Задания к теме 1 Тема Предел и непрерывность

Вариант 1

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+2}{2x^2-7x+6}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+2x+1}-5x)$,

в) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{2x+7}-5}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot \mathrm{tg}^2(x/3)}{\cos 2x\,\sin^3(2x)}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+3x-5}$,

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x-2}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & \text{если } x<1,\\ 2x-5, & \text{если } 1\le x\le 4,\\ (x-5)^2, & \text{если } 4<x<7,\\ 1, & \text{если } x=7,\\ 2^{9-x}, & \text{если } x>7.\end{cases}$$

3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6\sin x-6x+x^3}{x^5}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{2/(1-x)}$.

Вариант 2

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+8x+5}{5x^2+4x+10}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{36x^2+8x+9}-6x)$,

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{\sqrt{4x+21}-3}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2(x/4)}{\mathrm{tg}(2x^2)}$,

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$,

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{4x-5}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x+2|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-1)^2, & \text{если } 0<x<3,\\ 1, & \text{если } x=3,\\ 3+\log_3 x, & \text{если } 3<x\le 9,\\ 1/(x-9), & \text{если } x>9.\end{cases}$$

3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\sqrt{x}}$.

Вариант 3

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-6x-7}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-8x})$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-2)(3x-2)}{2x^3+3x^2-2x+1}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x/2)\cdot \operatorname{tg}3x}{\arcsin 6x\cdot\sin 5x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$,

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-2}{9x+1}\right)^{2x+5}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln|2+x|, & \text{если } x<-2,\\ 2x+3, & \text{если } -2\le x\le 1,\\ (x-1)^2-1, & \text{если } 1<x<4,\\ 1, & \text{если } x=4,\\ 2^{7-x}, & \text{если } x>4.\end{cases}$$

3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{\pi(x-1)}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+2n}$.

Типовые задания

11 - 15. Построить график функции y = A sin(ax + b) преобразованием графика функции y = sin x.

11. y = $\frac{3}{2}$ sin (2x+3).

12. y = $\frac{5}{6}$ sin ($\frac{2}{3}$ x+1).

13. y = - $\frac{6}{5}$ sin (x+1).

14. y = 3 sin (4x-2).

15. y = - sin ($\frac{x}{2}$ - 1).

16 - 20. Построить график функции y = A cos (ax + b) преобразованием графика функции y = cos x.

16. y = 2 cos ($\frac{3}{2}$ x - 1).

17. y = $\frac{3}{2}$ cos ($\frac{x}{2}$ + 1).

18. y = -2 cos (3x + 1).

19. y = -2 cos (x + 1).

20. y = -3 cos (3x + 2).

21 - 100. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg}x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to x}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln(x)]$.

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln(x)]$.

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{(3x-3)}}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^2+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-8)^{\frac{2x}{(x-4)}}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} 5x\operatorname{ctg}3x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{(x-3)}}$.

31 - 13. Задана функция y = f(x) и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

31. $f(x) = 9^{1/(2-x)}$, $x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

32. $f(x) = 4^{1/(3-x)}$, $x_1 = 1,\ x_2 = 3.$

33. $f(x) = 12^{1/x}$, $x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

34. $f(x) = 3^{1/(4-x)}$, $x_1 = 2,\ x_2 = 4.$

35. $f(x) = 8^{1/(5-x)}$, $x_1 = 3,\ x_2 = 5.$

36. $f(x) = 3^{1/(7-x)}$, $x_1 = 5,\ x_2 = 7.$

37. $f(x) = 14^{1/(6-x)}$, $x_1 = 4,\ x_2 = 6.$

38. $f(x) = 15^{1/(8-x)}$, $x_1 = 6,\ x_2 = 8.$

39. $f(x) = 11^{1/(4+x)}$, $x_1 = -4,\ x_2 = -2.$

40. $f(x) = 13^{1/(2-x)}$, $x_1 = 2,\ x_2 = -3.$

41 - 120. Задана функция y=f(x). Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

41. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} -x, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ x+1, & x>2. \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \pi; \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0; \\ x, & x>0. \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \le 0; \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \le \pi/4; \\ 2, & x > \pi/4. \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 0; \\ x^2+1, & 0 < x \le 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

120. $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \le 0; \\ x, & 0 < x < 4 \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$