f(n)$. Например, если $x_n = \dfrac{n+1}{n^2}$,

то $x_1=2$, $x_2 = \dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{4}{9}$, ..., $x_{n+1} = \dfrac{n+2}{(n+1)^2}$ и т.д.

Числовую последовательность также можно задать рекуррентным соотношением: $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$, $x_1=1$.

Тогда $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, $x_4 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ и т.д.

1.2. Предел числовой последовательности

Определение. Число A называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N$ такое, что для всех $n>N$ выполняется условие $|x_n - A| < \varepsilon$.

Это означает, что в любой окрестности точки A содержится бесконечное множество элементов последовательности.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A: \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \quad n > N \to |x_n - A| < \varepsilon \qquad (1.1)$$

Доказать, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, означает найти зависимость $N(\varepsilon)$.

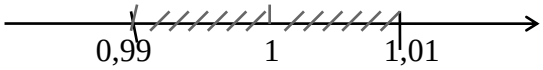
Пример 1.1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon, \;\; \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon, \;\; n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

Для того чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ выполнялось условие $\left|\dfrac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$ достаточно выбрать $N = \left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}\right]$.

Если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = 99$, $\left[\sqrt{99}\right] = 9$, N=9, т.е. все члены, начиная с x_{10}, находятся в 0,01-окрестности точки 1.



Числовая последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Если же предел не существует или равен ∞, то последовательность называется расходящейся.

1.3. Свойства передела

1. Предел линейной комбинации

$$\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = a\lim_{n\to\infty}x_n + b\lim_{n\to\infty}y_n. \qquad (1.2)$$

2. Предел произведения

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \lim_{n\to\infty}y_n. \qquad (1.3)$$

3. Предел частного

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}, \text{ если } \lim_{n\to\infty}y_n \neq 0. \qquad (1.4)$$

4. Предел отношения многочленов

Пусть x_n и y_n многочлены от n степени k и m соответственно, т.е.

$x_n=P_k(n)=a_0n^k+a_1n^{k-1}+...+a_k$, $y_n=Q_m(n)=b_0n^m+b_1n^{m-1}+...+b_m$

Докажем, что предел отношения многочленов равен пределу отношения их старших членов, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k}{b_0n^m} = \frac{a_0}{b_0}\lim_{n\to\infty}n^{k-m} \qquad (1.5)$$

Имеем: $$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k + a_1n^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0n^m + b_1n^{m-1}+\ldots+b_m} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k(a_0 + \frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_k}{n^k})}{n^m(b_0 + \frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_m}{n^m})} = = \frac{a_0}{b_0}\lim_{n\to\infty}n^{k-m},$$ что и требовалось.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } k = m \\ 0, & \text{если } k < m \\ \infty \cdot \operatorname{sgn}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } k > m \end{cases} \qquad (1.6)$$

Пример 1.2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+n^2-3n^3+2}{4n^3+n+5}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-5n^2+4}{n^3+3}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n+1}{n^2-2n^3+5}$

Решение.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+n^2-3n^3+2}{4n^3+n+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^3}{4n^3} = -\dfrac{3}{4}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-5n^2+4}{n^3+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-5n^2}{n^3} = 0$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n+1}{n^2-2n^3+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4}{-2n^3} = -\infty$.

Следует отметить, что формулы (1.5) и (1.6) справедливы не только для многочленов целой степени, но и для многочленов дробной степени, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$ для любого $a>0$.

Пример 1.3. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{16n^6+1}-\sqrt[3]{8n^2+5}+\sqrt{n+4}}{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt{25n^3+7}}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n^3+1}}}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^2+5}}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{n-1}-7\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n+3\cdot 4^{n+2}}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n^3+2n+1)}{\ln(n^8+4n^5+3)}$,

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$, е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n^2(n-1)!}{n!}$.

Решение:

а) В числителе три слагаемых соответственно степени: $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$ *и* $\frac{1}{2}$. Следовательно, степень числителя равна $\frac{3}{2}$, а главный член в числителе равен $(16n^6)^{\frac{1}{4}}=2n^{\frac{3}{2}}$. Аналогично, главный член в знаменателе $-(25n^3)^{\frac{1}{2}}=-5n^{\frac{3}{2}}$. Имеем по формулам (1.5) и (1.6):

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{16n^6+1}-\sqrt[3]{8n^2+5}+\sqrt{n+4}}{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt{25n^3+7}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{-5n^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{5}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n^3+1}}}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^2+5}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{4}}}{-n^{\frac{2}{3}}}=-\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{12}}=-\infty,$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{n-1}-7\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n+3\cdot 4^{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-7\cdot 5\right)}{5^n\left(8+3\cdot 4^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)}=-\frac{35}{8},$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0.$

Здесь также можно было использовать идею, что главный член это старший член. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{n-1}-7\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n+3\cdot 4^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-7\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n}=-\frac{35}{8},$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n^3+2n+1)}{\ln(n^8+4n^5+3)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n^3}{\ln n^8}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\ln n}{8\ln n}=\frac{3}{8}.$

Как видите, идея о главном старшем члене здесь также дает быстрое решение.

Обычно этот предел вычисляется так:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(n^3+2n+1\right)}{\ln\left(n^8+4n^5+3\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\ln n+\ln\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{8\ln n+\ln\left(1+\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^8}\right)}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\ln n}\right)\ln n}{\left(8+\frac{\left(1+\frac{4}{n^3}+\frac{3}{n^8}\right)}{\ln n}\right)\ln n} = \frac{3}{8}$$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+3+\ldots+2n-1)-(2+4+\ldots+2n)}{\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(1+2n-1)n}{2} - \frac{(2+2n)n}{2}}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2+1}} = -1$$

е) Напомним: $n! = 1\cdot 2\ldots(n-1)n$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n(n+1)-n^2(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!(n^2+n-n^2)}{(n-1)!n} = 1.$$

Пример 1.4. (Неопределенности $\infty-\infty$)

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[5]{n^5+n^4+1}-\sqrt[5]{n^5-n^4+1})$, б) $\lim\limits_{n\to-\infty} n(\sqrt{n^2+1}+n)$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2n}-2\sqrt{n^2+n}+n)$.

Решение. Для избавления от неопределенности $\infty-\infty$ здесь следует избавиться от иррациональности в числителе, умножив и разделив данное выражение на соответствующее сопряженное выражение.

а) Используем формулу

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Для данного примера

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

Имеем:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[5]{n^5+n^4+1}-\sqrt[5]{n^5-n^4+1}) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[5]{n^5+n^4+1}-\sqrt[5]{n^5-n^4+1})(\sqrt[5]{(n^5+n^4+1)^4}+\sqrt[5]{(n^5+n^4+1)^3(n^5-n^4+1)}+\ldots}{\sqrt[5]{(n^5+n^4+1)^4}+\sqrt[5]{(n^5+n^4+1)^3(n^5-n^4+1)}+\sqrt[5]{(n^5+n^4+1)^2(n^5-n^4+1)^2}+\ldots} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+n^4+1-n^5+n^4-1}{5\cdot\sqrt[5]{(n^5)^4}} = \frac{2}{5}.$$

б) Напоминаем, что $\sqrt{n^2} = |n|$ и при $n\to-\infty$ $|n| = -n$.

Имеем:

$$\lim_{n\to-\infty} n(\sqrt{n^2+1}+n) = \lim_{n\to-\infty} \frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}-n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{n}{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-n} = =$$

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{n}{-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{n}{-n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = -\frac{1}{2}$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}((\sqrt{n+2}+\sqrt{n})^2-4(n+1))}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}(n+2+2\sqrt{n^2+2n}+n-4n-4)}{4n^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2(\sqrt{n^2+2n}-(n+1))}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+2n}+n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{4}.$$

Пример 1.5. Найти предел последовательности, заданной рекуррентным соотношением:
$x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$.

Решение. Сначала докажем, что существует этот предел, используя теорему о существовании предела монотонно возрастающей и ограниченной сверху последовательности.
Возрастание последовательности очевидно:

$$x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} > \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} = x_n$$
$$\text{(n+1) корней} \qquad\qquad \text{n корней}$$

Для доказательства ограниченности последовательности заменим в последнем слагаемом 2 на 4.

$$x_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} < \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2}}} = \sqrt{4} = 2$$

Итак, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда, переходя в равенстве $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ к пределу при $n\to\infty$, получим:

$$a^2 = \sqrt{2+a}$$
$$a^2 - a - 2 = 0$$
$a = 2$, $a = -1$ (не удовлетворяет, т.к. $x_n > 0$)

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Пример 1.6. Доказать, пользуясь определением предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4}{2n^2+3n+1} = \frac{3}{2}$.

Решение. Имеем:

$$\left|\frac{3n^2+4}{2n^2+3n+1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{5-9n}{2(2n^2+3n+1)}\right| < \frac{9n}{4n^2} < \frac{3}{n}.$$

Решив неравенство $\frac{3}{n} < \varepsilon$, получим $n > \frac{3}{\varepsilon}$ и ясно, что достаточно выбрать $N = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $\left|\frac{3n^2+4}{2n^2+3n+1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$ выполнялось для всех n>N. Что и требовалось.

§2. Предел функции.
Методы вычисления предела функции

2.1. Определение предела функции

Число *a* называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x \in D(y)$, для которых $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Пишут так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Число ***a*** называется левосторонним пределом функции *f(x)* при $x \to x_0 - 0$ (слева), если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x \in D(y)$, для которых $0 < x_0 - x < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Число ***a*** называется правосторонним пределом функции *f(x)* при $x \to x_0 + 0$ (справа), если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x \in Д(y)$, для которых $0 < x - x_0 < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Односторонние пределы удобно обозначать так:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \;\; f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

Необходимое и достаточное условие существования предела с помощью односторонних пределов можно записать так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = a$$

Предел на бесконечности (при $x \to \infty$).

Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x \in D(y)$, для которых $|x| > A$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Пример 2.1. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

а) $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 3) = 7$, б) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

Решение. а) Надо доказать, что для $\forall x$, для которых $|x + 2| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 + 3 - 7| < \varepsilon$ для $\forall \varepsilon > 0$. Имеем:

$$|x^2 + 3 - 7| = |x^2 - 4| = |x^2 + 4x + 4 - 4x - 8| \le$$

$$\le |x + 2|^2 + 4|x + 2| < \delta^2 + 4\delta$$

Примем $\delta^2 + 4\delta = \varepsilon$. Тогда $\delta = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$.

Итак, для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$ такое, что $|x^2 + 3 - 7| < \varepsilon$ для $\forall x$, для которых $|x + 2| < \delta$.

б) Пусть $|x - 3| < \delta$, $-\delta < x - 3 < \delta$

Тогда $\left| \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2} \right| = \dfrac{1}{2} \left| \dfrac{x-3}{x+1} \right| = \dfrac{1}{2} \left| \dfrac{x-3}{x-3+4} \right| < \dfrac{\delta}{2(-\delta + 4)}$

Здесь в числителе пользуемся неравенством $x - 3 < \delta$, а в знаменателе пользуемся неравенством $x - 3 > -\delta$.

Пусть $\dfrac{\delta}{2(4 - \delta)} = \varepsilon$. Тогда $\delta = \dfrac{8\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$.

Итак, для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \dfrac{8\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$ такое, что неравенство $\left| \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$ выполняется для всех x, для которых $|x - 3| < \delta$.

2.2. Свойства предела функции

1. Предел линейной комбинации

$$\lim_{x \to x_0} (C \cdot f(x)) = C \lim_{x \to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x)-\lim_{x\to x_0}f_3(x)$$

и, вообще, $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{k=1}^{n}C_k f_k(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_k\lim\limits_{x\to x_0}f_k(x)$.

2. Предел произведения $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)$.

3. Предел частного

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)},$$

если пределы существуют и $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\neq 0$.

2.3. Методы вычисления предела функции

1. Нахождение предела функции следует начинать с вычисления значения функции в точке x_0. Если $f(x_0)$ равно конечному числу или $+\infty(-\infty)$, то предел найден. Здесь полезно пользоваться следующими символическими равенствами: $\frac{C}{\infty}=0$, $\frac{C^2}{+0}=+\infty$, $\frac{C^2}{-0}=-\infty$, при $a>1$ $a^{-\infty}=0$, $a^{+\infty}=+\infty$

Пример 2.2. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+4x}{x^2+1}=\frac{16-16}{16+1}=0$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-5}{(x-3)^2}=\frac{-2}{+0}=-\infty$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3+1}=0$ г) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{x-4}{x^2}}=2^{-\infty}=0$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{x-4}{x^2}}=2^0=1$

Чаще всего значение $f(x_0)$ бывает неопределенным: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ и т. д. Рассмотрим эти неопределенности.

2. **Неопределенность** $\frac{\infty}{\infty}$ в случае отношения многочленов рассматривалась в §1. Напомним еще раз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \textit{если}\quad n=m\\ 0, & \textit{если}\quad n<m\\ \infty\cdot\operatorname{sgn}\dfrac{a_0}{b_0}, & \textit{если}\quad n>m\end{cases}\qquad (n,m>0)$$

Пример 2.3. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-2x}{3x+4}-\dfrac{3x^3+x+4}{7-x^2+2x^3}+\dfrac{\sqrt{4x^3+1}+\sqrt[3]{x^4+2}}{\sqrt{9x^3+1}+\sqrt[4]{x^6+2}}\right)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{3x}-\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{2x^3}+\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+\frac{2}{4}=-\frac{5}{3}$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}3^{\frac{\sqrt{x^7+1}}{3+x-x^3}}=3^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{-x^3}}=3^{-\infty}=0$.

3. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Случай отношения многочленов.

Если $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, то $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ делятся на x-x_0. Можно числитель $P_n(x)$ и знаменатель $Q_m(x)$ разделить на $(x$-$x_0)$ или многочлены разложить на множители и сократить множитель x-x_0.

Пример 2.4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2+x-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{12}{-3}=-4$

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-1}{x^7-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}=\frac{5}{7}$$

Здесь применена формула

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-2x^2+16}{x^4+x^3-x-10}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Числитель и знаменатель должны делиться на x+2.

Имеем:

x^3-$2x^2$+16 | x+2 = x^2-4x+8

x^3+2x

-4x^2+16

-4x^2-8x

8x+16

8x+16

0

x^4+x^3-x-10 | x+2 = x^3-x^2+2x-5

x^4+2x^3

-x^3-x

-x^3-2x^2

2x^2-x

2x^2+4x

-5x-10

-5x-10

0

Тогда

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3-2x^2+16}{x^4+x^3-x-10}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4x+8}{x^3-x^2+2x-5}=\frac{20}{-21}=-\frac{20}{21}$$

4. Неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Случай отношения иррациональных выражений. Как правило, В этом случае стараются избавиться от иррациональности и после чего сократить множитель x-x_0.

Пример 2.5. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6-x}-3x+4}{\sqrt[3]{x-1}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{6-x}+(4-3x))(\sqrt{6-x}-(4-3x))(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}{(\sqrt[3]{x-1}-1)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)(\sqrt{6-x}-(4-3x))} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(6-x-16+24x-9x^2)\cdot 3}{(x-1-1)\cdot 4} = \frac{3}{4}\lim_{x\to 2} \frac{-9x^2+23x-10}{x-2} =$$

$$= \frac{3}{4}\lim_{x\to 2} \frac{-9(x-2)(x-\frac{5}{9})}{x-2} = -\frac{39}{4},$$

б) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt[3]{7x+6}}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3+3-\sqrt[3]{7x+6}}{x^2-9} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9} + \lim_{x\to 3} \frac{3-\sqrt[3]{7x+6}}{x^2-9} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2x+3-9}{(x^2-9)(\sqrt{2x+3}+3)} +$$

$$+ \lim_{x\to 3} \frac{27-7x-6}{(x^2-9)(9+3\sqrt[3]{7x+6}+\sqrt[3]{(7x+6)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)\cdot 6} + \lim_{x\to 3} \frac{-7(x-3)}{(x-3)(x+3)\cdot 27} = \frac{1}{18} - \frac{7}{162} = \frac{1}{81}$$

5. Неопределенность $(\infty-\infty)$ следует преобразовать в неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 2.6. Найти пределы

а) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{2}{(1-x)(1+x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3+3x-2-2x-2x^2}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2x^2+x+1}{(1-x)\cdot 3\cdot 2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+2x)}{(1-x)\cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

Предел $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$ можно свести к предыдущему с помощью замены $x=t^6$.

б) $$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}.$$

6. Неопределенность (1^∞)**.** Здесь под единицей подразумевается переменная, стремящаяся к 1, а под ∞- переменная, стремящаяся к ∞.

Имеется замечательный предел (второй)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где ***e*** - иррациональное число $\approx 2{,}7$, основание натурального логарифма. $\ln a = \log_e a$.

Более удобным при вычислении неопределенности 1^{∞} являются следствия из второго замечательного предела:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ \alpha\to 0\\ v\to\infty}} (1+\alpha(x))^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot v(x)}, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ u\to 1\\ v\to\infty}} (U(x))^{v(x)} = e^{\lim(u-1)v}.$$

Пример 2.7. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x-1}{3x^2+2}\right)^{\frac{x^3}{4x^2-1}} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x^2+2}\cdot\frac{x^3}{4x^2-1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4}{12x^4}} = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+5}{5x+1}\right)^{\frac{3}{\sqrt{x}-1}} = (1^{\infty}) = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+5}{5x+1}-1\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{x}-1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{4(1-x)\cdot 3(\sqrt{x}+1)}{(5x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}} = e^{-4}$