Автономная некоммерческая организация
высшего образования
«Сибирский институт бизнеса, управления и психологии»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 «Экономика»

Красноярск 2019

Издаётся по решению научно-методического совета экономического факультета АНО ВО СИБУП

Коренюгина Л.М.
Линейная алгебра: методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 Экономика / Л.М.Коренюгина. – Красноярск: АНО ВО СИБУП, 2019. – 56 с.;

Методические указания включают содержание основных вариантов контрольных работ по дисциплине и задания к ним. Представлены контрольные вопросы.

©АНО ВО СИБУП, 2019
©Коренюгина Л.М., 2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 4

Раздел I СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ 5

1.1Содержание дисциплины «Линейная алгебра» 5
1.2 Методические указания к выполнению заданий 9
1.3.Примеры решения задач 20

Раздел II ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 40

Раздел III КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА» 53

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... 55

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина Линейная алгебра является частью математического цикла (вариативная часть) дисциплин подготовки студентов по направлению подготовки направлению 38.03.01 «Экономика». Дисциплина реализуется на Экономическом факультете Сибирского института бизнеса, управления и психологии кафедрой Прикладной математики и информатики.

Целью преподавания дисциплины является развитие у студентов логического мышления, привитие навыков чёткой формулировки прикладной задачи, её корректного математического описания и правильного использования математических аппаратных средств для её решения.

Задачи:

– формирование целостного представления об основных этапах становления современной математики и её структуре;

– определение роли и места математики в различных предметных областях;

– формирование основных особенностей математического мышления;

– формирование представления о важнейших математических понятиях, на основе которых возможны корректное применение математики в практической деятельности;

– формирование математической культуры обучающихся;

– развитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с методами сбора и обработки статистической информации, оценки состояния и перспектив развития экономических процессов; решением прикладных задач, применение математического аппарата при анализе сложных экономических процессов, принятии решений.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции (50 часов), практические занятия (50 часов), самостоятельная работа студента (66 часов), консультации.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме опроса, рубежный контроль в форме тестирования и промежуточный контроль в форме экзамена.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 6 зачётных единиц, т.е. 216 часов.

Раздел I СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1.1Содержание дисциплины «Линейная алгебра»

Таблица 1. Тематический план лекционных занятий

Номера разделов дисциплины	Тема лекции
Раздел 1.Матрицы и определители	Тема 1. Матрицы и действия над ними
	Тема 2. Определители и их свойства
Раздел 2.Системы линейных уравнений	Тема 3. Решение систем линейных уравнений
Раздел 3.Элементы матричного анализа	Тема 4 Векторная алгебра
	Тема 5. Квадратичные формы
Раздел 4. Приложения матричного анализа в геометрии	Тема 6. Прямая и плоскость в пространстве
	Тема 7. Кривые второго порядка
	Тема 8. Поверхности второго порядка
Раздел 5. Приложения матричного анализа в экономике	Тема 9. Балансовые модели

Таблица 2. Тематический план практических занятий

Номера разделов дисциплины	Тема практического занятия
Раздел 1. Матрицы и определители	Тема 1. Матрицы и действия над ними
	Тема 2. Определители и их свойства
Раздел 2. Системы линейных уравнений	Тема 3. Решение систем линейных уравнений
Раздел 3.Элементы матричного анализа	Тема 4 Векторная алгебра
	Тема 5. Квадратичные формы
Раздел 4. Приложения матричного анализа в геометрии	Тема 6. Прямая и плоскость в пространстве
	Тема 7. Кривые второго порядка
	Тема 8. Поверхности второго порядка
Раздел 5. Приложения матричного анализа в экономике	Тема 9. Балансовые модели

Раздел 1. Матрицы и определители

Тема 1. Матрицы и действия над ними

1. Матрицы и их классификации.
2. Действия над матрицами.
3. Экономические примеры.
4. Обратная матрица.
5. Теорема существования и единственности обратной матрицы.
6. Способы вычисления обратной матрицы.
7. Ранг матрицы.
8. Элементарные преобразования и их применение для нахождения ранга.

Тема 2. Определители и их свойства

1. Определители 2–го и 3–го порядка.
2. Понятие об определителях n–го порядка.
3. Свойства определителей.
4. Способы вычисления определителей n–го порядка.

Раздел 2. Системы линейных уравнений

. Тема 3. Решение систем линейных уравнений

1. Системы линейных уравнений, основные понятия.
2. Матричная и векторная формы записи системы линейных уравнений.
3. Теорема Крамера.
4. Понятие о базисном миноре.
5. Теорема Кронекера–Капелли.
6. Исследование системы линейных уравнений.
7. Метод Гаусса.
8. Однородные системы.
9. Экономические примеры. Модель межотраслевого баланса (Модель Леонтьева).
10. Геометрическая интерпретация систем линейных уравнений и неравенств.

Раздел 3. Элементы матричного анализа

Тема 4. Векторная алгебра

1. Векторы и действия с ними.
2. Координатные орты.
3. Разложение вектора по координатным осям, координаты вектора.
4. Длина вектора. Скалярное произведение 2–х векторов и его свойства.
5. Угол между векторами.
6. Пространство R^n; n–мерные векторы и действия над ними. n – мерное векторное пространство.
7. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов, критерии линейной зависимости и независимости системы векторов.
8. Базис пространства R^n, разложение вектора по базису.

Тема 5. Прямая и плоскость в пространстве

1. Прямоугольные (декартовы) координаты на плоскости и в пространстве.
2. Расстояние между двумя точками.
3. Деление отрезка в данном отношении.
4. Преобразование координат на плоскости.
5. Уравнение линии на плоскости.
6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
7. Общее уравнение прямой и его исследование.
8. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении. Уравнение пучка прямых.
9. Уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки.

10. Угол между 2–мя прямыми.
11. Условие параллельности и перпендикулярности 2–х прямых.
12. Экономические примеры (Простые проценты. Линия спроса и предложения. Точка равновесия: равновесная цена и равновесный объем).
13. Поверхности и линии в пространстве.
14. Общее уравнение плоскости и его исследование.
15. Канонические уравнения прямой в пространстве.

Раздел 4. Приложения матричного анализа в геометрии

Тема 6. Квадратичные формы

1. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы и их свойства.
2. Модель международной торговли.
3. Линейная модель затраты–выпуск.
4. Линейные модели обмена

Тема 7. Кривые второго порядка

1. Кривые 2–го порядка и их канонические уравнения.
2. Окружность. Эллипс, гипербола, парабола. Их канонические уравнения, их свойства.
3. Равнобочная гипербола.
4. Гипербола, как график дробно–линейной функции.
5. Парабола, как график квадратного трехчлена.

Тема 8. Поверхности второго порядка

1. Каноническое уравнение поверхностей второго порядка сферы, конуса, асимптотического конуса, параболоида, гиперболоида.
2. Параметрическое уравнение поверхностей второго порядка.

Раздел 5. Приложения матричного анализа в экономике

Тема 9. Балансовые модели

1. Представление балансовой модели экономики виде в табличном и матричном. Экономические величины в описании балансовой модели.
2. Матрицы коэффициенты прямых, косвенных и полных затрат продукции и ресурсов.
3. Матричная форма системы балансовых уравнений
4. Вектор-план и вектор затрат ресурсов.

1.2 Методические указания к выполнению заданий

Определения

Определение 1. Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел, расположенных в (m) строках и (n) столбцах. Например, матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ имеет размер (2×4). В общем виде матрицу размера $(m \times n)$ записывают так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} (i=1,2,…,m), (j=1,2,…,n), входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами. Индекс i указывает номер строки, в которой находится элемент, j – номер столбца.

Часто для сокращения матрицу обозначают так:

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}), \dots,$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – элементы соответствующих матриц.

Определение 2. Матрица A^* называется транспонированной по отношению к матрице A, если столбцы матрицы A являются строками матрицы A^* с теми же номерами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Транспонированной матрицей A^* будет матрица вида

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

При решении задач часто встречаются следующие виды матриц:

1. Квадратная матрица.

Матрица, в которой число строк равняется числу столбцов (m=n). Число ее строк (столбцов) называется *порядком* квадратной матрицы. Квадратная матрица порядка (n) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной диагоналей. Главной диагональю квадратной матрицы называют диагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, идущую из левого верхнего угла этой матрицы в ее правый нижний угол. Побочной диагональю называется диагональ $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

2. Диагональная матрица.

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Единичная матрица.

Единичной матрицей называют диагональную матрицу, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице. Обозначают ее обычно буквой Е:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Матрица-строка и матрица-столбец.

Матрица-строка – это матрица, состоящая из одной строки:

$$A = \left(a_1, a_2, \dots, a_n\right).$$

Матрица-столбец – это матрица, состоящая из одного столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

1.2. Действия над матрицами

Равенство матриц.

Матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ называются равными (что обозначается A=B), если их размеры совпадают и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$.

Сложение и вычитание матриц.

Суммой (разностью) матриц $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ одинаковых размеров называется матрица $C = c_{ij}$ (обозначается $C = A \pm B$) тех же размеров, элементы которой равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B $\left(c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}\right)$.

Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ на число α называется матрица $B=\left(b_{ij}\right)$ (что обозначается $B=\alpha\cdot A$ или $B=A\cdot\alpha$), элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A, умноженным на это число $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$. Из этого определения вытекают следующие операции умножения матрицы на число:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,$$
$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,$$
$$(\alpha\cdot\beta)A=\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A).$$

Здесь α и β – два произвольных числа, A и B – две матрицы одного размера.

Отметим, что операцию вычитания матриц можно определить еще одним способом с помощью операций сложения матриц и умножения матриц на число равенством

A – B = A+(-1)B.

Все перечисленные выше действия над матрицами называют линейными.

Умножение матриц.

Умножение матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)$ определяется только при условии, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Если матрица A имеет размер $\left(m\times p\right)$, B – размер $\left(p\times n\right)$, то произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C=c_{ij}$ (что обозначается $C=A\cdot B$) размера $\left(m\times n\right)$, элементы которой определяются по следующему правилу. Для того, чтобы получить элемент матрицы C, стоящий в пересечении ее i-й строки и j-го столбца, нужно каждый элемент i-й строки матрицы A умножить на соответствующий элемент j-го столбца матрицы B и все полученные произведения сложить. Таким образом, элементы c_{ij} матрицы $C=A\cdot B$ определяются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj}.$$

Определители

Для квадратных матриц вводится важнейшая числовая характеристика, которую называют определителем (детерминантом) и часто обозначают одним из символов: Δ, detA, $|A|$.

Рассмотрим сначала квадратную матрицу второго порядка. Ее определителем называется число, равное разности произведений элементов, стоящих на главной и побочной диагоналях:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Рассмотрим теперь определитель произвольного порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определение 3. Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, получающийся из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Определение 5. Определитель произвольного порядка n равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Обратная матрица

Определение 6. Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю.

Только для квадратных невырожденных матриц A вводится понятие обратной матрицы (обозначают ее A^{-1}).

Определение 7. Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной невырожденной матрицы A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Один из способов нахождения обратной матрицы состоит в следующем. Для матрицы A вычисляют определитель Δ и для всех ее элементов a_{ij} – их алгебраические дополнения A_i. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения, соответствующие элементам данной строки, располагаются в столбце, номер которого равен номеру строки.

. Системы линейных алгебраических уравнений

Определение 8. Системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – заданные числа, которые называют коэффициентами системы; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – также известные числа, которые называют свободными членами системы.

Решением системы (1) называется любая совокупность значений неизвестных $x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_n = \alpha_n$, при подстановке которых в систему все ее уравнения обращаются в тождества (верные равенства).

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы.

Матрица

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ называется расширенной матрицей системы.

1.6. Системы (n) линейных уравнений с (n) неизвестными. Формулы Крамера

При решении задач часто приходится иметь дело с системами уравнений, у которых число уравнений равно числу неизвестных, то есть с системами вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Предположим, что определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (2) (определитель системы), отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При соблюдении этих условий найдем решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (3)$$

Формулы (3) называются *формулами Крамера*, в них Δ_i – определители, получающиеся из определителя Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Отметим еще раз, что формулы Крамера можно использовать только для решения систем линейных уравнений, у которых число уравнений равно числу неизвестных и определитель системы $\Delta \neq 0$.

Матричный способ решения систем

Рассмотрим опять систему линейных уравнений (2), у которой число уравнений равно числу неизвестных и определитель системы $\Delta \neq 0$. Свяжем с системой (2) три матрицы: матрицу системы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

матрицу-столбец X из неизвестных и матрицу-столбец B из свободных членов системы:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Пользуясь правилом умножения матриц, систему (2) можно записать в матричной форме так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

AX=B. (4)

Умножим уравнение (4) слева на матрицу A^{-1}, обратную матрице A. В результате получим

$$A^{-1}AX=A^{-1}B.$$

Учитывая, что $A^{-1}A=E$, $EX=X,$ находим

$$X=A^{-1}B.\ (5)$$

Формула (5) и дает решение системы (2) в матричном виде. Легкость такого решения только кажущаяся, так как вся трудность заключается в нахождении обратной матрицы.

Метод Гаусса

Определение 9. Две системы уравнений называются равносильными, если эти системы имеют одни и те же решения.

При решении системы уравнений обычно заменяют данную систему другой, более простой или по каким-либо причинам более «удобной», но равносильной первоначальной. Решая эту более простую систему, находят решение исходной.

Из школьного курса математики известно, что при замене системы линейных уравнений равносильной, можно проводить следующие операции:

переставлять уравнения, входящие в систему;

умножать любое уравнение системы на любое число α, не равное нулю;

прибавлять к любому уравнению системы другое уравнение, умноженное на любое число α, не равное нулю.

Одним из методов решения систем линейных уравнений является метод исключения неизвестных. Состоит он в том, что с помощью перечисленных выше операций из системы исключаются все переменные, кроме одной, и система приводится к одному уравнению, содержащему одну неизвестную, то есть к уравнению вида

$$ax_k = b.$$

При решении этого уравнения возможны три случая:

Если $a \neq 0$, уравнение имеет единственное решение $x_k = \frac{b}{a}$.

Если a=0 и b=0, уравнение, а следовательно, и система имеют бесконечно много решений, так как любое число x_k удовлетворяет уравнению $0 \cdot x_k = 0.$

Если a=0, но $b \neq 0$, уравнение, а следовательно, и система решений не имеют, так как при подстановке в уравнение вместо x_k любого числа в левой части получается нуль, в то время как правая часть отлична от нуля.

Метод Гаусса состоит в следующем. Для системы выписывают расширенную матрицу системы и приводят ее к трапециевидному виду с помощью элементарных преобразований над строками (и только над ними) матрицы. По виду полученной трапециевидной матрицы делают вывод о совместности или несовместности системы. В случае совместности выписывают систему уравнений,

соответствующую трапециевидной матрице (она будет равносильна исходной), и затем, решая ее, находят решение исходной системы.

1.3.Примеры решения задач

1. Перемножить матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Обозначим матрицы

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

При умножении матрицы на матрицу действует правило: каждая строка первой матрицы умножается на каждый столбец второй матрицы.

Перемножим первые две матрицы:

$$D = A\cdot B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = -2\cdot 3+1\cdot 4 = -6+4 = -2$$

$$a_{12} = -2\cdot -2+1\cdot 0 = 4+0 = 4$$

$$a_{13} = -2\cdot 1+1\cdot 5 = -2+5 = 3$$

$$a_{21} = 3\cdot 3+1\cdot 4 = 9+4 = 13$$

$$a_{22} = 3\cdot -2+1\cdot 0 = -6+0 = -6$$

$$a_{23} = 3\cdot 1+1\cdot 5 = 3+5 = 8$$

Затем результат умножим на третью матрицу:

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -14 & 4 \\ 49 & 26 & 49 \end{pmatrix}$$

$$d_{11} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot -2 + 3 \cdot 3 = -2 - 8 + 9 = -1$$

$$d_{12} = -2 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot -2 = -8 + 0 - 6 = -14$$

$$d_{13} = -2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = -6 + 4 + 6 = 4$$

$$d_{21} = 13 \cdot 1 - 6 \cdot -2 + 8 \cdot 3 = 13 + 12 + 24 = 49$$

$$d_{22} = 13 \cdot 4 - 6 \cdot 0 + 8 \cdot -2 = 42 - 0 - 16 = 26$$

$$a_{23} = 13 \cdot 3 + -6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 39 - 6 + 16 = 49$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -14 & 4 \\ 49 & 26 & 49 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ б)

$$\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix}.$$

Решение

а)

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1) \cdot (3) \cdot 2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot (-2) \cdot (-1) =$$

$$= (-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 3\cdot (-1)^{1+1}\cdot M_{11} = (-1)\cdot 3\cdot (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 3\cdot 1\cdot (2\cdot (-2) - (-3)\cdot (-2)) = -3\cdot (-4-6) = 30$$

б) $\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ 7240 & 7242 & 7246 \\ 7239 & 7240 & 7241 \end{vmatrix} \cdot (-1)\cdot (-1) = \begin{vmatrix} 7241 & 7243 & 7245 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$ От элементов второго и третьего столбца отнимем элементы первого столбца

$$= \begin{vmatrix} 7241 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$ К элементам первой строки прибавим удвоенные элементы третьей строки

$$= \begin{vmatrix} 7237 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 7237\cdot A_{11} = 7237\cdot (-1)^{1+1} M_{11} = 7237\cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 7237\cdot 1\cdot (0\cdot (-2) - (-1)\cdot 2) = 7237\cdot 2 = 14474$$

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 1x + 2y - z = 2, \\ 3x + 4y + 3z = 4, \\ 2x + 3y + 3z = 5. \end{cases}$$

Решение:

Запишем основную и расширенную матрицы для данной системы линейных уравнений, а также столбец свободных членов

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix} \qquad A_{расш}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 3 & 5\end{array}\right) \qquad B=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 5\end{pmatrix}$$

Найдем определитель основной матрицы

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot3+2\cdot3\cdot2+3\cdot3\cdot(-1)-2\cdot4\cdot(-1)-3\cdot(3)\cdot1-3\cdot2\cdot3=-4$$

Так как найденный определитель отличен от нуля, то ранг матрицы A=3

Данный определитель является минором матрицы $A_{расш}$, rang A=rang $A_{расш}$=3, система совместна и имеет единственное решение.

Найдем решение системы методом Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 4 & 4 & 3\\ 5 & 3 & 3\end{vmatrix}=2\cdot4\cdot3+2\cdot3\cdot5+4\cdot3\cdot(-1)-5\cdot4\cdot(-1)-3\cdot(3)\cdot2-4\cdot2\cdot3=-4$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 3\\ 2 & 5 & 3\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot3+3\cdot5\cdot(-1)+2\cdot3\cdot2-2\cdot4\cdot(-1)-5\cdot(3)\cdot1-3\cdot2\cdot3=-16$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=1\cdot4\cdot5+3\cdot3\cdot2+2\cdot4\cdot2-2\cdot4\cdot2-3\cdot4\cdot1-3\cdot2\cdot5=-4$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{20}{-4}=-5 \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-16}{-4}=4 \quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1$$

Б) метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы, а затем при помощи элементарных преобразований строк приведем её к треугольному виду:

$$A_{расш}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 3 & 5\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-3)\cdot(-2)\\ \cdot 1\\ \cdot 1\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 6 & -2\\ 0 & -1 & 5 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(1)\\ \cdot -2\end{array}\approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 6 & -2\\ 0 & 0 & -4 & -4\end{array}\right)\begin{array}{l}:\\ \\ :-4\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 6 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}:\ *1\\ *1\\ *-6*1\end{array}\approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 0 & -8\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}:\ *1\\ *1\\ *-6*1\end{array}\approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}*1\\ *-2\\ \\ \end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$$

В) С помощью обратной матрицы

Чтобы найти решение системы, нужно вычислить обратную матрицу для основной матрицы

Вычисляем определитель исходной матрицы:

Найдем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-1)^2\cdot(4\cdot 3-3\cdot 3)=3$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^3\cdot(3\cdot(3)-2\cdot(3))=-5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot(3\cdot 3-2\cdot 4)=1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot M_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-1)^3\cdot(2\cdot(3)-3\cdot(-1))=-9$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot(1\cdot 3-2\cdot(-1))=5$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=(-1)^5\cdot(1\cdot 3-2\cdot 2)=1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot M_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=(-1)^4\cdot(2\cdot(3)-4\cdot(-1))=10=$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-1)^5\cdot(1\cdot(3)-3\cdot(-1))=-6$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(-1)^6\cdot(1\cdot 4-3\cdot 2)=-2$$

Теперь, используя найденную обратную матрицу можно найти решение исходной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-18} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 & 10 \\ -3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$A_расширенное = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \cdot 1 \end{matrix} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right) \cdot 3 \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -29 & -18 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 1x_1 - 29x_3 - 18x_4 = -1 \\ 1x_2 - 11x_3 - 7x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 29x_3 + 18x_4 - 1 \\ x_2 = 11x_3 + 7x_4 - 1 \end{cases}$$ Общее решение

Если x3=1 x4=0

$$\begin{cases} x_1 = 29 \cdot 1 + 18 \cdot 0 - 1 = 28 \\ x_2 = 11 \cdot 1 + 7 \cdot 0 - 1 = 10 \end{cases}$$

частное решение

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

а) методом окаймляющих миноров

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 16 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\cdot 6 + 1\cdot 0\cdot 16 + (-2)\cdot 1\cdot 2 - 16*1\cdot 2 - 1*0*4 - (-2)\cdot 1*6 =$$

$$= 24 + 0 - 4 - 32 - 0 + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 1*6 - 0*2 \neq 0$$

Ранг =2

б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \\ (2) \\ \cdot 1 \end{matrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг =2

6. Показать, что векторы *a*, *b*, *c*, образуют базис. Найти разложение вектора *d* по этому базису, если *a* = (2;4;2), *b* = (–1;–2;–2), *c* = (3;5;1), *d* = (3;5;–1).

Решение

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ -1 & -2 & -2\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}=2\cdot-2\cdot1+-1\cdot5\cdot2+4\cdot-2\cdot3-3\cdot-2\cdot2-5\cdot-2\cdot(2)--1\cdot4\cdot1=-2\neq0\Rightarrow$$

Векторы линейно независимы и образуют базис.
Найдем координаты вектора d в этом базисе.

$$\vec{d}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{в}+\gamma\cdot\vec{c}$$

$$\begin{cases}3=\alpha\cdot(2)+\beta\cdot-1+\gamma\cdot3\\ 5=\alpha\cdot4+\beta\cdot-2+\gamma\cdot5\\ -1=\alpha\cdot2+\beta\cdot-2+\gamma\cdot1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 3 & 3\\ 4 & -2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -4\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{array}\right)\approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\alpha=1$$
$$\beta=2$$
$$\gamma=1$$
$$\vec{d}=1\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{в}+1\cdot\vec{c}$$

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(a-3b)(2a+b)$, б) $|(a-3b)\times(2a+b)|$,

где $|a|=4$, $|b|=2$, $a\hat{}b=2\square/3$.

а) $(a-3b)(2a+b)$

$$\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{a}-3\vec{b}^{\,2}=2\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^{\,2}=$$

$$2\vec{a}^{\,2}-\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^{\,2}=2\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right)-3\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$2\cdot4^2-4\cdot2\cdot\cos\frac{2\pi}{3}-3\cdot2^2=32-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-12=28$$

б) $|(a-3b)\times(2a+b)|$

$$\left[\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\times\left(\vec{2a}+\vec{b}\right)\right]=\left|2\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{b}\times\vec{b}\right|=$$

$$,=\left|2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\sin0+2\vec{a}\times\vec{b}+3\vec{a}\times\vec{b}-3\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin0\right|=$$

$$=0+5\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\vec{b}\right)-0=5*4*2*\sin\frac{2\pi}{3}=40*\sqrt{3}/2=20\sqrt{3}$$

8. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани *ABC*, в) косинус угла между ребрами *AB* и *AC*, г) уравнение прямой *AB*, д) уравнение плоскости *ABC*, если *A*(1;3;–1), *B*(2;–2;0), *C*(–1;1;2), *D*(3;2;1).

Даны координаты вершин пирамиды A1,A2,A3,A4

Определим координаты векторов с вершинами в данных точках.

$$\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1}\right)=\left(2-1\ \ ;\ \ -2-3\ \ ;\ \ 0-(-1)\right)=$$

$$(1;-5;1)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1}\right)=\left(-1-1;1-3;2-(-1)\right)=\left(-2;-2;3\right)$$

$$\overrightarrow{AД}=\left(\overrightarrow{x_4-x_1;y_4-y_1;z_4-z_1}\right)=\left(3-1;2-3;1-(-1)\right)=$$

$$\left(2\ \ ;\ \ -1\ \ ;\ \ 2\right)$$

А)Объем пирамиды

$$V_{ABCД}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&-5&1\\-2&-2&3\\2&-1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\left(1\cdot(-2)\cdot2+(-2)\cdot(-1)\cdot1+(-5)\cdot3\cdot2\right.$$

$$\left.\cdot\ 1-(-1)\cdot3\cdot1-(-2)\cdot(-5)\cdot2\right)=\frac{|-45|}{6}=7.5$$

Б)Площадь грани находится по формуле:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[AB\times AC\right]\right|$$

$$[AB \times AC] = \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{Vmatrix} = -13 \quad i \quad -5j - 12k = (-13;-5;-12)$$

$$\|[AB \times AC]\| = \sqrt{(-13)^2 + (-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{338}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|[AB \times AC]\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{338} = 18.358 \text{ кв.ед.}$$

в) косинус угла между ребрами *AB* и *AC*

$$cos\left(\overline{AB} \hat{} \overline{AC}\right) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right|}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1*(-2) + (-5)*(-2) + 1*3 = 11$$

$$cos\left(\overline{AB} \hat{} \overline{AC}\right) = \frac{11}{5 \cdot 3} = 0.70565$$

г) уравнение прямой AB,

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+1}{1}$$

д) уравнение плоскости ABC,

$$-13(x - 1) + -5 \cdot (y - 3) + -12 \cdot (z + 1) = 0$$

$$-13x - 5y - 12z + 16x = 0$$

9. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0, \\ x - 2y + 3z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x = 3y - z - 2 \\ x = 2y - 3z - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - z - 2 \\ 3y - z - 2 = 2y - 3z - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - z - 2 \\ 3y - z - 2 - 2y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - z - 2 \\ y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - z - 2 \\ y = -2z - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-2z - 1) - z - 2 \\ y = -2z - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (-6z - 3) - z - 2 \\ y = -2z - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7z - 5 \\ y = -2z - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+5}{-7} = z \\ \dfrac{y+1}{-2} = z \end{cases}$$

$$\frac{x+5}{-7} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$

10. Построить кривую □ = 3(1–cos2□), заданную в полярных координатах.

□	0	п/8	п/4	3п/8	п/2	5п/8	3п/4	7п/8	п
□	4	3,4	2	0,6	0	0,6	2	3,4	4

□	9п/8	5п/4	11п/8	3п/2	13п/8	7п/4	15п/8	2п
□	3,4	2	0,6	0	0,6	2	3,4	4

11.Дан параллелограмм *ABCD*, три вершины которого заданы. Найти четвертую вершину и острый угол параллелограмма.

A	*B*	*C*
(2;3;1)	(-4; -2; 3)	(-3; 2; -4)

$$\overrightarrow{AB} = \left(\overline{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1}\right) = (-4-2;-2-3;3-1) = (-7;8;2)$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\overline{x_3 - x_2; y_3 - y_2; z_3 - z_2}\right) =$$

$$(-3-(-4);2-(-2);-4-3) = (1;4;-7)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\overline{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1}\right) = (-3-2;2-3;-4-1) = (-5;-1;-5)$$

AB: $\frac{x-2}{-7} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{2}$

BC: $\frac{x+4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-7}$

AC: $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-5}$

AD: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{-7}$

CD: $\frac{x+3}{-7} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+4}{2}$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{-7} \\ \frac{x+3}{-7} = \frac{y-2}{8} = \frac{z+4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{x+3}{-7} \\ \frac{y-3}{4} = \frac{y-2}{8} \\ \frac{z-1}{-7} = \frac{z+4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7(x-2) = 1*(x-1) \\ 8*(y-3) = 4*(y-2) \\ 2*(z-1) = -7*(z+4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7x+14 = x-1 \\ 8y-24 = 4y-8 \\ 2z-2 = -7z-28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x = -15 \\ 4y = 16 \\ 9z = -26 \end{cases}$$

D: $\begin{cases} x = 15/8 \\ y = 4 \\ z = -26/9 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = \left(\overline{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1}\right) = (-4-2;-2-3;3-1) = (-7;8;2)$

$\overrightarrow{BA} = \left(\overline{7;-8;-2}\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(\overline{x_3 - x_2; y_3 - y_2; z_3 - z_2}\right) =$

$(-3-(-4);2-(-2);-4-3) = (1;4;-7)$

$\overrightarrow{AC} = \left(\overline{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1}\right) = (-3-2;2-3;-4-1) = (-5;-1;-5)$

Определим длину данных векторов

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(7)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+16+49} = \sqrt{66}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (7;-8;-2) * (1;4;-7) = 7*1 + (-8)*4 + (-2)*(-7) = 7 - 28 + 14 = -7$

$$\cos \overline{BA} \wedge \overline{BC} = \frac{\overline{BA} * \overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right| * \left|\overline{BC}\right|} = \frac{-7}{\sqrt{117} * \sqrt{66}}$$

$$\overline{BA} \wedge \overline{BC} = \arccos \frac{-7}{\sqrt{117} * \sqrt{66}}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AD} = \pi - \arccos \frac{-7}{\sqrt{117} * \sqrt{66}}$$

12.Найти длину высоты *AD* в треугольнике с вершинами *A, B, C* и написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки *C* на прямую *AB*.

A	*B*	*C*
(4; -5)	(-3; 3)	(-5; -2)

$\overrightarrow{AB} = \left(\overline{x_2 - x_1; y_2 - y_1}\right) = (-3-4;3-(-5)) = (-7;8)$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\overline{x_3 - x_2; y_3 - y_2}\right) = (-5-(-3);-2-3) = (-2;-5)$$
$$\overrightarrow{AC} = \left(\overline{x_3 - x_1; y_3 - y_1}\right) = (-5-4;-2-(-5)) = (-9;3)$$

уравнение прямой BC,

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y-3}{-5}$$

$$-5x-15 = -2y+6$$
$$-5x+2y-21 = 0$$
$$d = \frac{\left|-5*4+2*(-5)-21\right|}{\sqrt{(-7)^2+8^2}} = \frac{51}{\sqrt{113}}$$

В треугольнике *ABC* найдем уравнение высоты, проведенной из вершины *C*

$$\overrightarrow{AB} = (-7;8)$$
$$\overline{CH} \perp \overline{AB}$$
$$\overline{CH} * \overline{AB} = 0$$

уравнение прямой AB,

$$\frac{X-4}{-7} = \frac{Y+5}{8}$$

$$-\frac{8x}{7} + \frac{4}{7} = y+5$$
$$-\frac{8x}{7} + \frac{4}{7} - 5 = y$$
$$Y = -\frac{8x}{7} - \frac{31}{7}$$
$$8x+7y+31 = 0$$
$$K_{AB} = y' = \left(-\frac{8x}{7} - \frac{31}{7}\right)' = -\frac{8}{7}$$
$$K_{CH} = \frac{-1}{K_{AB}} = \frac{-1}{\frac{-8}{7}} = \frac{7}{8}$$

$$y = y_c + K_{CH}(x - x_c)$$

CH $y = -5 + \frac{7}{8} * (x - (-2))$

$$y = -5 + \frac{7}{8}X + \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{7}{8}X - \frac{13}{4}$$

$$7X - 8Y - 26 = 0$$

11. Найти угол между плоскостью а и прямой, проходящей через начало координат и точку M .Вычислить расстояние от точки M до плоскости α .

M	α
(2; 1;-3)	-x + y + 2z + 5 = 0

$$\overrightarrow{OM} = \left(\overline{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1}\right) = (2-0;1-0;-3-0) = (2;1;-3)$$

$$\sin \overline{OM} \wedge \overline{N} = \frac{\overline{OM} * \overline{N}}{\left|\overline{OM}\right| * \left|\overline{N}\right|} = \frac{(2;1;-3) * (-1;1;2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} * \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{2*(-1) + 1*1 + (-3)*2}{\sqrt{14} * \sqrt{6}} = \frac{-7}{2\sqrt{21}} = \frac{-7\sqrt{21}}{42} = \frac{-\sqrt{21}}{6}$$

$$\overline{OM} \wedge \overline{N} = \arcsin \frac{-\sqrt{21}}{6}$$

$$d = \frac{\left|-2 + 1 + 2*(-3) + 5\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

14. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l (табл. 4).

Таблица 4.

M	***l***

(-1; 3; 2)	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$$

$$\bar{a}(2;1;3)$$

$$\overline{MH}=(x-(-1);y-3;z-2)=(x+1;y-3;z-2)$$

$$\bar{a}*\overline{MH}=(2;1;3)*(x+1;y-3;z-2)=2*(x+1)+1*(y-3)+3*(z-2)=$$

$$=2x+2+y-3+3z-6=0$$

$$2x+2+y-3+3z-6=0$$

$$2x+y+3z-7=0$$

$$y=-2x-3z+7$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{3}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z-2}{3}$$

$$3(x-1)=2*(Z-2)$$

$$3x-3=2z-4$$

$$z=\frac{3x-3+4}{2}=\frac{3x+1}{2}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{-2x-3z+7+3}{1}=\frac{z-2}{3}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{-2x-3z+10}{1}=\frac{z-2}{3}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{-2x-3z+10}{1}$$

$$1*(x-1)=2*(-2x-3z+10)$$

$$x-1=-4x-6z+20$$

$$5x=-6z+21$$

$$z=\frac{5x-21}{-6}$$

$$z=\frac{5x-21}{-6}=\frac{3x+1}{2}$$

$$2*(5x-21)=-6*(3x+1)$$

$$10x-42=-18x-6$$

$$10x+18x=-6+42$$

$$28x=36$$

$$x=36/28$$

$$x=9/7$$

$$z=\frac{3*9/7+1}{2}=\frac{27+7}{14}=\frac{34}{14}=\frac{17}{7}$$

$$y=-2*\frac{9}{7}-3*\frac{17}{7}+7=\frac{-18-21+49}{7}=\frac{10}{7}$$

H(9/7;10/7;17/7)

$$\frac{x-(-1)}{9/7-(-1)}=\frac{y-3}{10/7-3}=\frac{z-2}{17/7-2}$$

$$\frac{x+1}{\frac{9+7}{7}}=\frac{y-3}{\frac{10-21}{7}}=\frac{z-2}{\frac{17-14}{7}}$$

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y-3}{-11}=\frac{z-2}{3}$$ найденная высота

14. Вывести уравнение кривой, если абсолютная величина разности расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-7;0)$ и $F_2(13;0)$ есть величина постоянная и равна $p=16$. Сделать чертеж.

Пусть M(x;y)- произвольная точка кривой

$$\left|\overline{MF_1}\right|=\sqrt{(-7-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{(7+x)^2+y^2}$$

$$\left|\overline{MF_2}\right|=\sqrt{(13-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{(13-x)^2+y^2}$$

$$\left|\overline{MF_1}\right|-\left|\overline{MF_2}\right|=16$$

$$\sqrt{(7+x)^2+y^2}-\sqrt{(13-x)^2+y^2}=16$$

$$\sqrt{(7+x)^2+y^2}=\sqrt{(13-x)^2+y^2}+16$$

$$\left(\sqrt{(7+x)^2+y^2}\right)^2=\left(\sqrt{(13-x)^2+y^2}+16\right)^2$$

$$(7+x)^2+y^2=\left(\sqrt{(13-x)^2+y^2}\right)^2+2\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}\cdot 16+16^2$$
$$(7+x)^2+y^2=(13-x)^2+y^2+32\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}+256$$
$$49+14x+x^2+y^2=169-26x+x^2+y^2+32\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}+256$$
$$-376+40x=32\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}$$
$$-47+5x=4\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}$$
$$\left(-47+5x\right)^2=\left(4\cdot\sqrt{(13-x)^2+y^2}\right)^2$$
$$2209-470x+25x^2=16\left((13-x)^2+y^2\right)$$
$$2209-470x+25x^2=2704-416x+16x^2+16y^2$$
$$9x^2-54x-16y^2=495$$
$$9\left(x^2-6x\right)-16y^2=495$$
$$9\left(x^2-6x+9-9\right)-16y^2=495$$
$$9(x-3)^2-81-16y^2=495$$
$$9(x-3)^2-16y^2=276$$
$$\frac{9(x-3)^2-16y^2}{576}=\frac{276}{576}$$
$$\frac{(x-3)^2}{64}\frac{y^2}{36}=1$$

Гипербола

$$a=\sqrt{64}=8$$
$$b=\sqrt{36}=6$$

(3;0) центр

15. Привести уравнение $36x^2+49y^2+72x-196y-1442=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Решение:

$$36x^2+49y^2+72x-196y-1442=0$$
$$\left(36x^2++72x\right)+\left(49y^2-196y\right)-1442=0$$
$$36\cdot\left(x^2+2x\right)+49\cdot\left(y^2-4y\right)-1442=0$$
$$36\cdot\left(x^2+2x+1-1\right)+49\cdot\left(y^2-4y+4-4\right)-1442=0$$

$$36\cdot\left(\left(x^2+2x+1\right)-1\right)+49\cdot\left(\left(y^2-4y+4\right)-4\right)-1442=0$$

$$36\cdot\left((x+1)^2-1\right)+49\cdot\left((y-2)^2-4\right)-1442=0$$

$$36\cdot(x+1)^2-36+49\cdot(y-2)^2-196-1442=0$$

$$36\cdot(x+1)^2+49\cdot(y-2)^2-1674=0$$

$$36\cdot(x+1)^2+49\cdot(y-2)^2=1674$$

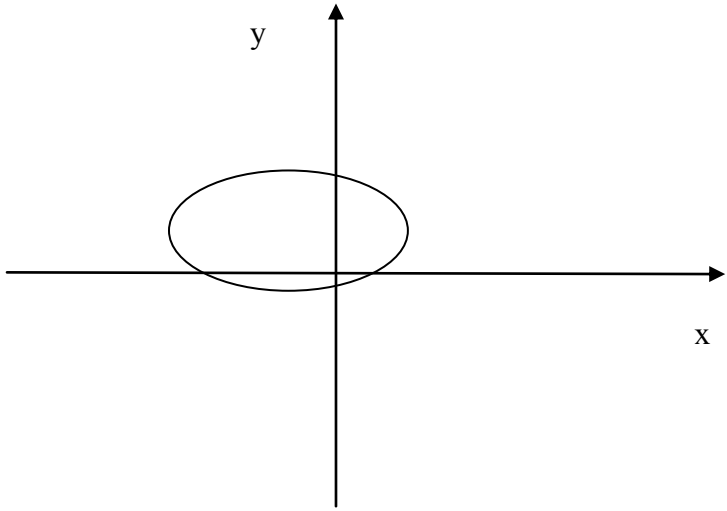
$$\frac{36\cdot(x+1)^2}{1674}+\frac{49\cdot(y-2)^2}{1674}=\frac{1674}{1674}$$

$$\frac{(x+1)^2}{46.5}+\frac{(y-2)^2}{34.16}=1$$

Эллипс, (-1;2) центр эллипса

$$a=\sqrt{46.5}$$

$$b=\sqrt{34.16}$$



Раздел II ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -8 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 5221 & 5223 & 5225 \\ 5220 & 5221 & 5221 \\ 5218 & 5221 & 5224 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} -x + y + 4z = 1, \\ 2x + 2y - z = 0, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (2;–1;1), b = (–1;2;1), c = (1;3;1), d = (–1;–2;3).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(2a–b)(3a+4b)$, б) $|(2a–b)\times(3a+4b)|$,

где $|a|=2$, $|b|=3$, $a\hat{}b=$ □ /6.

8. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB

и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, если $A(1;3;3)$, $B(-1;2;-2)$, $C(0;-1;3)$, $D(2;1;0)$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

10. Построить кривую $\square = 2\sin(2\square)$, заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если сумма расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-5;0)$ и $F_2(3;0)$ есть величина постоянная и равна $p=10$. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 2

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1362 & 1363 & 1363 \\ 1361 & 1366 & 1364 \\ 1362 & 1367 & 1365 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+3z=-1, \\ 3x+y-z=-3. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_5=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4-3x_5=4. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (2;4;2), b = (–1;–2;–2), c = (3;5;1), d = (3;5;–1).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(a-3b)(2a+b)$, б) $|(a-3b)\times(2a+b)|$,

где $|a|=4$, $|b|=2$, $a\hat{}b=2\square/3$.

8. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, если $A(3;2;1)$, $B(1;-2;3)$, $C(0;-1;4)$, $D(2;1;0)$.

9. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} 2x+3y-2z-5=0, \\ x-y+3z+6=0. \end{cases}$$

10. Построить кривую $\square = 2(1+\sin\square)$, заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если абсолютная величина разности расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-3;0)$ и $F_2(7;0)$ есть величина постоянная и равна p=6. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $4x^2+5y^2+24x+30y+61=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 3

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 8127 & 8129 & 8131 \\ 8126 & 8128 & 8132 \\ 8125 & 8126 & 8127 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x-y-z=-3, \\ 3x-2y-4z=-7. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (2;2;3), b = (5;1;2), c = (–1;–3;–2), d = (8;0;1).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(a+2b)(b-3a)$, б) $|(a+2b)\times(b-3a)|$,

где $|a|=2$, $|b|=3$, $a\hat{}b=\square/4$.

8. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, если A(2;–1;1), B(5;5;4), C(3;2;–1), D(4;1;3).

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-3}.$$

10. Построить кривую $\square = 2(1+\sin\square)$, заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если сумма расстояний от каждой ее точки до точек F_1(–4;0) и F_2(2;0) есть величина постоянная и равна p=10. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $5x^2-3y^2-10x-18y-37=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 4

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 6241 & 6243 & 6245 \\ 6240 & 6242 & 6246 \\ 6239 & 6240 & 6241 \end{vmatrix}$

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+2y+z=5, \\ 3x-5y+3z=4, \\ 2x+7y-z=7. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3-x_4+6x_5=1, \\ 3x_1+3x_2+7x_3-3x_4+6x_5=3, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=2. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 8 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -12 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (1;0;1), b = (0;–2;1), c = (1;3;0), d = (8;9;4).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(2a+b)(a-3b)$, б) $|(2a+b)\times(a-3b)|$,

где $|a|=3$, $|b|=4$, $a\hat{}b=\square/3$.

8. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, если A(2;-1;2), B(1;2;-1), C(3;2;1), D(4;2;3).

9. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x-y+z+2=0, \\ x-2y+3z-8=0. \end{cases}$$

10. Построить кривую □ = 2(1+cos2□), заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если абсолютная величина разности расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-7;0)$ и $F_2(13;0)$ есть величина постоянная и равна $p=16$. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $36x^2+49y^2+72x-196y-1442=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 5

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2327 & 2328 & 2329 \\ 2326 & 2329 & 2330 \\ 2327 & 2329 & 2331 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+5y-z=8, \\ 2x+y-3z=0, \\ 3x+2y-2z=1. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (1;1;0), b = (–4;3;2), c = (–1;2;1), d = (1;–1;–1).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(2a+3b)(b-3a)$, б) $|(2a+3b)\times(b-3a)|$,

где $|a|=6$, $|b|=2$, $a\hat{}b=$ □ /6..

8. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, если $A(2;1;4)$, $B(-1;5;2)$, $C(3;3;2)$, $D(-1;4;3)$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

10. Построить кривую □ = 3(2–cos2□), заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если сумма расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-6;0)$ и $F_2(2;0)$ есть величина постоянная и равна p=10. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $5x^2-4y^2+30x+8y+21=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 6

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 9148 & 9149 & 9150 \\ 9151 & 9153 & 9156 \\ 9151 & 9152 & 9153 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x+2y-2z=1, \\ x+4y-2z=7, \\ 2x+y-3z=0. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & 11 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы *a*, *b*, *c*, образуют базис. Найти разложение вектора *d* по этому базису, если *a* = (5;4;1), *b* = (–3;5;2), *c* = (2;–1;3), *d* = (7;23;4).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(2a–3b)(a–2b)$, б) $|(2a–3b)\times(a–2b)|$,

где $|a|=4$, $|b|=3$, $a\hat{}b=\square/3$.

8. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани *ABC*, в) косинус угла между ребрами *AB* и *AC*, г) уравнение прямой *AB*, д) уравнение плоскости *ABC*, если *A*(2;3;1), *B*(4;1;-2), *C*(6;3;3), *D*(5;4;3).

9. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 5 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

10. Построить кривую $\square = 3(2–\cos 2\square)$, заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если абсолютная величина разности расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(–4;0)$ и $F_2(6;0)$ есть величина постоянная и равна $p=8$. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $9x^2+16y^2+18x–64y–64=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 7

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 4313 & 4312 & 4311 \\ 4315 & 4315 & 4312 \\ 4317 & 4318 & 4314 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 9y = 6, \\ 4x - 3y + 4z = -3, \\ x - 2y + z = -2. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 & 7 & 11 & -1 \\ 24 & -2 & 14 & 22 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы *a*, *b*, *c*, образуют базис. Найти разложение вектора *d* по этому базису, если *a* = (2;1;0), *b* = (1;0;1), *c* = (4;2;1), *d* = (3;1;3).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(2a-b)(a+3b)$, б) $|(2a-b)\times(a+3b)|$,

где $|a|=4$, $|b|=1$, $a\hat{}b=2\square/3$.

8. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани *ABC*, в) косинус угла между ребрами *AB* и *AC*, г) уравнение прямой *AB*, д) уравнение плоскости *ABC*, если *A*(4;5;–3), *B*(6;5;–4), *C*(3;2;0), *D*(6;3;–3).

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-3}.$$

10. Построить кривую $\square = 2\sin(4\square)$, заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если сумма расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-5;0)$ и $F_2(3;0)$ есть величина постоянная и равна $p=10$. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $3x^2-5y^2+18x+10y+37=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 8

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 6189 & 6186 & 6185 \\ 6190 & 6191 & 6192 \\ 6191 & 6192 & 6193 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+y-z=6, \\ 3x+3y+4z=8. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_5=0, \\ 3x_1-x_2-3x_3-3x_4+2x_5=1. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (3;–1;2), b = (–2;3;1), c = (4;–5;–3), d = (–3;2;–3).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(4a-b)(a+2b)$, б) $|(4a-b)\times(a+2b)|$,

где $|a|=3$, $|b|=2$, $a\hat{}b=\square/4$.

8. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, если $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$, $D(4;4;4)$.

9. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} -2x+y-z-3=0, \\ x+2y+3z+4=0. \end{cases}$$

10. Построить кривую $\square = 2\cos(3\square)$, заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если абсолютная величина разности расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-11;0)$ и $F_2(9;0)$ есть величина постоянная и равна $p=12$. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $4x^2+5y^2-8x+20y+4=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 9

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3155 & 3154 & 3153 \\ 3158 & 3157 & 3154 \\ 3159 & 3160 & 3155 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+3z=-1, \\ 3x+y-z=-3. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5, \\ x_1+5x_2+x_3-x_4=3. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (2;2;3), b = (3;1;2), c = (1;3;1), d = (4;0;1).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(2a-3b)(a+2b)$, б) $|(2a-3b)\times(a+2b)|$,

где $|a|=5$, $|b|=2$, $a\hat{}b=3\square/4$.

8. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, если $A(2;0;4)$, $B(-1;3;-1)$, $C(1;3;-3)$, $D(3;5;0)$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

10. Построить кривую $\square = 3\cos(4\square)$, заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если сумма расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-4;0)$ и $F_2(2;0)$ есть величина постоянная и равна p=10. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $9x^2-4y^2-72x-16y+96=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Вариант 10

1. Перемножить матрицы: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -9 & -3 & -8 & 3 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 8241 & 8243 & 8245 \\ 8240 & 8241 & 8242 \\ 8238 & 8242 & 8244 \end{vmatrix}$.

3. Решить систему линейных уравнений: а) методом Крамера, б) при помощи обратной матрицы, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+2y-z=0, \\ 3x+3y+2z=7. \end{cases}$$

4. Найти общее решение методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_5=2, \\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=3. \end{cases}$$

5. Вычислить ранг матрицы: а) методом окаймляющих миноров; б) методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Показать, что векторы a, b, c, образуют базис. Найти разложение вектора d по этому базису, если a = (–3;1;4), b = (–1;5;4), c = (–1;1;6), d = (0;4;3).

7. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(a-4b)(a+2b)$, б) $|(a-4b)\times(a+2b)|$,

где $|a|=3$, $|b|=2$, $a\hat{}b=5\square/6$.

8. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти: а) объем пирамиды, б) площадь грани ABC, в) косинус угла между ребрами AB и AC, г) уравнение прямой AB, д) уравнение плоскости ABC, если $A(3;1;4)$, $B(-1;5;4)$, $C(1;1;6)$, $D(0;4;3)$.

9. Составить каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} 3x+2y-2z+3=0, \\ -2x-y+3z+7=0. \end{cases}$$

10. Построить кривую $\square = 2\sin(4\square)$, заданную в полярных координатах.

11. Вывести уравнение кривой, если абсолютная величина разности расстояний от каждой ее точки до точек $F_1(-7;0)$ и $F_2(3;0)$ есть величина постоянная и равна $p=8$. Сделать чертеж.

12. Привести уравнение $5x^2+9y^2+20x+72y+119=0$ к каноническому виду, определить тип кривой и сделать чертеж.

Раздел III КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

1. Предмет математического программирования. Примеры экономических задач, решаемых методами математического программирования.
2. Классификация основных методов математического программирования.
3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Симплексные таблицы.
4. Экономическая интерпретация элементов симплексной таблицы.
5. Улучшение опорного решения.
6. Определение ведущих столбца и строки.
7. Выбор начального допустимого базисного решения.
8. Введение искусственных переменных.
9. Вырожденные задачи линейного программирования.
10. Зацикливание и его предотвращение.
11. Двойственность в линейном программировании.
12. Двойственные задачи.
13. Экономическая интерпретация пары двойственных задач.
14. Теоремы двойственности, их экономическая интерпретация.
15. Транспортные задачи. Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи.
16. Метод потенциалов.
17. Основные способы построения начального опорного решения.
18. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.
19. Транспортные задачи с дополнительными условиями.
20. Целочисленное программирование
21. Постановка задачи ЦП.
22. Примеры целочисленных моделей.
23. Методы решения задач целочисленного программирования.
24. Метод Гомори.
25. Метод ветвей и границ.
26. Постановка задачи о коммивояжере.
27. Понятие о приближенных методах.
28. Нелинейное программирование.
29. Методы одномерной оптимизации.
30. Унимодальные функции.
31. Методы поиска.
32. Методы дихотомии и золотого сечения.
33. Общая задача нелинейного программирования.

34. Градиентные методы безусловной оптимизации.
35. Выпуклое программирование.
36. Метод штрафов.
37. Теорема Куна-Таккера, ее связь с теорией двойственности в линейном программировании.
38. Динамическое программирование. Постановка задачи ДП.
39. Основные определения.
40. Принцип оптимальности.
41. Рекуррентные уравнения Беллмана.
42. Примеры решения задач математического программирования методом Беллмана.
43. Сетевое планирование. Сеть проекта.
44. Табличный метод сетевого планирования
45. Диаграмма Ганта
46. Критический путь, время завершения проекта.
47. Резервы событий, резервы операций.
48. Системы массового обслуживания (СМО). СМО одноканальные и многоканальные
49. СМО с отказами
50. СМО с неограниченной очередью
51. СМО с Ограниченной очередью
52. Теория игр. Игра как математическая модель конфликта.
53. Основные понятия теории игр.
54. Классификация игр.
55. Примеры бескоалиционных игр.
56. Антагонистические игры.
57. Матричные игры.
58. Смешанные стратегии.
59. Графоаналитический метод решения игр.
60. Матричные игры и линейное программирование.
61. Определение риска. Примеры. Классификация рисков.
62. Определение неопределенности и примеры.
63. Методы принятия решений в условиях неопределенности и в условиях риска
64. Оценка эффективности принятия решений и выбранной модели. Понятие эффекта внешнего и внутреннего. Примеры
65. Понятие эффективности решений. Примеры эффективных и неэффективных решений.
66. Оценка эффективности принятия решений .
67. Оценка эффективности выбранной модели

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Высшая математика для экономистов: Учебник / Под ред. проф. Кремера Н.Ш. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2006 –497 с.
2. Линейная алгебра в экономике: учебно–методическое пособие. Под ред. Н.Ш Кремера. – М.: Финстатинформ, 2009
3. Данко П.Е, Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая Линейная алгебра в упражнениях и задачах, часть 1, – М.: Высшая школа, 2009. — 304 с.
4. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тришин, М.Н. Фридман., под ред. Н.Ш Кремера.– 4 издание переработанное и дополненное.–М.: ТК Юрайт, Изд–во Юрайт, 2013.
5. Шипачев В.С. Курс высшей математики: Учебник. – М.: ТК Велби, Изд–во Проспект, 2004.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров/ под ред А. Тихонова. – М.: Юрайт, 2012. – 479 с.

Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Высшая школа, 2006

Дополнительная литература:

1. Экономико–математические методы и модели. Учебное пособие. /Под ред. Макарова С.И., М.: КНОРУС. 2007 –42 с.
2. Грешилов,А.А. Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка: компьютерный курс [Текст]: учебное пособие /А.А. Грешилов, Т.И. Белова .– М. : Логос, 2004.– 128 с.
3. Ефимов,Н.В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебное пособие /Н.В. Ефимов .– 13–е изд., стер.–М. : Физматлит: Лаборатория Базовых знаний, 2003.– 240 с.

Учебное издание

Коренюгина Людмила Михайловна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 «Экономика»

Составитель: Л.М.Коренюгина
Редактор: *Н.В.Лалетин*
Оригинал-макет и верстка: Л.М.Коренюгина

Подписано в печать — Сдано в производство

Формат 14,85х21,0 — Бумага потребительская.
Печать трафаретная. — Усл. печ. л. 3,5
Изд. № — Заказ №
Тираж экз. — завод - экз.

Редакционно-издательский центр АНО ВО СИБУП.
660037, Красноярск, ул. Московская, 7 «А», т. 223-33-13