Автономная некоммерческая организация
высшего образования
«Сибирский институт бизнеса, управления и психологии»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 «Экономика»**

Красноярск 2019

Издаётся по решению научно-методического совета экономического факультета АНО ВО СИБУП

**Коренюгина Л.М.**
Математический анализ: методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 Экономика / Л.М.Коренюгина. – Красноярск: АНО ВО СИБУП, 2019. – 117 с.;

Методические указания включают содержание основных вариантов контрольных работ по дисциплине и задания к ним. Представлены контрольные вопросы.

©АНО ВО СИБУП, 2019
©Коренюгина Л.М., 2019

**Содержание**

**ВВЕДЕНИЕ ..... 4**

**Раздел I СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ..... 5**

1.1Содержание дисциплины «Математический анализ».....5
1.2 Методические указания к выполнению заданий .....6
1.3.Примеры решения задач .....10

**Раздел II ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ..... 85**

**Раздел III КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ» ..... 111**

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... 116**

# ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина Математический анализ является частью математического цикла (вариативная часть) дисциплин подготовки студентов по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика». Дисциплина реализуется на Экономическом факультете Сибирского института бизнеса, управления и психологии кафедрой Прикладной математики и информатики.

Целью преподавания дисциплины является развитие у студентов логического мышления, привитие навыков чёткой формулировки прикладной задачи, её корректного математического описания и правильного использования математических аппаратных средств для её решения.

Задачи:

– формирование целостного представления об основных этапах становления современной математики и её структуре;

– определение роли и места математики в различных предметных областях;

– формирование основных особенностей математического мышления;

– формирование представления о важнейших математических понятиях, на основе которых возможны корректное применение математики в практической деятельности;

– формирование математической культуры обучающихся;

– развитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с методами сбора и обработки статистической информации, оценки состояния и перспектив развития экономических процессов; решением прикладных задач, применение математического аппарата при анализе сложных экономических процессов, принятии решений.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента, консультации.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме опроса, рубежный контроль в форме контрольной работы и промежуточный контроль в форме экзамена.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 8 зачётных единицы, 288 часов.

## Раздел I СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

### 1.1Содержание дисциплины «Математический анализ»

Таблица 1. Тематический план лекционных занятий

| Название раздела дисциплины | Тема лекции |
|---|---|
| Раздел 1. Введение в анализ | Введение |
| | Тема 1. Предел и непрерывность |
| Раздел 2. Дифференциальное исчисление | Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Приложения производной. |
| | Тема3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. |
| | Тема 4. Исследование графиков функций одной переменной |
| Раздел 3. Интегральное исчисление | Тема 5. Неопределенный интеграл |
| | Тема 6. Определенный интеграл |
| Раздел 4. Комлексные числа, дифференциальные уравнения и ряды | Тема 7. Комплексные числа |
| | Тема 8. Ряды |
| | Тема 9. Дифференциальные уравнения. Системы линейных дифференциальных уравнений |

Таблица 2. Тематический план практических занятий

| Название раздела дисциплины | Тема практического занятия |
|---|---|
| Раздел 1. Введение в анализ | Тема 1. Предел и непрерывность |
| Раздел 2. Дифференциальное исчисление | Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Приложения производной. |
| | Тема3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. |
| | Тема 4. Исследование графиков функций одной переменной |
| Раздел 3. Интегральное исчисление | Тема 5. Неопределенный интеграл |
| | Тема 6. Определенный интеграл |
| Раздел 4. Комлексные числа, дифференциальные уравнения и ряды | Тема 7. Комплексные числа |
| | Тема 8. Ряды |
| | Тема 9. Дифференциальные уравнения. Системы линейных дифференциальных уравнений |

## 1.2 Методические указания к выполнению заданий

Основные теоремы о пределах

1) Предел постоянного числа есть постоянное число.

$$\lim_{x\to a} C = C \qquad C - const$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x)$$

3) Предел суммы или разности равен суммы или разности пределов.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

4) Предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

5) При вычислении предела степени находим предел основания и предел показателя степени.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Правила вычисления пределов

Правило1

Если $x \to \infty$ и под знаком предела стоит дробь, в числителе и в знаменателе которой стоят многочлены, тогда делим числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень переменной.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^3+x^2)}{(1+7x+x^3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{5x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3})}{(\frac{1}{x^3}+\frac{7x}{x^3}+\frac{x^3}{x^3})} = \lim_{x\to\infty}\frac{(5+\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x^3}+\frac{7}{x^2}+1)} =$$

$$= \frac{(5+\frac{1}{\infty})}{(\frac{1}{\infty^3}+\frac{7}{\infty^2}+1)} = \frac{5+0}{0+0+1} = 5$$

!Если конечное число делится на бесконечность, то в результате получаем 0

Правило 2

Если X стремится к нулю и под знаком предела имеем следующие выражения sinx, tgx, arcsinx, arctgx, ln(1+x), $(e^x - 1)$

то пользуемся эквивалентностями.

Таблица эквивалентностей

$\text{Sin ax} \approx ax$ $\text{Tg ax} \approx ax$ $\text{Arcsin ax} \approx ax$ $\text{Arctg ax} \approx ax$

$\ln(1+ax) \approx ax$ $(e^{ax}-1) \approx ax$

Пример 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\arcsin 5x}=\left|\begin{matrix}при & x\to 0\\ \arcsin 5x\approx 5x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

!Предел постоянного числа есть постоянное число

Правило 3

Если X стремится к a, где a постоянное число, и под знаком предела находится дробь, в числителе или знаменателе которой стоит выражение , содержащее разность корней ,при этом возникает неопределенность 0/0, то числитель и знаменатель дроби умножаем на сумму корней/ в случае разности кубических корней умножаем на неполный квадрат суммы корней/. В результате получаем разность квадратов или разность кубов и избавляемся от иррациональности выражений, приводим подобные слагаемые, выносим общие множители за скобки, сокращаем выражения

Пример 4

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{x+1})^2-3^2}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt{x+1})^2-3^2}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x+1-9}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+3)}=\frac{1}{\sqrt{8+1}+3}=\frac{1}{6}$$

Правило 5

Если $X\to\infty$ или $x\longrightarrow 0$ и получаем неопределенность

$\frac{0}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ или, то можем использовать правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Предел отношения двух функций равен пределу отношения производных этих функций.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^3+x^2)}{(1+7x+x^3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(5x^3+x^2)'}{(1+7x+x^3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(15x^2+2x\ )}{(7+3x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(15x^2+2x\ )'}{(7+3x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(30x+2)}{(6x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(30x+2)'}{(6x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{30}{6}=\lim_{x\to\infty}5=5$$

Точка $x_0$ называется точкой разрыва функции, если односторонние пределы функции в данной точке не равны между собой.

Виды точек разрыва функции:

Точка разрыва первого рода

Точка $x_0$ называется точкой разрыва первого рода, если односторонние пределы принимают постоянные значения, не равные между собой.

$$\lim_{x\to a-0}f(x)\neq\lim_{x\to a+0}f(x)$$

Точка разрыва второго рода

Точка $x_0$ называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов принимает значение, равное $+\infty$ или $-\infty$.

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0}f(x)=\pm\infty$$

Точка устранимого разрыва.

Точка $x_0$ называется точкой устранимого разрыва, если односторонние пределы принимают постоянные значения, равные между собой, а значение функции в данной точке отлично от значений односторонних пределов или вообще не определено.

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)\neq f(a)$$

Факториалы

n-факториалом называется произведение первых n натуральных чисел.

1!=1

2!=1*2=2

3!=1*2*3=6

4!=1*2*3*4=24

5!=1*2*3*4*5=120
6!=1*2*3*4*5*6=720
7!=1*2*3*4*5*6*7=5040
Применение факториалов к решению задач.
Сократите дробь

$$\frac{5!}{3!\cdot 6!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{1}{36}$$

$$22!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot 20\cdot 21\cdot 22$$

$$24!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots .\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\cdot 24=22!\cdot 23\cdot 24$$

$$\frac{24!}{3!\cdot 22!}=\frac{22!\cdot 23\cdot 24}{3!\cdot 22!}=\frac{23\cdot 24}{1\cdot 2\cdot 3}=92$$

Производной функции y = f(x) называется конечный предел приращения функции к приращению аргумента. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

**Таблица производных элементарных и сложных функций**

| Производные элементарных функций | Производные сложных функций |
|---|---|
| $C'=0$ | $C'=0$ |
| $(x^n)'=nx^{n-1}$ | $(u^n)'=nu^{n-1}u'_x$ |
| $(e^x)'=e^x$ | $(e^u)'=e^u u'_x$ |
| $(a^x)'=a^x\ln a$ | $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'_x$ |
| $(\sin x)'=\cos x$ | $(\sin u)'=\cos u\cdot u'_x$ |
| $(\cos x)'=-\sin x$ | $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'_x$ |
| $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ | $(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'_x$ |
| $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(ctgu)'=\frac{-1}{\sin^2 u}\cdot u'_x$ |
| $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ | $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'_x$ |
| $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'_x$ |
| $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'_x$ |

**Таблица основных интегралов.**

| | |
|---|---|
| $\int dx = x + C$ . | $\int e^x dx = e^x + c$ |
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ . | $\int a^x dx = a^x \ln a + c$ |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$ | $\int \sin x dx = -\cos x + c$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$ . | $\int \cos x dx = \sin x + c$ |
| $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$ | $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$ |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a}\right\rvert + c$ |
| $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$ | $\int \sin kx dx = \frac{-1}{k} \cos kx + C.$ |
| $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$ |

Все другие интегралы, не являющиеся табличными, приводятся к табличным и вычисляются по данной таблице.

Методы, с помощью которых интегралы приводятся к табличным:

I. Замена переменной (подстановка);

II. Интегрирование по частям;

III. Разложение на элементарные дроби.

**Таблица замен переменных**

| Интеграл | Замена |
|---|---|
| $\int \frac{A}{(x-a)^m}$ | t=x-a<br>dt=(x-a)' dx=dx |
| $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ | Выделяем полный квадрат:<br>$x^2+px+q=x^2+2*\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left($<br>$=(x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q).$<br>$t=x+\frac{p}{2} \qquad x=t-\frac{p}{2}$<br>$dx=dt$ |
| $R(x;(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}$<br>$\int;(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}};...$<br>$(ax+b)^{\frac{m_n}{n_n}})$ | $t=(ax+b)^{\frac{1}{S}}$<br>$t^S=ax+b$<br>$x=\frac{t^S-b}{a}$<br>$dx=\left(\frac{t^S-b}{a}\right)'dt=\frac{St^{S-1}}{a}dt$<br>S – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1};\frac{m_2}{n_2};...\frac{m_k}{n_k}$ |
| $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ | Выделяем полный квадрат под знаком корня:<br>$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x^2+2\frac{b}{2a}$<br>$-\left(\frac{b}{2a}\right)^2)+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b}{4a}+c;$<br>$t=x+\frac{b}{2a};\ x=t-\frac{b}{2a};\ dx=dt.$ |

| | |
|---|---|
| $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ | $x-a=t \qquad x=\frac{1}{t}-a$<br>$dx=\left(\frac{1}{t}-a\right)' dt=-\frac{1}{t^2}dt.$ |
| Интегралы от дифференцированных биномов.<br>$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ | 1 тип p – целое число -<br>$x=t^S$<br>$dx=St^{S-1}dt$<br>2 тип<br>$\frac{m+1}{n}$ *целое число* $a+bx^n=t^S$<br>$x=\sqrt[n]{\frac{t^S-a}{b}};\ dx=(\sqrt[n]{\frac{t^S-a}{b}})'dt$ |
| | 3 тип S – знаменатель дроби p.<br>$\frac{m+1}{n}+p;\ ax^{-n}+b=t^S;$<br>$t=\sqrt[S]{\frac{a}{x^n}+b};\ x=\sqrt[n]{\frac{a}{t^S-b}};\ dx=(\sqrt[n]{\frac{}{t^S}}$ |
| **Интегрирование тригонометрических функций.** | |
| $\int R(\sin x;\cos x)$ | $t=tg\frac{x}{2} \qquad x=2arctgt$<br>$dx=\frac{2dt}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$<br>$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ |
| R(-sinx,-cosx) =<br>= R(sinx, cosx) | $t=tgx$<br>$x=arctgt$<br>$dx=\frac{2dt}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{t}{1+t^2}$ |

| | |
|---|---|
| | $\cos x = \frac{1}{1+t^2}$ |
| $\int R(-\sin x, \cos x)dx = -\int R(\sin x, co$ | $t = \cos x$<br>$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$<br>$x = \arccos t \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ |
| $\int R(\sin x, -\cos x)dx =$<br>$= -\int R(\sin x, \cos x)dx$ | $t = \sin x$<br>$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$<br>$x = \arcsin t \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ |

| | |
|---|---|
| $\int \sin^m x \cos^n x dx$ | **I тип**<br>m или n - нечетное положительное число.<br>Если m - нечетное, то<br>$t = \sin x \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}$<br>$x = \arcsin t \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ |
| | Если n – нечетное положительное число, то<br>$t = \cos x \quad \sin x = \sqrt{1-t^2}$<br>$x = \arccos t \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ |
| | **II тип**<br>m и n - четные положительные числа<br>$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$<br>$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+co$ |

| | |
|---|---|
| $\int tg^m x dx$<br>$\int ctg^m x dx$ | Понижаем степень с помощью подстановок<br>$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad t = tgx \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} d$<br>$ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \quad t = ctgx \quad dt = -\frac{1}{\sin^2}$ |
| $\int \sin mx \cos nx dx$<br>$\int \cos mx \cos nx dx$<br>$\int \sin mx \sin nx dx$ | $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$<br>$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$<br>$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ |
| $\int R(x;\sqrt{a^2-x^2})dx$ | $x = a\sin t \quad dx = a\cos t dt$ |
| | $x = a\cos t \quad dx = -a\sin t dt$ |
| $\int R(x;\sqrt{a^2+x^2})dx$ | $x = atgt \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ |
| | $x = actgt \quad dx = -\frac{a}{\sin^2 t} dt$ |
| $\int R(x;\sqrt{x^2-a^2})dx$ | $x = \frac{a}{\cos t} \quad dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t} dt$ |
| | $x = \frac{a}{\sin t} \quad dx = \frac{a\cos t}{\sin^2 t} dt$ |

**Метод интегрирования по частям**

Существует три группы интегралов, интегрируемых по частям.

| Группа | Вид интеграла | Замены |
|---|---|---|
| I группа | К ней относятся интегралы вида:<br>$\int P(x)arctgxdx;\ \int P(x)arcctgxdx$<br>$\int P(x)\ln xdx;\ \int P(x)\arcsin xdx$<br>$\int P(x)\arccos xdx$ | Обозначаем:<br>$u=\begin{cases} arctgx \\ arcctgx \\ \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \end{cases}$<br>$dv = P(x)dx$ |
| II группа | $\int P(x)\,e^{kx}dx;\ \int P(x)\sin kxdx$<br>$\int P(x)\cos kxdx$ | $U = P(x)$<br>$\mathrm{dv}=\begin{cases} e^{kx}dx \\ \sin kxdx \\ \cos kxdx \end{cases}$ |
| III группа | $\int e^{kx}\sin bxdx \qquad \int e^{kx}\cos bxdx$ | $\mathrm{u}=e^{kx}$<br>$dv=\begin{cases} \sin bxdx \\ \cos bxdx \end{cases}$ |

## 1.3.Примеры решения задач

### Тема 1. «Пределы числовых последовательностей и функций»

***Пример1.1***

Найти область определения функции, исследовать заданную функцию на чётность.

a) f(x)= arctg( $\frac{4x+1}{x-2}$ ); b) f(x)= $\frac{x-x^3}{4}$ -ctg(2x);

Решение:

A)) f(x)= arctg( $\frac{4x+1}{x-2}$ );

$$\begin{cases} -\infty \le \frac{4x+1}{x-2} \le +\infty \\ x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne 2$$

$$Д(x) = (-\infty;2) \cup (2;+\infty))$$

$$f(-x) = arctg\,\frac{4*(-x)+1}{(-x)-2} = arctg\,\frac{-4x+1}{-x-2} =$$

$$= arctg\,\frac{-(4x-1)}{-(x+2)} = arctg\,\frac{4x-1}{x+2} \ne -f(x) \ne f(x)$$

b) f(x)= $\frac{x-x^3}{4}$ -ctg(2x);

$$0 + \pi k < 2x < \pi + \pi k$$

$$\frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$f(-x) = \frac{-x-(-x)^3}{4} - ctg(2*(-x)) = \frac{-x-(-x^3)}{4} - ctg(-2x) =$$

$$= -\frac{x-x^3}{4} + ctg(2x) = -(\frac{x-x^3}{4} - ctg(2x)) = -f(x)$$

***Пример1.2.***

Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}=\left|\quad\frac{3\cdot 3^2-11\cdot 3+6}{2\cdot 3^2-5\cdot 3-3}=\frac{0}{0}\right|,$$ Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

Разложим в числителе данное выражение на множители

$$3x^2-11x+6=0$$

$$Д=в^2-4ac=(-11)^2-4\cdot 3\cdot 6=121-72=49$$

$$x_1=\frac{-в+\sqrt{Д}}{2a}=\frac{11+\sqrt{49}}{2\cdot 3}=\frac{11+7}{6}=\frac{18}{6}=3$$

$$x_2=\frac{-в-\sqrt{Д}}{2a}=\frac{11-\sqrt{49}}{2\cdot 3}=\frac{11-7}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$3x^2-11x+6=3\cdot(x-3)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x-3)\cdot(3x-2)$$

$$2x^2-5x-3=0$$

$$Д=в^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25+24=49$$

$$x_1=\frac{-в+\sqrt{Д}}{2a}=\frac{5+\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$x_2=\frac{-в-\sqrt{Д}}{2a}=\frac{5-\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$2x^2-5x-3=2\cdot(x-3)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-3)\cdot(2x+1)$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(3x-2)}{(x-3)\cdot(2x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{(3x-2)}{(2x+1)}=\frac{(3\cdot 3-2)}{(2\cdot 3+1)}=\frac{7}{7}=1$$

***Пример1.3.***

Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x},$$ Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Разделим числитель и знаменатель данной дробно-рациональной функции на $x^3$ (на х в наивысшей степени). Тогда используя свойства пределов, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}+\frac{8}{x^3}}{\frac{-5x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^3}}{-5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{3-\frac{4}{\infty}+\frac{8}{\infty^3}}{-5+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{3-0+0}{-5+0+0}=-\frac{3}{5},$$

***Пример1.4.***

Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2+5x+4}-7x),$$

Здесь мы имеем с неопределенностью вида ∞–∞. Умножим и разделим данное выражение на точно такое же, но со знаком плюс между слагаемыми (на сопряженное выражение):

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2+5x+4}-7x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{49x^2+5x+4}-7x)(\sqrt{49x^2+5x+4}+7x)}{(\sqrt{49x^2+5x+4}+7x)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{49x^2+5x+4})^2-(7x)^2}{(\sqrt{49x^2+5x+4}+7x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{49x^2+5x+4-49x^2}{(\sqrt{49x^2+5x+4}+7x)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+4}{(\sqrt{49x^2+5x+4}+7x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x}+\frac{4}{x}}{(\frac{\sqrt{49x^2+5x+4}}{x}+\frac{7x}{x})}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x}+\frac{4}{x}}{(\sqrt{\frac{49x^2+5x+4}{x^2}}+\frac{7x}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{4}{x}}{\sqrt{49+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}+7}=\frac{5+\frac{4}{\infty}}{\sqrt{49+\frac{5}{\infty}+\frac{4}{\infty^2}}+7}=$$

$$=\frac{5+0}{\sqrt{49+0+0}+7}=\frac{5}{14}$$

***Пример1.5.***

$$\lim_{x\to 2}\ \frac{x^2+4x-12}{\sqrt{7x-5}-3},$$

$$\lim_{x\to 2}\ \frac{x^2+4x-12}{\sqrt{7x-5}-3}=\left|\frac{2^2+4\cdot 2-12}{\sqrt{7\cdot 2-5}-3}=\frac{0}{0}\right|,$$

Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на точно такое же выражение, стоящее в знаменателе, но со знаком плюс между слагаемыми:

$$\lim_{x\to 2}\ \frac{x^2+4x-12}{\sqrt{7x-5}-3}=\lim_{x\to 2}\ \frac{\left(x^2+4x-12\right)\left(\sqrt{7x-5}+3\right)}{\left(\sqrt{7x-5}-3\right)\left(\sqrt{7x-5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\ \frac{\left(x^2+4x-12\right)\left(\sqrt{7x-5}+3\right)}{\left(\sqrt{7x-5}\right)^2-(3)^2}=\lim_{x\to 2}\ \frac{\left(x^2+4x-12\right)\left(\sqrt{7x-5}+3\right)}{7x-5-9}$$

$$=\lim_{x\to 2}\ \frac{\left(x^2+4x-12\right)\left(\sqrt{7x-5}+3\right)}{7x-14}=\lim_{x\to 2}\ \frac{\left(x^2+4x-12\right)\left(\sqrt{7x-5}+3\right)}{7(x-2)}$$

$$x^2+4x-12=0$$

$$Д=в^2-4ac=4^2-4\cdot 1\cdot(-12)=16+48=64$$

$$x_1=\frac{-в+\sqrt{Д}}{2a}=\frac{-4+\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-в-\sqrt{Д}}{2a}=\frac{-4-\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-4-8}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

$$x^2+4x-12=1\cdot(x-2)\cdot(x+6)$$

$$=\lim_{x\to 2}\ \frac{1\cdot(x-2)\cdot(x+6)\cdot\left(\sqrt{7x-5}+3\right)}{7(x-2)}=\lim_{x\to 2}\ \frac{(x+6)\cdot\left(\sqrt{7x-5}+3\right)}{7}=$$

$$=\frac{(2+6)\cdot\left(\sqrt{7\cdot 2-5}+3\right)}{7}=\frac{8\cdot 6}{7}=\frac{48}{7}$$

Пример1.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\,\mathrm{tg}(x^2/3)}{\sin^2(5x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot \mathrm{tg}(x^2/3)}{\left(\sin(5x^2)\right)^2}$$ Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. При вычислении данного предела воспользуемся методом эквивалентных бесконечно малых величин.

$$\left|\begin{array}{l} при_x\to 0 \\ \mathrm{tg}(x^2/3)\approx(x^2/3) \\ \sin(5x^2)\approx(5x^2)\end{array}\right| =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot(x^2/3)}{\left((5x^2)\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x\cdot(x^2/3)}{25x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{25x^2\cdot 3}=\frac{\cos(3\cdot 0)}{25\cdot 0^2\cdot 3}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример1.7.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{6x-7}\right)^{2x+9}$. Здесь мы имеем с неопределенностью вида $1^{\infty}$.

Преобразуем выражение, стоящее в скобках, следующим образом

$$\frac{6x+5}{6x-7}=1+\frac{6x+5}{6x-7}-1=1+\frac{6x+5-6x+7}{6x-7}=1+\frac{12}{6x-7}.$$

Тогда исходный предел можно преобразовать так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{6x-7}\right)^{2x+9}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{6x-7}\right)^{2x+9}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6x-7}{12}}\right)^{2x+9}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6x-7}{12}}\right)^{\frac{6x-7}{12}\cdot\frac{12}{6x-7}\cdot(2x+9)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{6x-7}{12}}\right)^{\frac{6x-7}{12}}\right]^{\frac{12}{6x-7}\cdot(2x+9)}$$

Предел выражения в квадратных скобках, в соответствии со вторым замечательным пределом, равен

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{6x-7}{12}}\right)^{\frac{6x-7}{12}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e \approx 2{,}718\,.$$

В результате получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{6x-7}{12}}\right)^{\frac{6x-7}{12}}\right]^{\frac{12}{6x-7}\cdot(2x+9)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{12}{6x-7}\cdot(2x+9)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{24x+108}{6x-7}}$$

$$= e^{24/6} = e^{4}.$$

Пример1.8.

Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

$$\text{a)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{3x^2}\;;\quad \text{b)}\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+x^2}{x^2-3x-2}\;;\quad \text{c)}\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}\;;$$

$$\text{d)}\lim_{x\to -2}\frac{arctg(x+2)}{x^2-4}\;;$$

Решение:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{3x^2} = \frac{\cos(0)}{3*0^2} = \frac{1}{0} = +\infty \quad ;$$

$$\text{b)}\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+x^2}{x^2-3x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+x^2}{x^2-3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-3x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\frac{-3+\frac{1}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}-\frac{2}{\infty^3}}=;$$

$$=\frac{-3+0}{0-0-0}=\frac{-3}{0}=-\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$;

$2x^2-7x+6=0$

$Д=в^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 2*6=49-48=1$

$$x_1=\frac{-в+\sqrt{Д}}{2a}=\frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{7+1}{4}=\frac{8}{4}=2$$

$$x_2=\frac{-в-\sqrt{Д}}{2a}=\frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2\cdot 2}=\frac{7-1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$2x^2-7x+6=2\cdot(x-2))\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-2)\cdot(2x-3)$$

$x^2-5x+6=0$

$Д=в^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1*6=25-24=1$

$$x_1=\frac{-в+\sqrt{Д}}{2a}=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$x_2=\frac{-в-\sqrt{Д}}{2a}=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x^2-5x+6=1\cdot(x-3)\cdot(x-2)=(x-3)\cdot(x-2)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-3)}{(x-3)}=\frac{(2*2-3)}{(2-3)}=-1$$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{arctg(x+2)}{x^2-4}=\dfrac{arctg(-2+2)}{(-2)^2-4}=\dfrac{arctg(0)}{4-4}=\dfrac{0}{0}$

Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

При вычислении данного предела воспользуемся методом замены и методом эквивалентных бесконечно малых величин.

$$\left|\begin{array}{l} npu_x \to -2 \\ y = x-(-2) = x+2 \\ y = x+2 \\ y \to 0 \end{array}\right| =$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{arctg(y)}{(y-2)^2-4} = \left|\begin{array}{l} npu_y \to 0 \\ arctg(y) \approx y \end{array}\right| = \lim_{y\to 0} \frac{y}{(y)^2-4y+4-4} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{y^2-4y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y(y-4)} = \frac{1}{(0-4)} = -\frac{1}{4}$$

Пример 1.9.

Задана функция y=f(x) и два значения аргумента $x_1$ и $x_2$. Требуется:

1) найти область непрерывности функции и установить, является ли данная функция непрерывной для каждого из заданных значений аргумента;

2) в случае разрыва функции сделать вывод о характере точки разрыва;

3) сделать схематический чертёж в окрестности точки разрыва.

f(x)= $12^{\frac{1}{x}}+1$ , $x_1 = 1$ , $x_2 = 0$ ;

Данная функция элементарная

Область определения

$x \neq 0$

Д(x)= $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

Во всех точках определения функция непрерывна

$x_1 = 1 \in Д(x)$

$$\lim_{x\to 1-\Delta} f(x) = \lim_{x\to 1-\Delta} 12^{\frac{1}{x}}+1 = 12^{\frac{1}{1-\Delta}}+1 = 12^{\frac{1}{1-0}}+1 = 12^{\frac{1}{1}}+1 = 13$$

$$\lim_{x\to 1+\Delta} f(x) = \lim_{x\to 1+\Delta} 12^{\frac{1}{x}}+1 = 12^{\frac{1}{1+\Delta}}+1 = 12^{\frac{1}{1+0}}+1 = 12^{\frac{1}{1}}+1 = 13$$

$$f(1) = 12^{\frac{1}{1}} + 1 = 13$$

$$\lim_{x \to 1-\Delta} f(x) = \lim_{x \to 1+\Delta} f(x) = f(1)$$

В точке $x_1 = 1$ функция непрерывна

$$x_2 = 0 \notin Д(x)$$

определим характер точки разрыва

Для этого найдем односторонние пределы

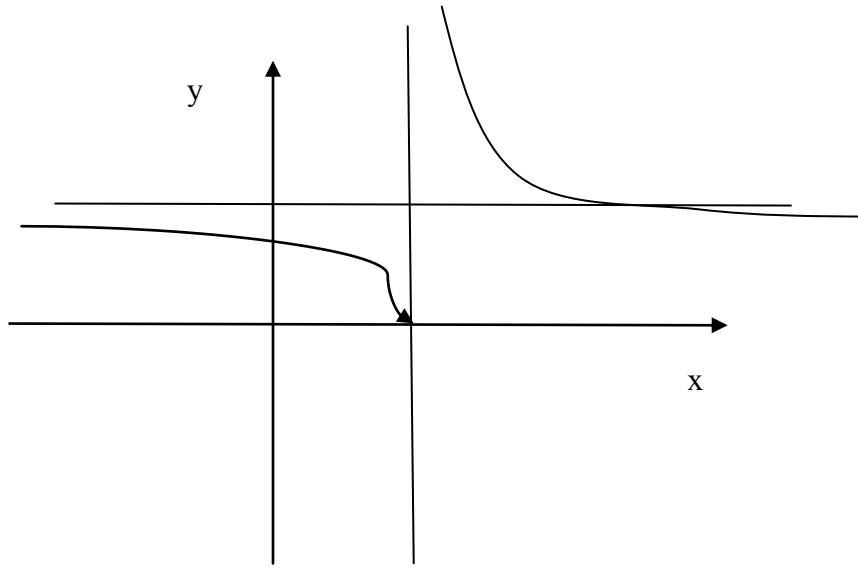
$$\lim_{x \to 0-\Delta} f(x) = \lim_{x \to 0-\Delta} 12^{\frac{1}{x}} + 1 = 12^{\frac{1}{0-\Delta}} + 1 = 12^{\frac{1}{0-0}} + 1 =$$

$$= 12^{\frac{1}{-0}} + 1 = 12^{-\infty} + 1 = \frac{1}{12^{+\infty}} + 1 = \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0+\Delta} f(x) = \lim_{x \to 0+\Delta} 12^{\frac{1}{x}} + 1 = 12^{\frac{1}{0+\Delta}} + 1 = 12^{\frac{1}{0+0}} + 1 =$$

$$= 12^{\frac{1}{+0}} + 1 = 12^{+\infty} + 1 = +\infty + 1 = +\infty$$

В точке $x_2 = 0$ функция терпит разрыв второго рода



Пример 1.10.

Найти точки разрыва функции и определить характер разрыва. Построить график функции.

$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x \le -1; \\ (x+1)^2, & -1 < x < 0; \\ x, & x > 0; \end{cases}$$

Данная функция задана тремя элементарными функциями, определенными на различных интервалах изменения x.

Функция непрерывна на каждом интервале

Разрыв возможен только в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, где меняется аналитическое выражение функции

Для этого найдем односторонние пределы

$$\lim_{x \to -1-\Delta} f(x) = \lim_{x \to -1-\Delta} -2(x+1) = -2*(-1-\Delta+1) = -2*(0-0) = 0$$

$$\lim_{x \to -1+\Delta} f(x) = \lim_{x \to -1+\Delta} (x+1)^2 = (-1+\Delta+1)^2 = 0$$

$$\lim_{x \to -1-\Delta} f(x) = \lim_{x \to -1+\Delta} f(x) = f(-1) = 0$$

В точке $x_1 = -1$ функция непрерывна

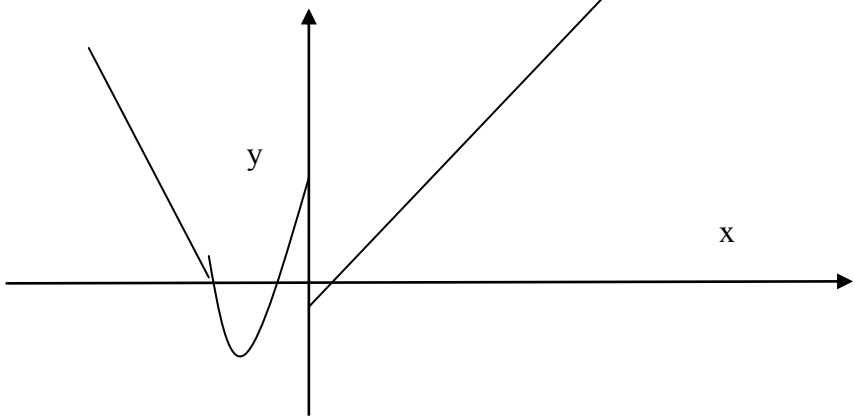
$$\lim_{x \to 0-\Delta} f(x) = \lim_{x \to 0-\Delta} (x+1)^2 = (0-\Delta+1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 0+\Delta} f(x) = \lim_{x \to 2+\Delta} (x) = (0+\Delta) = (0+0) = 0$$

f(0) не определено

$$\lim_{x \to 0-\Delta} f(x) \neq \lim_{x \to 0+\Delta} f(x)$$

В точке $x_2 = 0$ функция терпит разрыв первого рода (односторонние пределы конечные числа не равные между собой)



**Тема 2: «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»**

Пример 2.1. Найти производную $y'$

$y=\dfrac{5\sqrt[5]{x^2}}{x^4+1}$, При вычислении производной данной функции следует использовать правило дифференцирования частного:

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. В результате получим

$$y'=\left(\frac{5\sqrt[5]{x^2}}{x^4+1}\right)'=\frac{\left(5\sqrt[5]{x^2}\right)'\left(x^4+1\right)-\left(5\sqrt[5]{x^2}\right)\left(x^4+1\right)'}{\left(x^4+1\right)^2}=\frac{5\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}\left(x^4+1\right)-\left(5\sqrt[5]{x^2}\right)\left(4x^3\right)}{\left(x^4+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{2\left(x^4+1\right)}{\sqrt[5]{x^3}}-\left(5\sqrt[5]{x^2}\right)\left(4x^3\right)}{\left(x^4+1\right)^2}$$

Пример 2.2. Найти производную $y'$

$$y'=\left(\frac{10\sqrt[5]{x^3+x}}{1-\sqrt{x}}\right)'=\frac{\left(10\sqrt[5]{x^3+x}\right)'\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)-\left(10\sqrt[5]{x^3+x}\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)'}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(10\cdot\frac{1}{5\left(x^3+x\right)^4}\right)\cdot\left(x^3+x\right)'\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)-\left(10\sqrt[5]{x^3+x}\right)\cdot\left(0-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(10\cdot\frac{1}{5\left(x^3+x\right)^4}\right)\cdot\left(3x^2+1\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)-\left(10\sqrt[5]{x^3+x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{\left(x^3+x\right)^4}\right)\cdot\left(3x^2+1\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)+\frac{\left(10\sqrt[5]{x^3+x}\right)}{2\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

Пример 2.3. Найти производную $y'$

$$y' = \left(\log_9(x^2+x)\arccos x\right)' = \left(\log_9(x^2+x)\right)' \cdot \arccos x +$$

$$+ \log_9(x^2+x) \cdot \left(\arccos x\right)' =$$

$$= \frac{1}{(x^2+x)\cdot \ln 9} \cdot \arccos x + \log_9(x^2+x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 2.4. Найти производную $y'$

$$y' = \left(\ln\left(\frac{1}{x} + \operatorname{tg} e^{\sin x}\right)\right)' = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \operatorname{tg} e^{\sin x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x} + \operatorname{tg} e^{\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \operatorname{tg} e^{\sin x}\right)} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{\cos^2 e^{\sin x}} \cdot \left(e^{\sin x}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \operatorname{tg} e^{\sin x}\right)} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{\cos^2 e^{\sin x}} \cdot \left(e^{\sin x}\right) \cdot \left(\sin x\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \operatorname{tg} e^{\sin x}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{\left(e^{\sin x}\right) \cdot \cos x}{\cos^2 e^{\sin x}}\right)$$

Пример 2.5. Найти производную $y'$

$$y = (1+\sin x)^{\ln x},$$

$$\ln y = \ln(1+\sin x)^{\ln x},$$

$$\ln y = \ln x \cdot \ln(1+\sin x)$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(\ln x \cdot \ln(1+\sin x)\right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \left(\ln x\right)' \cdot \ln(1+\sin x) + \ln x \cdot \left(\ln(1+\sin x)\right)'$$

$$y' = y \cdot \left(\left(\ln x\right)' \cdot \ln(1+\sin x) + \ln x \cdot \left(\ln(1+\sin x)\right)'\right)$$

$$y' = (1+\sin x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{1}{x} \cdot \ln(1+\sin x) + \ln x \cdot \frac{1}{1+\sin x} (1+\sin x)' \right)$$

$$y' = (1+\sin x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{1}{x} \cdot \ln(1+\sin x) + \ln x \cdot \frac{1}{1+\sin x} \cdot \cos x \right)$$

Пример 2.6. Найти производную $y'$

$$x^2 y^2 + e^{2x} + e^{2y} = \cos(3x+3y)$$

$$\left(x^2 y^2 + e^{2x} + e^{2y}\right)' = (\cos(3x+3y))'$$

$$\left(x^2 y^2\right)' + e^{2x} \cdot (2x)' + e^{2y} \cdot (2y)' = -\sin(3x+3y) \cdot (3x+3y)'$$

$$\left(2xy^2\right) + \left(2x^2 yy'\right) + e^{2x} \cdot 2 + e^{2y} \cdot 2y' = -\sin(3x+3y) \cdot (3+3y')$$

$$\left(2x^2 yy'\right) + e^{2y} \cdot 2y' = -\sin(3x+3y) \cdot (3+3y') - e^{2x} \cdot 2 - \left(2xy^2\right)$$

$$\left(2x^2 yy'\right) + e^{2y} \cdot 2y' = -3\sin(3x+3y) - \sin(3x+3y) \cdot 3y' - e^{2x} \cdot 2 - \left(2xy^2\right)$$

$$\left(2x^2 yy'\right) + e^{2y} \cdot 2y' + \sin(3x+3y) \cdot 3y' = -3\sin(3x+3y) - e^{2x} \cdot 2 - \left(2xy^2\right)$$

$$\left(2x^2 y + e^{2y} \cdot 2 + \sin(3x+3y) \cdot 3\right) y' = -3\sin(3x+3y) - e^{2x} \cdot 2 - \left(2xy^2\right)$$

$$y' = \frac{-3\sin(3x+3y) - e^{2x} \cdot 2 - \left(2xy^2\right)}{\left(2x^2 y + e^{2y} \cdot 2 + \sin(3x+3y) \cdot 3\right)}$$

Пример 2.7. Найти производную $y'$

$$x = \cos 2t, \quad y = t + \sin t.$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t+\sin t)'_t}{(\cos 2t)'_t} = \frac{1+\cos t}{-2\sin 2t}$$

Пример 2.8.
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[1/2; 2]$.

$$y' = \left(x^3 - 3x + 1\right)' = 3 \cdot x^2 - 3$$

$$y' = 0$$

$$3 \cdot x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

$x = 1 \in [1/2;2]$

$x = -1 \notin [1/2;2]$

$y(1/2) = \left((1/2)^3 - 3*(1/2) + 1\right) = -3/8$

$y(1) = \left((1)^3 - 3*(1) + 1\right) = -1$

$y(2) = \left((2)^3 - 3*2 + 1\right) = 3$

Ответ : $y_{мах} = y(2) = 3 \quad y_{мин} = y(1) = -1$

Пример 2.9.

Составьте уравнение касательной в точке $y = 2x^2 - 5x - 3$

$x_0 = 2$

Решение:

$y = 2x^2 - 5x - 3$

$y(x_0) = y(2) = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 3 = 8 - 10 - 3 = -5$

Найдем производную:

$y' = \left[2x^2 - 5x - 3\right]' = 4x - 5 - 0 = 4x - 5$.

$y'(x_0) = y'(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3$

$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ касательная

$y(x) = 3 - 5 \cdot (x - 2)$

$y(x) = 3 - 5 \cdot x + 10$

$y(x) = -5 \cdot x + 13$

Ответ : $y(x) = -5 \cdot x + 13$ касательная к графику функции в точке

Пример 2.10. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию.

Построить график этой функции, используя результаты исследования.

$$y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x + 1}$$

Общая схема исследования:

Область определения

Точки пересечения с осями координат

С ось ох =>y=0

Четность-нечетность, периодичность.

Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания функции.
Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости.
Асимптоты вертикальные и наклонные.
График.

Область определения $x+1\neq 0 \quad x\neq -1$ Д(x)= $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$

Точки пересечения с осями координат
С ось ox =>y=0

$$\frac{3x^2-2x+3}{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x+3=0 \\ x+1\neq 0 \end{cases}$$

$$3x^2-2x+3=0$$

$$Д=в^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(+3)=4-36=-32<0$$

Нет точек пересечения с осями координат

3) Четность-нечетность, периодичность

$$y(-x)=\frac{3*(-x)^2-2*(-x)+3}{(-x)+1}=\frac{3x^2+2x+3}{-x+1}\neq -y(x), \neq y(x)$$ не является четной и не является нечетной, график не симметричен относительно оси оу и начала координат.
Функция не содержит тригонометрических выражений - не является периодической.
4)Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания.

$$y'=\left(\frac{3x^2-2x+3}{x+1}\right)'=$$

$$\frac{\left(3x^2-2x+3\right)'\cdot(x+1)-\left(3x^2-2x+3\right)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$\frac{(6x-2)\cdot(x+1)-\left(3x^2-2x+3\right)\cdot 1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{\left(6x^2+4x-2\right)-\left(3x^2-2x+3\right)}{(x+1)^2}=\frac{\left(3x^2+6x-5\right)}{(x+1)^2}$$

$$\frac{\left(3x^2+6x-5\right)}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6x-5=0 \\ (x+1)^2\neq 0 \end{cases}$$

$$3x^2+6x-5=0$$

$$Д = в^2 - 4ac = (6)^2 - 4\cdot 3\cdot(-5) = 36 + 60 = 96$$

$$x_1 = \frac{-в + \sqrt{Д}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{96}}{2\cdot 3} = \frac{-6 + 4\sqrt{6}}{6} = \frac{-3 + 2\sqrt{6}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-в - \sqrt{Д}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{96}}{2\cdot 3} = \frac{-6 - 4\sqrt{6}}{6} = \frac{-3 - 2\sqrt{6}}{3}$$

$$3x^2 + 6x - 5 = 3\cdot\left(x - \frac{-3+2\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\left(x - \frac{-3-2\sqrt{6}}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3+2\sqrt{6}}{3} \\ x = \dfrac{-3-2\sqrt{6}}{3} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

точки экстремума x= $\frac{-3+2\sqrt{6}}{3}$ и x= $\frac{-3-2\sqrt{6}}{3}$

Найдем знак первой производной на промежутках области определения

| x | $\left(-\infty;\frac{-3-2\sqrt{6}}{3}\right)$ | $\frac{-3-2\sqrt{6}}{3}$ | $\left(\frac{-3-2\sqrt{6}}{3};-1\right)$ | $-1$ | $\left(-1;\frac{-3+2\sqrt{6}}{3}\right)$ | $\frac{-3+2\sqrt{6}}{3}$ | $\left(\frac{-3+2\sqrt{6}}{3};\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | - | Неопр | - | 0 | + |
| y | ↗ | макс | ↘ | Неопр | ↘ | мин | ↗ |

5)Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости

$$y'' = \left(\frac{\left(3x^2+6x-5\right)}{(x+1)^2}\right)' =$$

$$\frac{\left(3x^2+6x-5\right)'\cdot(x+1)^2 - \left(3x^2+6x-5\right)\cdot\left((x+1)^2\right)'}{\left((x+1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(6x+6)\cdot(x+1)^2 - \left(3x^2+6x-5\right)\cdot 2\cdot(x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{6\cdot(x+1)^3 - (3x^2+6x-5)\cdot 2\cdot(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4} =$$

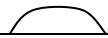
$$= \frac{2\cdot(x+1)\cdot(3*(x+1)^2 - (3x^2+6x-5))}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot(3x^2+6x+3-(3x^2+6x-5))}{(x-1)^3} = \frac{16}{(x+1)^3}$$

$\frac{16}{(x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 \neq 0 \\ (x+1) \neq 0 \end{cases}$ действительных корней нет, точек перегиба нет . Найдем знак второй производной на промежутках области определения.

$$y''(0) = \frac{16}{(0+1)^3} = \frac{16}{(1)^3} = 16 > 0$$

$$y''(-2) = \frac{16}{(-3+1)^3} = \frac{16}{-8} = -2 < 0$$

| x | $(-\infty;-1)$ | -1 | $(-1;\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | - | Не опр | + |
| y |  | Не опр | |

6) Асимптоты

У=кх+в

$$K = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-2x+3}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+3}{x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3-\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}}{1+\frac{1}{\infty}} =$$

$$= \frac{3-0+0}{1+0} = 3$$

в= $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-kx=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+3}{x+1}-3x=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+3-3x^2-3x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{x+1}==\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-5x}{x}+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{-5+\dfrac{3}{\infty}}{1+\dfrac{1}{\infty}}=\frac{-5+0}{1+0}=-5$$

У=3х-5–наклонная асимптота

Вертикальные асимптоты

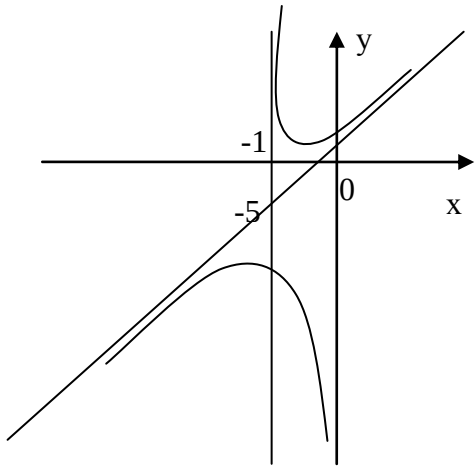
Х=1 точка разрыва

$$\lim_{x\to-1-\Delta} f(x)=\lim_{x\to-1-\Delta}\frac{3x^2-2x+3}{x+1}=\frac{3*(-1-\Delta)^2-2*(-1-\Delta)+3}{(-1-\Delta)+1}==$$

$$\frac{9+6\Delta+3\Delta^2+2+2\Delta+3}{-\Delta}=\frac{14}{-\Delta}=\frac{14}{-0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1+\Delta} f(x)=\lim_{x\to-1+\Delta}\frac{3x^2-2x+3}{x+1}=\frac{3*(-1+\Delta)^2-2*(-1+\Delta)+3}{(-1+\Delta)+1}==$$

$$\frac{9-6\Delta+3\Delta^2+2-2\Delta+3}{+\Delta}=\frac{14}{+\Delta}=\frac{14}{+0}=+\infty$$




Пример 2.11.

Вычислить предельную выручку, если известны уравнения спроса10q+p-100=0 и значения цены p=80 на продукцию (- количество продукции. p-цена продукции) Что она показывает?

$$10q + p - 100 = 0$$

$$10q = 100 - p$$

$$q = \frac{100 - p}{10}$$

$$q = 10 - \frac{p}{10}$$

$$U = p * q = p * (10 - \frac{p}{10})$$

$$U = p * q = 10p - \frac{p^2}{10}$$

$$U' = \left(10p - \frac{p^2}{10}\right)' = 10 * 1 - \frac{2 * p}{10} = 10 - \frac{p}{5}$$

$$U' = 0$$

$$10 - \frac{p}{5} = 0$$

$\frac{p}{5} = 10$

$p = 50$ оптимальная цена, при которой получаем максимальную выручку и при которой спрос равен предложению

$q = 10 - \frac{50}{10} = 10 - 5 = 5$ Количество товара, которое можно продать с учетом спроса при оптимальной цене.

Пример 2.12.

Функции спроса и предложения имеют вид $q = \frac{p+16}{p+1}$ - спроса,

$s = p + 4$ - предложения.

Найти: 1) равновесную цену $p_0$;

2) эластичность спроса и предложения для этой цены $p_0$.

равновесная цена $p_0$ находится в случае, если спрос равен предложению

$q = s$

$$\frac{p+16}{p+1} = p + 4$$

$$p + 16 = (p + 4) * (p + 1)$$

$$p + 16 = p^2 + 5p + 4$$

$$p^2 + 4p - 12 = 0$$

$$Д = в^2 - 4ac = 4^2 - 4 * 1 * (-12) = 16 + 48 = 64$$

$$p_1 = \frac{-в + \sqrt{Д}}{2 * a} = \frac{-4 + 8}{2} = 2$$

$$p_2 = \frac{-в - \sqrt{Д}}{2 * a} = \frac{-4 - 8}{2} = -6$$

$p_0 = 2$ оптимальная цена, при которой получаем максимальную выручку и при которой спрос равен передложению

$q = \frac{2+16}{2+1} = \frac{18}{3} = 6$ Количество товара, которое можно продать с учетом спроса при оптимальной цене.

$s = 2 + 4 = 6$ Спрос на товар по оптимальной цене

2) эластичность спроса и предложения для этой цены $p_0$.

Эластичностью функции f(x) в точке $x_0$ называют предел

$$E_y(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right). \qquad E_y = \frac{x}{y}y'.$$

Спрос – это количество товара, востребованное покупателем. Ценовая эластичность спроса $E_D$ – это величина, характеризующая то, как спрос реагирует на изменение цены. Если $|E_D| > 1$, то спрос называется эластичным, если $|E_D| < 1$, то неэластичным. В случае $E_D = 0$ спрос называется совершенно неэластичным, т. е. изменение цены не приводит ни к какому изменению спроса. Напротив, если самое малое снижение цены побуждает покупателя увеличить покупки от 0 до предела своих возможностей, говорят, что спрос является совершенно эластичным. В зависимости от текущей эластичности спроса, предприниматель принимает решения о снижении или повышении цен на продукцию.

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q'_p$$

$$q' = \left(\frac{p+16}{p+1}\right)' = \frac{(p+16)' * (p+1) - (p+16) * (p+1)'}{(p+1)^2} =$$

$$= \frac{1 * (p+1) - (p+16) * 1}{(p+1)^2} = -\frac{15}{(p+1)^2}$$

$$E_p(q) = \frac{p}{\frac{p+16}{p+1}} \cdot \left(-\frac{15}{(p+1)^2}\right) = \frac{-15p}{(p+16) * (p+1)}$$

$$E_{p=2}(q) = \frac{-15 * 2}{(2+16) * (2+1)} = \frac{-30}{18 * 3} = \frac{-5}{9} < 0$$

$$E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot s'_p$$

$$s' = (p+4)' = 1$$

$$E_p(s) = \frac{p}{p+4} \cdot 1$$

$$E_{p=2}(s) = \frac{2}{2+4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

**Тема 3: «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных»**

Пример 3.1.

Найти все частные производные 1-го порядка:

$$z = \frac{x^3}{6} - \operatorname{ctg}(xy) + \frac{1}{\sqrt{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left( \frac{x^3}{6} - \operatorname{ctg}(xy) + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)'_x = \frac{3x^2}{6} - \left( -\frac{1}{\sin^2(xy)} \right) \cdot (xy)'_x + 0 =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\sin^2(xy)} \cdot (1y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y}{\sin^2(xy)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left( \frac{x^3}{6} - \operatorname{ctg}(xy) + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)'_y = 0 - \left( -\frac{1}{\sin^2(xy)} \right) \cdot (xy)'_y + \left( y^{-\frac{1}{2}} \right)'_y =$$

$$= \frac{1}{\sin^2(xy)} \cdot (x \cdot 1) + \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( y^{-\frac{3}{2}} \right) =$$

$$= \frac{x}{\sin^2(xy)} - \frac{1}{2\sqrt{y^3}}$$

Пример 3.2.

Найти все частные производные 1-го порядка

$$z = \frac{\sin(y^3)}{x^4},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left( \frac{\sin(y^3)}{x^4} \right)'_x = \frac{-4\sin(y^3)}{x^5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\sin(y^3)}{x^4}\right)'_y=\frac{\cos(y^3)}{x^4}\cdot\left(y^3\right)'_y=\frac{\cos(y^3)}{x^4}\cdot\left(3y^2\right)$$

Пример 3.3.

Найти все частные производные 1-го порядка

$z=(\cos x)^{\ln y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left((\cos x)^{\ln y}\right)'_x=\ln y\cdot(\cos x)^{\ln y-1}.(\cos x)'_x=$$

$$=\ln y\cdot(\cos x)^{\ln y-1}.(-\sin x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left((\cos x)^{\ln y}\right)'_y=(\cos x)^{\ln y}\cdot\ln(\cos x)\cdot(\ln y)'_y=$$

$$=(\cos x)^{\ln y}\cdot\ln(\cos x)\cdot\frac{1}{y}$$

Пример 3.4.

Найти все частные производные 2-го порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)'_x=1\cdot e^{\frac{y}{x}}+x\cdot e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=1\cdot e^{\frac{y}{x}}-x\cdot e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2}=e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(1-\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)'_y=x\cdot e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=x\cdot e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=e^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(1-\frac{y}{x}\right)\right)'_x=\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_x\cdot\left(1-\frac{y}{x}\right)+e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(1-\frac{y}{x}\right)'_x=$$

$$=e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{-y}{x^2}\cdot\left(1-\frac{y}{x}\right)+e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)\right)'_y=\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_y\cdot\left(1-\frac{y}{x}\right)+e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(1-\frac{y}{x}\right)'_y=$$

$$=e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{y}{x}\right)+e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(e^{\frac{y}{x}}\right)'_y=e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

Пример 3.5.

Дана функция $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$, точка А(1; 1) и вектор $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$.

Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке А; б) производную в точке А по направлению вектора а.

$z = \ln(5x^2 + 3y^2)$

$A(1;1)$

$\bar{a} = 3i + 2j$

Найдем частные производные данной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(5x^2 + 3y^2))'_x = \frac{1}{5x^2 + 3y^2}(5x^2 + 3y^2)'_x = \frac{10x}{5x^2 + 3y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(5x^2 + 3y^2))'_y = \frac{1}{5x^2 + 3y^2}(5x^2 + 3y^2)'_y = \frac{6y}{5x^2 + 3y^2}$$

Подставим координаты точки А в данные частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A = \frac{10x}{5x^2 + 3y^2}\Big|_{(1;1)} = \frac{10 \cdot 1}{5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A = \frac{6y}{5x^2 + 3y^2}\Big|_{(1;1)} = \frac{6 \cdot 1}{5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$\operatorname{grad} z$ в точке А

$$gradz\Big|_A = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot i + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot j$$

$$gradz\Big|_A = \frac{5}{4} \cdot i + \frac{3}{4} \cdot j = \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$$

Определим направляющие косинусы для вектора а

$\bar{a} = 3i + 2j = (3;2)$

Для этого найдем длину вектора

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\bar{a}\right|} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\left|\bar{a}\right|} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Найдем производную по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial a}\Big|_A = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot \cos\beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}\Big|_A = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{21}{4\sqrt{13}}$$

Пример 3.6.

Докажите, что функция $z = x \cdot e^{y/x}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Решение:

Найдем частные производные данной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x\cdot e^{y/x})'_x = (x)'_x e^{y/x} + x\cdot(e^{y/x}))'_x = 1\cdot e^{y/x} + x\cdot e^{y/x}(y/x)'_x =$$

$$= e^{y/x} + x\cdot e^{y/x}\frac{-y}{x^2} = e^{y/x} - \frac{y\cdot e^{y/x}}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x\cdot e^{y/x})'_y = x\cdot e^{y/x}(^{y/x})'_y = x\cdot e^{y/x}\,\frac{1}{x} = e^{y/x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(e^{y/x} - \frac{y\cdot e^{y/x}}{x}\right)'_x = e^{y/x}\cdot\frac{-y}{x^2} - \frac{\left(y\cdot e^{y/x}\right)'_x\cdot x - y\cdot e^{y/x}\cdot x_x'}{x^2} =$$

$$= e^{y/x}\cdot\frac{-y}{x^2} - \frac{y\cdot e^{y/x}\cdot\frac{-y}{x^2}\cdot x - y\cdot e^{y/x}\cdot 1}{x^2} = e^{y/x}\cdot\frac{-y}{x^2} - \frac{e^{y/x}\cdot\frac{-y^2}{x} - y\cdot e^{y/x}\cdot 1}{x^2} =$$

$$= e^{y/x}\cdot\frac{-y}{x^2} - e^{y/x}\cdot\frac{-y^2}{x^3} + \frac{y\cdot e^{y/x}}{x^2} = -\frac{ye^{y/x}}{x^2} + \frac{y^2e^{y/x}}{x^3} + \frac{y\cdot e^{y/x}}{x^2} = \frac{y^2e^{y/x}}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(e^{y/x}-\frac{y\cdot e^{y/x}}{x}\right)'_x=e^{y/x}\cdot\frac{-y}{x^2}-\frac{\left(y\cdot e^{y/x}\right)'_x\cdot x-y\cdot e^{y/x}\cdot x'_x}{x^2}=$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(e^{y/x}-\frac{y\cdot e^{y/x}}{x}\right)'_y=e^{y/x}\cdot(y/x)'_y-\left(\frac{y\cdot e^{y/x}}{x}\right)'_y=$$

$$=e^{y/x}\cdot\frac{1}{x}-\left(\frac{y'_y\cdot e^{y/x}+y\cdot\left(e^{y/x}\right)'_y}{x}\right)=\frac{e^{y/x}}{x}-\left(\frac{1\cdot e^{y/x}+y\cdot e^{y/x}\cdot(y/x)'_y}{x}\right)=$$

$$=\frac{e^{y/x}}{x}-\left(\frac{1\cdot e^{y/x}+y\cdot e^{y/x}\cdot(1/x)}{x}\right)=\frac{e^{y/x}}{x}-\frac{e^{y/x}}{x}-\frac{y\cdot e^{y/x}}{x^2}=-\frac{y\cdot e^{y/x}}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(e^{y/x}\right)'_y=e^{y/x}\cdot(y/x)'_y=e^{y/x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{e^{y/x}}{x}$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$x^2\left(\frac{y^2e^{y/x}}{x^3}\right)+2xy\left(-\frac{y\cdot e^{y/x}}{x^2}\right)+y^2\left(\frac{e^{y/x}}{x}\right)=0$$

$$\frac{y^2e^{y/x}}{x}+2y^2\cdot\frac{-e^{y/x}}{x}+\frac{y^2e^{y/x}}{x}=0$$

$$\frac{e^{y/x}}{x}(y^2-2y^2+y^2)=0$$

$$\frac{e^{y/x}}{x}\cdot 0=0$$

$$0=0$$

Пример 3.7.
Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).
Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость ед. фактора $K$ равна 4 ден.ед., а стоимость ед. фактора $L$ равна 1 ден.ед.
Решите задачу определения максимального выпуска продукции, который может обеспечить фирма, полностью истратив все средства $C = 100$ ден.ед.
Решение:
Функция издержек фирмы

$$U(p1 = 4; p2 = 1) = (4 * K)^{1/2} * (1 * L)^{1/2} = \left(4 \cdot 1 * K * L\right)^{1/2} =$$ ден. ед.

$$= \left(4\right)^{1/2} * K^{1/2} * L^{1/2} = 2 * Q$$

$$Q^2 = \left(K^{1/2} * L^{1/2}\right)^2$$

$$Q^2 = K * L$$

$$K = \frac{Q^2}{L}$$

$$\begin{cases} K = f(L) \\ K' = -\dfrac{w}{r} \\ wL + rK = C_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = \dfrac{Q^2}{L} \\ K' = \dfrac{-w}{r} = -\dfrac{1}{4} \\ 1 * L + 4 * K = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K=\dfrac{Q^2}{L} \\ K'=\left(\dfrac{Q^2}{L}\right)'=-2\dfrac{Q^2}{L^2} \\ K'=\dfrac{-w}{r}=-\dfrac{1}{4} \\ 1*L+4*\dfrac{Q^2}{L}=100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K=\dfrac{Q^2}{L} \\ -2\dfrac{Q^2}{L^2}=-\dfrac{1}{4} \\ 1*L^2+4*Q^2=100L \end{cases}$$

$$\begin{cases} K=\dfrac{Q^2}{L} \\ \left(\dfrac{Q}{L}\right)^2=\dfrac{2}{4} \\ 4*Q^2=100L-1*L^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K=\dfrac{Q^2}{L} \\ \dfrac{Q}{L}=\dfrac{1}{2} \\ Q^2=\dfrac{100L-1*L^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K=\dfrac{Q^2}{L} \\ L=2Q \\ Q^2=25L-\dfrac{L^2}{4} \end{cases}$$

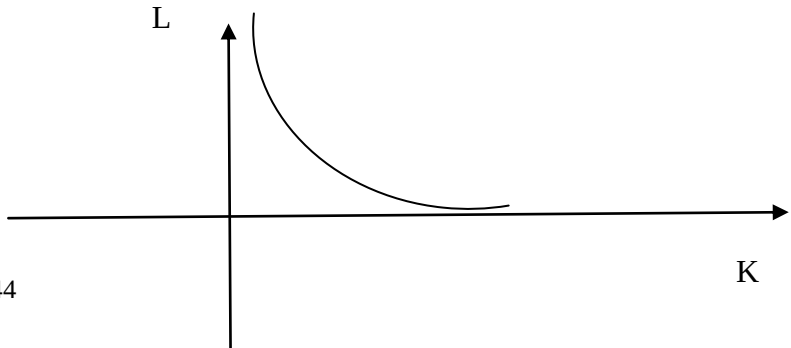
$$\begin{cases} K = \dfrac{25L - \dfrac{L^2}{4}}{L} \\ K' = -\dfrac{1}{4} \\ Q^2 = 25 * 2Q - \dfrac{(2Q)^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 25 - \dfrac{L}{4} \\ K' = -\dfrac{1}{4} \\ Q^2 = 50Q - Q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 25 - \dfrac{L}{4} \\ L = 2Q \\ 2Q^2 = 50Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 25 - \dfrac{50}{4} = 25 - 12.5 = 12.5 \\ L = 2 * 25 = 50 \\ Q = 25 \end{cases}$$

Изокванта для выпуска продукции объемом Q (4, 1)=2



К= $C = 100$ ден.ед.

$$Q = K^{1/2} L^{1/2}$$

$$Q = 100^{1/2} L^{1/2}$$

$$Q = 10(L)^{1/2}$$

$$Q' = \left(10(L)^{1/2}\right)' = 10 * \frac{1}{2\sqrt{L}} = \frac{5}{\sqrt{L}}$$

$$Q' = 0$$

$$(K * L) = 100^2$$

$$(K * L) = 10000$$

$$L = \frac{10000}{K}$$

| K | 100 | 50 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| L | 100 | 200 | 1000 | 10000 |

Пример 3.8.

Фирма реализует произведенную продукцию по цене p, а зависимость издержек C имеет вид $C(q) = aq + bq^3 + c$.

a=15; b=0,009; c=100; p=85.

1) выполнить полное исследование функции зависимости прибыли фирмы П от объема производства q построить ее график;

2) найти оптимальный для фирмы объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

$$C(q) = 15q + 0.009q^3 + 100$$

Прибыль= доход- издержки

$$П(q) = p * q - C(q) =$$

$$= 85 * q - (15q + 0.009q^3 + 100) =$$

$$= 70q - 0.009q^3 - 100$$

Общая схема исследования:

Область определения

Точки пересечения с осями координат

Четность-нечетность, периодичность.

Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания функции.

Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости.

Асимптоты вертикальные и наклонные.
График.
Область определения
$q > 0$
Д(q)= $(0;+\infty)$
2) Точки пересечения с осями координат
С ось ох =>y=0
$70q - 0.009q^3 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \ln x^2$ нет корней
Нет точек пересечения с осями координат
3)Четность-нечетность, периодичность
Д(q)= $(0;+\infty)$
Так как график несимметричен относительно оси оу и начала координат, нечетная и не нечетная
Функция не содержит тригонометрических выражений - не является периодической.
4)Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания.
$C' = (70q - 0.009q^3 - 100)' = 70*1 - 0.009*3*q^2 - 0 = 70 - 0.027q^2$

$C' = 0$
$70 - 0.027q^2 = 0$
$q^2 = 70/0.027 = 2592.93$

q=50.92- точка экстремума
$\Pi(q = 0) = 70*0 - 0.009*0^3 - 100 = -100$ убыток

| q | 0 | (0;50,92) | 50,92 | (50,92; + ∞ ) |
|---|---|---|---|---|
| $C'$ | 70 | + | 0 | - |
| C | -100 | возрастает | 2275,3 | убывает |

5)Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости
$C'' = (70 - 0.027q^2)' = -0.054q$

| q | 0 | $(0;+\infty)$ |
|---|---|---|
| $C'$ | 0 | - |
| C | -100 | выпукла |

6) Асимптоты

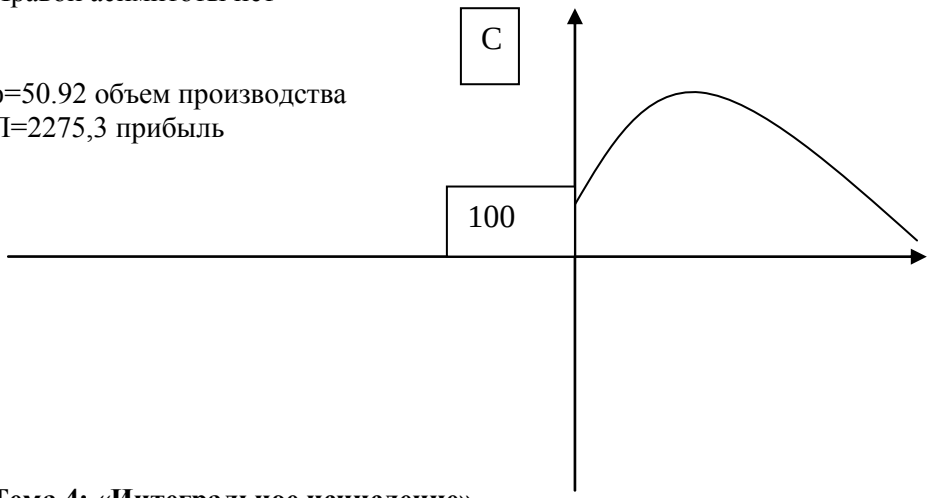
У=кх+в

$$K = \lim_{q\to\infty} \frac{C(q)}{q} = \lim_{q\to\infty} \frac{70q - 0.009q^3 - 100}{q}$$

$$= \lim_{q\to\infty} \frac{\left(70q - 0.009q^3 - 100\right)'}{q'} = \lim_{q\to\infty} \frac{\left(70 - 0.027q^2\right)}{1} =$$

$$= 70 - 0.027 * \infty = -\infty$$

Правой асимптоты нет




p=50.92 объем производства

П=2275,3 прибыль

**Тема 4: «Интегральное исчисление»**

Пример 4.1. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием:

$$a)\int \frac{2}{x} \cdot (3 - \sqrt[5]{x})^2 dx = \int \frac{2}{x} \cdot (9 - 6\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{x^2})dx =$$

$$\int (\frac{18}{x} - \frac{12\sqrt[5]{x}}{x} + \frac{2\sqrt[5]{x^2}}{x})dx = \int (\frac{18}{x} - \frac{12}{\sqrt[5]{x^4}} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}})dx =$$

$$= 18\ln|x| - 12 * \frac{\sqrt[5]{x^1}}{\frac{1}{5}} + 2 * \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\frac{2}{5}} + C = 18\ln|x| - 60\sqrt[5]{x^1} + 5\sqrt[5]{x^2} + C$$

Пример 4.2 Вычислить интеграл методом замены:

$$\int \frac{(\arcsin 3x+1)^3}{\sqrt{1-9x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t = (\arcsin 3x+1) \\ dt = (\arcsin 3x+1)' dx = \dfrac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = ;$$

$$= \int t^3 \frac{dt}{3} = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\arcsin 3x+1)^4}{4} + C$$

Пример 4.3 Вычислить интеграл методом интегрирования по частям: $\int (2-7x)\cdot \cos 7x dx$.

При вычислении данного интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Тогда получим

$$\int (2-7x)\cdot \cos 7x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2-7x & du = (2-7x)' dx = -7dx \\ dv = \cos 7x\, dx & v = \dfrac{\sin 7x}{7} \end{array} \right| =$$

$$= (2-7x)\cdot \frac{\sin 7x}{7} - \int \frac{\sin 7x}{7}(-7dx) = (2-7x)\cdot \frac{\sin 7x}{7} - \int \sin 7x dx =$$

$$= (2-7x)\cdot \frac{\sin 7x}{7} - \frac{-\cos 7x}{7} + C = (2-7x)\cdot \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\cos 7x}{7} + C$$

Пример 4.4. Найти неопределённый интеграл с помощью замены переменной:

$$\int \frac{4x-3}{4x^2+4x+1}dx = \int \frac{4x-3}{(2x+1)^2}dx = \left| \begin{array}{c} t = 2x+1 \\ dt = (2x+1)'dx = 2dx \\ dx = \frac{dt}{2} \\ x = \frac{t-1}{2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{4*\frac{t-1}{2}-3}{t^2} * \frac{dt}{2} = \int \frac{4t-4-6}{4t^2}dt =$$

$$= \int \frac{4t-10}{4t^2}dt = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{5}{4t^2} \right) dt = \ln|t| + \frac{5}{4t} + C =$$

$$= \ln|2x+1| + \frac{5}{4*(2x+1)} + C$$

Пример 4.5. Найти неопределённый интеграл с помощью замены переменной:

$$\int \sin^7 2x \cos^3 2x dx .=$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \sin 2x \quad \cos 2x = \sqrt{1-t^2} \\ x = \frac{\arcsin t}{2} \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}dt \end{array} \right| = \int t^7 * \left( \sqrt{1-t^2} \right)^3 * \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}dt =$$

=

$$\int t^7 * \left( \sqrt{1-t^2} \right)^2 * \frac{1}{2}dt = \int t^7 * \left( 1-t^2 \right) * \frac{1}{2}dt = \int \frac{t^7 - t^9}{2}dt = \frac{t^8}{16} - \frac{t^{10}}{20} + C =$$

$$= \frac{(\sin 2x)^8}{16} - \frac{(\sin 2x)^{10}}{20} + C$$

Пример 4.6. $\int \frac{1-x}{(x+1)^2 x}dx,$

Разложим подынтегральную функцию, т.е. правильную рациональную дробь, на сумму простейших дробей:

$$\frac{1-x}{(x+1)^2 x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x} = \frac{A(x+1)x + Bx + C(x+1)^2}{(x+1)^2 x} =$$

$$= \frac{x^2(A+C) + x\cdot(A+B+2C) + (C)}{(x+1)^2 x}$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем числители левой и правой частей:

$$1 - x = x^2(A+C) + x\cdot(A+B+2C) + C$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\right| \begin{array}{l} 0 = A + C \\ -1 = (A+B+2C) \\ 1 = C \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = -C = -1$$

$$B = -1 - A - 2C = -1 - (-1) - 2*1 = -2$$

$$C = 1$$

Таким образом,

$$\frac{1-x}{(x+1)^2 x} = \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x}.$$

Далее, вычисляем исходный интеграл

$$\int \frac{1-x}{(x+1)^2 x} = \int \left( \frac{-1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} \right) dx = -\ln|(x+1)| + \frac{2}{x+1} + \ln|x| + C$$

Пример 4.7. $\int \frac{x+1}{x^2+6x+25}\, dx$,

$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+25} = \int \frac{x+1}{x^2+6x+9+16} = \int \left( \frac{x+1}{(x+3)^2+16} \right) dx =$$

$$\int\left(\frac{x+3-2}{(x+3)^2+16}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{x+3}{(x+3)^2+16}-\frac{2}{(x+3)^2+16}\right)dx=\left|\begin{matrix}t=x+3\\ dt=(x+3)'dx=dx\end{matrix}\right|=\int\left(\frac{t}{t^2+16}-\frac{2}{t^2+16}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+16\right|-\frac{2}{4}arctg\,\frac{t}{4}+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x+3)^2+16\right|-\frac{2}{4}arctg\,\frac{x+3}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+25\right|-\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+3}{4}+C$$

Пример 4.8. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
$y=2+2x-x^2,\ \ y=3-4x+x^2.$

Найдем точки пересечения

$$\begin{cases}y=2+2x-x^2,\\ y=3-4x+x^2.\end{cases}$$

$$2+2x-x^2=3-4x+x^2$$

$$2+2x-x^2-3+4x-x^2=0$$

$$-2x^2+6x-1=0$$

$$2x^2-6x+1=0$$

$$D=(-6)^2-4*2*1=36-8=24$$

$$x_1=\frac{6+\sqrt{24}}{4}=\frac{3+\sqrt{6}}{2}$$

$$x_2=\frac{6-\sqrt{24}}{4}=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$$

$$S=\int_a^b(y_2(x)-y_1(x))dx=\int_{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}\left(\left(2+2x-x^2\right)-\left(3-4x+x^2\right)\right)dx=$$

$$=\int_{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}\left(-1+6x-2x^2\right)dx=-x+\frac{6x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\Bigg|_{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}=-x+3x^2-\frac{2x^3}{3}\Bigg|_{\frac{3-\sqrt{6}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{6}}{2}}=$$

$$= \left( -\frac{3+\sqrt{6}}{2} + 3*\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}*\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)^3 \right) \Big| - \Big|$$

$$- \left( -\frac{3-\sqrt{6}}{2} + 3*\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}*\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)^3 \right) =$$

$$= \left| -\frac{3+\sqrt{6}}{2} + 3*\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}*\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)^3 + \frac{3-\sqrt{6}}{2} \right| -$$

$$- 3*\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}*\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)^3 =$$

$$= \left| \begin{array}{l} -\sqrt{6} + 3*\left(\frac{9+2\sqrt{6}+6}{4}\right) - 3*\left(\frac{9-2\sqrt{6}+6}{4}\right) - \frac{2}{3}*\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)^3 + \\ + \frac{2}{3}*\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)^3 = -\sqrt{6} + 3*\left(\frac{15+2\sqrt{6}-15+2\sqrt{6}}{4}\right) + \\ + \frac{2}{3}*\left(\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)^3 - \left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)^3\right) \end{array} \right| =$$

$$= \left| -\sqrt{6} + 3\sqrt{6} + \frac{2}{3}*\left( \frac{\left(3-\sqrt{6}-3-\sqrt{6}\right)*\left(\left(3-\sqrt{6}\right)^2 + \left(3-\sqrt{6}\right)*\left(3+\sqrt{6}\right) + \left(3+\sqrt{6}\right)^2\right)}{8} \right) \right| =$$

$$= \left| 2\sqrt{6} + \frac{2}{3}*\left( \frac{-2\sqrt{6}*(9-6\sqrt{6}+6+9-6+9+6\sqrt{6}+6}{8} \right) \right| =$$

$$= \left| 2\sqrt{6} + \frac{2}{3}*\left( \frac{-2\sqrt{6}*33}{8} \right) \right| = \left| 2\sqrt{6} - \left( \frac{11\sqrt{6}}{2} \right) \right| = \frac{7\sqrt{6}}{2} \text{ кв.ед.}$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{6}}{2}$ кв.ед.

Пример 4.7.

$$\int_1^{16} 48\frac{3x+5\sqrt[4]{x}}{x^2}dx = \left|\begin{array}{l} t=\sqrt[4]{x} \\ t^4=\left(\sqrt[4]{x}\right)^4=x \\ dx=\left(t^4\right)'dt=4t^3dt \\ t_1=\sqrt[4]{1}=1 \\ t_2=\sqrt[4]{16}=2 \end{array}\right| = 48\int_1^2 \frac{3t^4+5t}{\left(t^4\right)^2}4t^3dt = 48\int_1^2 \frac{3t^4+5t}{t^8}4t^3dt =$$

$$= 48*4\int_1^2 \frac{3t^4+5t}{t^5}dt = 192\int_1^2 \frac{\left(3t^3+5\right)t}{t^5}dt = 192\int_1^2 \frac{\left(3t^3+5\right)}{t^4}dt = 192\int_1^2 \left(\frac{3}{t}+\frac{5}{t^4}\right)dt =$$

$$= 192(3\ln|t|+5\frac{t^{-3}}{-3})\Big|_1^2 = 192(3\ln|2|+5\frac{2^{-3}}{-3}) - 192(3\ln|1|+5\frac{1^{-3}}{-3}) =$$

$$= 576\ln 2 - 40 - 0 + 320 = 576\ln 2 + 280$$

Пример 4.8.

$$\int_0^6 \frac{3xdx}{\sqrt{16-2x}} = \left|\begin{array}{l} t=\sqrt{16-2x} \\ t^2=\left(\sqrt{16-2x}\right)^2=16-2x \\ t^2-16=-2x \\ x=\frac{t^2-16}{-2} \\ dx=(\frac{t^2-16}{-2})'dt=-tdt \\ t_1=\sqrt{16-2*0}=4 \\ t_2=\sqrt{16-2*6}=2 \end{array}\right| = \int_4^2 \frac{3\frac{t^2-16}{-2}(-tdt)}{t} = \int_4^2 3\frac{t^2-16}{2}dt =$$

$$= \int_{12}^{52} \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{\sqrt{t^3}}{\frac{3}{2}}\Big|_{12}^{52} =$$

$$= \frac{3}{2}\int_4^2 \left(t^2 - 16\right)dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^3}{3} - 16t\right)\Big|_4^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{2^3}{3} - 16*2\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{4^3}{3} - 16*4\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3} - 32\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{64}{3} - 64\right) = 4 - 48 - 32 + 96 = 20$$

Пример 4.9. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin\frac{x}{3}dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ du = (x)'dx = dx \\ dv = \sin\frac{x}{3}dx \\ v = \int \sin\frac{x}{3}dx = -3\cos\frac{x}{3} \end{array}\right| = x\cdot\left(-3\cos\frac{x}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-3\cos\frac{x}{3}\right)dx =$$

$$= \pi\cdot\left(-3\cos\frac{\pi}{3}\right) - (-\pi)\cdot\left(-3\cos\frac{-\pi}{3}\right) + 3\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{x}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{-3\pi}{2} + \pi\left(-3\cos\frac{\pi}{3}\right) + 9\sin\frac{x}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-3\pi}{2} - 3\pi\cos\frac{\pi}{3} + 9\sin\frac{x}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{-3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + 9\sin\frac{\pi}{3} - 9\sin\frac{-\pi}{3} = -3\pi + 9\frac{\sqrt{3}}{2} + 9\frac{\sqrt{3}}{2} = -3\pi + 9\sqrt{3}$$

Пример 4.10. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{\varepsilon\to 1}\int_0^{\varepsilon}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left|\begin{array}{l} t = 1 - x^4 \\ dt = \left(1-x^4\right)'dx = -3x^3dx \\ x^3dx = \frac{dt}{-3} \\ t_1 = 1 - 0^4 = 1 \\ t_2 = 1 - \varepsilon^4 \end{array}\right| = \lim_{\varepsilon\to 1}\int_1^{1-\varepsilon^4}\frac{\frac{dt}{-3}}{\sqrt{t}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1}\frac{2\sqrt{t}}{-3}\Big|_1^{1-\varepsilon^4} = \lim_{\varepsilon\to 1}\left(\frac{2\sqrt{1-\varepsilon^4}}{-3} - \frac{2\sqrt{1}}{-3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{1-1^4}}{-3} - \frac{2\sqrt{1}}{-3}\right) = \frac{2}{3}$$

Пример 4.11.

Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1$ до $x_2$ изделий, если известна функция $t = t(x)$ ,описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства $t = ax^{-b}$

| $x_1$ | $x_2$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| 100 | 169 | 420 | 0,5 |

Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 64$ до $x_2 = 121$ изделий, используя формулу

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx,$$

полагая в формуле $t = ax^{-b}$, где $a$ – затраты времени на первое изделие, $b$ – показатель производственного процесса, $a = 420$ (мин.), $b = 0{,}5 = \frac{1}{2}$.

Решение:

$$t_{cp} = \frac{1}{169 - 100} \int_{100}^{169} 420x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{420}{69} 2\sqrt{x}\Big|_{100}^{169} =$$

$$= \frac{840}{69}(\sqrt{169} - \sqrt{100}) = \frac{840}{69}(13 - 10) = \frac{840}{23} \approx 36{,}522 \text{ (мин.)}.$$

**Тема 5: «Дифференциальные уравнения»**

Пример 5.1. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения:

$$xy' = y(1 + \ln\frac{y}{x})$$

Данное уравнение является однородным уравнением $xy' = y(1 + \ln\frac{y}{x})$

$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln\frac{y}{x})$$
$$y = ux$$

$$y' = u'x + x'u = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{ux}{x}(1 + \ln\frac{ux}{x})$$

$$u'x + u = u(1 + \ln u)$$

$$u'x + u = u + u\ln u$$

$$u'x = u\ln u$$

$$\frac{du}{dx}x = u\ln u$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln u| = \ln x + \ln C$$

$$\ln|\ln u| = \ln|xC|$$

$$|\ln u| = |xC|$$

$$u = e^{|xC|}$$

$$y = ux = e^{|xC|} * x$$ Общее решение

Пример 5.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = py' + qy = f(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = y_0;\ \ y'(0) = y_0'$ :

$$y'' + y' - 2y = \cos x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$$

Найдем общее решение однородного уравнения

$y'' + y' - 2y = 0.$

Составляем характеристическое уравнение

$k^2 + k - 2 = 0.$

$$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$$

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

$$k_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Полученное квадратное уравнение имеет действительные различные корни: $k_1=1$ $k_2=-2$. Следовательно, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 e^{1\cdot x} + C_2 e^{-2\cdot x}.$$

$$\bar{y}(0) = C_1 e^{1\cdot 0} + C_2 e^{-2\cdot 0} = C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 = 1 - C_2$$

$$\bar{y}' = 1 * C_1 e^{1\cdot x} + (-2) * C_2 e^{-2\cdot x}$$

$$\bar{y}'(0) = 1 * C_1 e^{1\cdot 0} + (-2) * C_2 e^{-2\cdot 0} = C_1 + (-2) * C_2 = 2$$

$$C_1 + (-2) * C_2 = 2$$

$$1 - C_2 + (-2) * C_2 = 2$$

$$-3C_2 = 2 - 1$$

$$-3C_2 = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{-3}$$

$$C_1 = 1 - \frac{1}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{4}{3} e^{1\cdot x} - \frac{1}{3} e^{-2\cdot x}$$

Пример 5.3. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения

$$\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = x^2 ydy,$$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

$$\sqrt{4+y^2}\,dx = x^2 ydy + ydy$$

$$\sqrt{4+y^2}\,dx = (x^2+1)ydy$$

$$\frac{\sqrt{4+y^2}dx}{(x^2+1)} = ydy$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{\sqrt{4+y^2}dx}{(x^2+1)} = ydy$$

$$ydy = \frac{\sqrt{4+y^2}dx}{(x^2+1)}.$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}} = \frac{dx}{(x^2+1)}$$

Интегрируя обе части равенства: $\int \frac{ydy}{\sqrt{4+y^2}} = \int \frac{dx}{(x^2+1)}$

$$\int \frac{d\left(4+y^2\right)}{2\sqrt{4+y^2}} = \int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

$$\sqrt{4+y^2} = arctgx + C$$

Пример 5.4. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \frac{x+y}{x-y}$,

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением

Сделаем подстановку $u = \frac{y}{x}$. Тогда y=ux и y'=u'x+u.

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}$$

$$u'x + u = \frac{x(1+u)}{x(1-u)}$$

$$u'x + u = \frac{(1+u)}{(1-u)}$$

$$u'x = \frac{(1+u)}{(1-u)} - u$$

$$u'x = \frac{(1+u)-u(1-u)}{(1-u)}$$

$$u'x = \frac{1+u-u+u^2}{(1-u)}$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{(1-u)}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u^2}{(1-u)}$$

$$\frac{(1-u)du}{(1+u^2)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{(1-u)du}{(1+u^2)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{(1+u^2)} - \int \frac{udu}{(1+u^2)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$arctgu - \frac{1}{2}\ln\left|(1+u^2)\right| = \ln|x| + C$$

$$arctg\,\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\right| = \ln|x| + C$$

$$arctg\,\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + C$$

$$arctg\,\frac{y}{x} - \ln\sqrt{\left|\frac{x^2+y^2}{x^2}\right|} = \ln|x| + C$$

$$arctg\,\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} + \ln|x| = \ln|x| + C$$

$$arctg\,\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = C$$

Это и есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Пример 5.5. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0,$

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением.

Сделаем подстановку y=uv; тогда y'=u'v+uv'.

Тогда данное уравнение примет вид

$$u'v + uv' + uv\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$u'v + (uv' + uv\cos x) = \frac{1}{2} * 2\sin x\cos x$$
$$u'v + u(v' + v\cos x) = \sin x\cos x$$
$$(v' + v\cos x) = 0$$
$$u'v + u * 0 = \sin x\cos x$$
$$\frac{dv}{dx} = -v\cos x$$
$$\frac{dv}{v} = -\cos x dx$$
$$\int \frac{dv}{v} = \int (-\cos x) dx$$
$$\ln v = -\sin x + C$$
$$C = 0$$
$$\ln v = -\sin x$$
$$v = e^{-\sin x}$$
$$u'v = \sin x\cos x$$
$$u'e^{-\sin x} = \sin x\cos x$$
$$u' = \sin x\cos xe^{\sin x}$$
$$\frac{du}{dx} = \sin x\cos xe^{\sin x}$$
$$du = \sin x\cos xe^{\sin x}dx$$
$$\int du = \int \sin x\cos xe^{\sin x}dx$$
$$\int du = \int \sin xe^{\sin x}d\sin x$$
$$t = \sin x$$
$$\int du = \int te^{t}dt$$
$$u = te^{t} - e^{t} + C$$
$$u = \sin xe^{\sin x} - e^{\sin x} + C$$
$$y = uv = (\sin xe^{\sin x} - e^{\sin x} + C)e^{-\sin x}$$
$$y = uv = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

$y(0)=0$

$y(0)=\sin 0-1+Ce^{-\sin 0}=0-1+C*1=0$

$C=1$

$y=\sin x-1+e^{-\sin x}$

Пример 5.6. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $2(xy'+y)=xy^2, \quad y(1)=2,$

$xy'+y=\frac{1}{2}xy^2$

$y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{2}y^2$ Данное уравнение является дифференциальным уравнением Бернулли.

Сделаем подстановку y=uv; тогда y'=u'v+uv'.

Тогда данное уравнение примет вид

$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{1}{2}(uv)^2$

$u'v+(uv'+\frac{uv}{x})=\frac{1}{2}(uv)^2$

$u'v+u(v'+\frac{v}{x})=\frac{1}{2}(uv)^2$

$(v'+\frac{v}{x})=0$

$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x}$

$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$

$\ln|v|=-\ln|x|$

$v=\frac{1}{x}$

$u'v+u*0=\frac{1}{2}(uv)^2$

$$u'\frac{1}{x}=\frac{1}{2}(u\frac{1}{x})^2$$

$$u'=\frac{u^2}{2x^2}x$$

$$u'=\frac{u^2}{2x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{2x}$$

$$\frac{du}{u^2}=\frac{dx}{2x}$$

$$\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{2x}$$

$$\frac{u^{-1}}{-1}=\frac{1}{2}\ln x+C$$

$$-\frac{1}{u}=\frac{1}{2}\ln x+C$$

$$u=-\frac{1}{\frac{1}{2}\ln x+C}$$

$$y=uv=-\frac{1}{\frac{1}{2}\ln x+C}*\frac{1}{x}$$

$$y(1)=-\frac{1}{\frac{1}{2}\ln 1+C}*\frac{1}{1}=-\frac{1}{C}=2$$

$$C=-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{1}{\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}}*\frac{1}{x}$$

$$y=-\frac{2}{(\ln x-1)x}$$

Пример 5.7. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $y^2dx+(xy-1)dy=0, \quad y\big|_{x=1}=e$,

$$y^2\frac{dx}{dy}+(xy-1)=0$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{(xy-1)}{y^2}=0$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{xy}{y^2}-\frac{1}{y^2}=0$$

$$x'+\frac{x}{y}-\frac{1}{y^2}=0$$

$$x'+\frac{x}{y}=\frac{1}{y^2}$$

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением.

Сделаем подстановку x=uv; тогда x'=u'v+uv'.

$$x'+\frac{x}{y}=\frac{1}{y^2}$$

$$u'v+uv'+\frac{uv}{y}=\frac{1}{y^2}$$

$$u'v+\left(uv'+\frac{uv}{y}\right)=\frac{1}{y^2}$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{y}\right)=\frac{1}{y^2}$$

$$\left(v'+\frac{v}{y}\right)=0 \qquad\qquad u'v+u*0=\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{v}{y}$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|v| = -\ln|y| + C$$

$$C = 0$$

$$v = \frac{1}{y}$$

$$u' \frac{1}{y} = \frac{1}{y^2}$$

$$u' = \frac{1}{y}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$du = \frac{dy}{y}$$

$$\int du = \int \frac{dy}{y}$$

$$u = \ln|y| + C$$

$$x = uv = (\ln|y| + C)\frac{1}{y}$$

$$y|_{x=1} = e$$

$$x = 1$$

$$y = e$$

$$1 = (\ln|e| + C)\frac{1}{e}$$

$$1 = (1 + C)\frac{1}{e}$$

$$e = (1 + C)$$

$$C = 1 - e$$

$$x = \frac{(\ln|y| + 1 - e)}{y}$$

Пример 5.8. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$.

$$P(x;y)=3x^2+4y^2$$

$$Q(x;y)=8xy+e^y$$

$$\frac{dP(x;y)}{dy}=\left(3x^2+4y^2\right)_y'=8y$$

$$\frac{dQ(x;y)}{dx}=\left(8xy+e^y\right)_x'=8y$$

$$\frac{dP(x;y)}{dy}=\frac{dQ(x;y)}{dx}=8y$$

$$\int_{x_0}^{x}P(x;y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0;y)dy=C$$

$$\int_{0}^{x}(3x^2+4y^2)dx+\int_{0}^{y}(8*0*y+e^y)dy=C$$

$$\int_{0}^{x}(3x^2+4y^2)dx+\int_{0}^{y}e^y dy=C$$

$$\left(\frac{3x^3}{3}+4y^2x\right)\Big|_0^x+e^y\Big|_0^y=C$$

$$\left(\frac{3x^3}{3}+4y^2x\right)-\left(\frac{3*0^3}{3}+4y^2*0\right)+e^y-e^0=C$$

$$\left(\frac{3x^3}{3}+4y^2x\right)+e^y-1=C$$

$$\left(\frac{3x^3}{3}+4y^2x\right)+e^y=\overline{C}$$

Пример 5.9. Найти общий интеграл (решение) дифференциального уравнения, допускающего понижения порядка: $2xy'''=y''$,

Решение.

Данное дифференциальное уравнение не содержит в явном виде искомую функцию y(x), следовательно, оно допускает понижение порядка. Для этого положим y''=p(x) Тогда y'''=dp/dx
и уравнение примет вид

$$2x\frac{dp}{dx}=p$$

Разделяя переменные, получим $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{2x}$

$$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{2x}$$

$$\ln|p|=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln C_1$$

$$\ln|p|=\ln\sqrt{|x|}+\ln C_1$$

$$\ln|p|=\ln\sqrt{|x|}C_1$$

$$|p|=\sqrt{|x|}C_1$$

$$|p|=\sqrt{|x|}C_1$$

$$y''=\sqrt{|x|}C_1$$

$$y'=\int\sqrt{|x|}C_1dx$$

$$y'=\frac{\sqrt{|x|^3}C_1}{\frac{3}{2}}+C_2$$

$$y'=\frac{2\sqrt{|x|^3}C_1}{3}+C_2$$

$$y=\int\left(\frac{2\sqrt{|x|^3}C_1}{3}+C_2\right)dx=\frac{2\sqrt{|x|^5}C_1}{3*\frac{5}{2}}+C_2x+C_3$$

$$y=\frac{4\sqrt{|x|^5}C_1}{15}+C_2x+C_3$$

Пример 5.10. Найти частный интеграл (решение) дифференциального уравнения, допускающего понижения порядка: $y''y^3+64=0,\quad y(0)=4,\ y'(0)=2,$

Это дифференциальное уравнение не содержит в явном виде независимой переменной x, следовательно, оно допускает понижение порядка. Положим y'=p(y), тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \quad \Rightarrow \quad y'' = p' \cdot p \,.$$

В результате, исходное уравнение примет вид $p'py^3 + 64 = 0$

$$p'py^3 = -64$$

$$\frac{dp}{dy}\, py^3 = -64$$

$$pdp = \frac{-64}{y^3}\, dy$$

$$\int pdp = \int \frac{-64}{y^3}\, dy$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{-64}{-2y^2} + C_1$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{32}{y^2} + C$$

$$p^2 = \frac{64}{y^2} + 2C_1$$

$$p = \sqrt{\frac{64}{y^2} + 2C_1}$$

$$y' = \sqrt{\frac{64}{y^2} + 2C}$$

$$y' = \sqrt{\frac{64 + 2C_1y^2}{y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{64 + 2C_1y^2}{y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{64 + 2C_1y^2}}{y}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{64+2C_1y^2}}=dx$$

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{64+2C_1y^2}}=\int dx$$

$$\int\frac{d\left(64+2C_1y^2\right)}{2*2C_1*\sqrt{64+2C_1y^2}}=\int dx$$

$$\frac{\sqrt{64+2Cy^2}}{4C_1*\frac{1}{2}}=x+C_2$$

$$\sqrt{64+2Cy^2}=2C_1(x+C_2)$$

Пример 5.11. Найти частное решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$y''-4y'=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-2,$

Составляем характеристическое уравнение

$k^2-4k=0.$

$k(k-4)=0$

$k_1=0 \qquad k_2=4$

Полученное квадратное уравнение имеет действительные корни: $k_1=0$, $k_2=4$. Следовательно, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$y=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{4\cdot x}.$

$y=C_1+C_2e^{4\cdot x}$

$y(0)=3$

$y(0)=C_1+C_2e^{4\cdot 0}=C_1+C_2=3$

$C_1+C_2=3$

$y'=\left(C_1+C_2e^{4\cdot x}\right)'=4C_2e^{4\cdot x}$

$y'(0)=-2$

$y'(0)=4C_2e^{4\cdot 0}=4C_2=-2$

$C_2=-1/2$

$C_1-1/2=3$

$C_1 = 1/2 + 3 = 7/2$

$y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} e^{4 \cdot x}$

Пример 5.12. Найти частное решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$y'' - 4y' + 13y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2,$

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$.

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$

$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$

$k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$

Полученное квадратное уравнение имеет комплексные корни: $k_1$=2+3i, $k_2$=2-3i.

$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

$y(0) = -1$

$y(0) = e^{2*0}(C_1 \cos 3*0 + C_2 \sin 3*0) = C_1 = -1$

$y'(x) = \left(e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)\right)' = 2e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) +$

$+ e^{2x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) =$

$= e^{2x}(2C_1 \cos 3x + 2C_2 \sin 3x - 3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)$

$y'(0) = 2$

$y'(0) = e^{2*0}(2C_1 \cos 3*0 + 2C_2 \sin 3*0 - 3C_1 \sin 3*0 + 3C_2 \cos 3*0) =$

$= (2C_1 + 3C_2) = 2$

$(2C_1 + 3C_2) = 2$

$2*(-1) + 3C_2 = 2$

$3C_2 = 4$

$C_2 = 4/3$

$y(x) = e^{2x}(-1\cos 3x + \frac{4}{3} \sin 3x)$

Пример 5.13. Найти частное решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1.$

$y'' - 3y' + 2y = 0$ однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$k^2 - 3k + 2 = 0$ соответствующее характеристическое уравнение

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

корни действительные и различные

$y = C_1 e^{2 \cdot x} + C_2 e^{1 \cdot x}$

$y(0) = C_1 e^{2 \cdot 0} + C_2 e^{1 \cdot 0} = C_1 + C_2 = 3$

$C_1 = 3 - C_2$

$y' = \left(C_1 e^{2 \cdot x} + C_2 e^{1 \cdot x}\right)' = 2C_1 e^{2 \cdot x} + 1C_2 e^{1 \cdot x}$

$y' = \left(C_1 e^{2 \cdot x} + C_2 e^{1 \cdot x}\right)' = 2C_1 e^{2 \cdot x} + 1C_2 e^{1 \cdot x}$

$y'(0) = 2C_1 e^{2 \cdot 0} + 1C_2 e^{1 \cdot 0} = 2C_1 + C_2 = -1$

$2C_1 + C_2 = -1$

$2 * (3 - C_2) + C_2 = -1$

$6 - 2C_2 + C_2 = -1$

$-C_2 = -7$

$C_2 = 7$

$C_1 = 3 - 7 = -4$

$y = -4e^{2 \cdot x} + 7e^{1 \cdot x}$

Пример 5.14. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго

порядка: $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$y'' - 12y' + 36y = 0.$

Составляем характеристическое уравнение

$k^2 - 12k + 36 = 0$.

$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{0}}{2} = 6$$

$$k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{12 - 0}{2} = 6$$

Полученное квадратное уравнение имеет действительные корни: $k_1$=6, $k_2$=6. Следовательно, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$\bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{6x}$.

Найдем теперь частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения. Оно будет иметь такой же вид, как и правая часть неоднородного уравнения: f(x) $= 14e^{6x}$, т.е. решение будем искать в виде $f(x) = e^{ax}P(x)$ $k_1=k_2=6=a$, кратность корня = 2

$y^*(x) = e^{6x}Ax^2$

.

Находя производные этой функции

$y^{*'}(x) = \left(e^{6x}Ax^2\right)' = 6e^{6x}Ax^2 + e^{6x}A*2x = e^{6x}A(6x^2 + 2x)$

$y^{*''}(x) = \left(e^{6x}A(6x^2 + 2x)\right)' = 6e^{6x}A(6x^2 + 2x) + e^{6x}A(12x + 2) = e^{6x}A(36x^2 + 24$

и подставляя их в исходное уравнение, получим

$y''^* - 12y'^* + 36y^* = 14e^{6x}$

$e^{6x}A(36x^2 + 24x + 2) - 12 * e^{6x}A(6x^2 + 2x) + 36e^{6x}Ax^2 = 14e^{6x}$

$A(36x^2 + 24x + 2 - 72x^2 - 24x + 36x^2) = 14$

$A*2 = 14$

$A = 7$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$y^*(x) = 7x^2e^{6x}$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$y = \bar{y} + y^*(x) = (C_1 + C_2 x)e^{6x} + 7x^2e^{6x}$

Пример 5.15. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2,$

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$y'' - 2y' = 0.$

Составляем характеристическое уравнение

$k^2 - 2k = 0.$

$k(k-2) = 0$

$k_1 = 0 ___ k_2 = 2$

Полученное квадратное уравнение имеет действительные корни: $k_1=0$, $k_2=2$. Следовательно, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$\bar{y} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{2 \cdot x}.$

$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2 \cdot x}$

Найдем теперь частное решение $\overline{y}$ неоднородного уравнения. Оно будет иметь такой же вид, как и правая часть неоднородного уравнения: f(x) $= 6 + 12x - 24x^2$, т.е. решение будем искать в виде $f(x) = e^{ax} P(x)$ $k_1=0=a$ однократный корень характеристического уравнения

$y^*(x) = e^{0x}(Ax^2 + Bx + c) * x^1$

$y^*(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx).$

Находя производные этой функции

$y^{*'}(x) = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y^{*''}(x) = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)' = 6Ax + 2B$

и подставляя их в исходное уравнение, получим

$y''^* - 2y'^* = 6 + 12x - 24x^2$

$6Ax + 2B - 2 \cdot \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 6 + 12x - 24x^2$

$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = 6 + 12x - 24x^2$

$-6Ax^2 + x*(-4B + 6A) + (2B - 2C) = 6 + 12x - 24x^2$

Найдем неизвестные коэффициенты A, B, C. Для этого сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\left|\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -6A = -24 \\ -4B + 6A = 12 \\ 2B - 2C = 6 \end{array}$$

$A = 4$

$-4B + 6*4 = 12$

$-4B = -12$

$B = 3$

$2*3 - 2C = 6$

$-2C = 0$

$C = 0$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$y^*(x) = 4x^3 + 3x^2$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$y = \overline{y} + y^*(x) = C_1 + C_2 e^{2\cdot x} + 4x^3 + 3x^2$

Пример 5.16. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка: $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,$

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$y'' - 6y' + 25y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 25 = 0$.

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 25 = 36 - 100 = -64$

$$k_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 + 8i}{2} = 3 + 4i$$

$$k_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i$$

Полученное квадратное уравнение имеет комплексные корни: $k_1$=3+4i, $k_2$=3–4i.

$\overline{y}(x) = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения.

Оно будет иметь такой же вид, как и правая часть неоднородного уравнения: $f(x) = 9\sin 4x - 24\cos 4x = e^{0x}(-24\cos 4x + 9\sin 4x)$

a=0+4i не является корнем характеристического уравнения
Следовательно, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y^*(x) = e^{0x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) = (C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$$

$$y^{*'}(x) = \left(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x\right)' = (-4C_1\sin 4x + 4C_2\cos 4x)$$

$$y^{*''}(x) = \left(-4C_1\sin 4x + 4C_2\cos 4x\right)' = -16C_1\cos 4x - 16C_2\sin 4x)$$

и подставляя их в исходное уравнение, получим

$$y^{*''}(x) - 6y^{*'}(x) + 25y^*(x) = 9\sin 4x - 24\cos 4x$$

$$-16C_1\cos 4x - 16C_2\sin 4x - 6*(-4C_1\sin 4x + 4C_2\cos 4x) +$$

$$+ 25*(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) = 9\sin 4x - 24\cos 4x$$

$$-16C_1\cos 4x - 16C_2\sin 4x + 24C_1\sin 4x - 24C_2\cos 4x + 25*C_1\cos 4x + 25C_2 s$$

$$= 9\sin 4x - 24\cos 4x$$

$$9C_1\cos 4x + 9C_2\sin 4x + 24C_1\sin 4x - 24C_2\cos 4x = 9\sin 4x - 24\cos 4x$$

$$\cos 4x*(9C_1 - 24C_2) + \sin 4x(9C_2 + 24C_1) = 9\sin 4x - 24\cos 4x$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 4x & (9C_1 - 24C_2) = -24 \\ \sin 4x & (9C_2 + 24C_1) = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 4x & C_2 = 1 + \dfrac{3}{8}C_1 \\ \sin 4x & 9\left(1 + \dfrac{3}{8}C_1\right) + 24C_1 = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 4x & C_2 = 1 + \dfrac{3}{8}C_1 \Rightarrow C_2 = 1 + \dfrac{3}{8}*0 = 1 \\ \sin 4x & \dfrac{27}{8}C_1 + 24C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{array}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^*(x) = (0\cos 4x + 1\sin 4x) = \sin 4x$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \overline{y} + y^*(x) = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + \sin 4x$$

Пример 5.18. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$. Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 2k = 0$.

$k(k+2) = 0$

$k_1 = 0 ___ k_2 = -2$

Полученное квадратное уравнение имеет действительные корни: $k_1$=0, $k_2$=-2. Следовательно, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$\bar{y} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-2 \cdot x}$.

$\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-2 \cdot x}$

Найдем теперь частное решение $\overline{y}$ неоднородного уравнения. Оно будет иметь такой же вид, как и правая часть неоднородного уравнения:

$f(x) = -2e^x(\sin x + \cos x) = e^{1x}(-2\cos x - 2\sin x)$

$y^*(x) = e^{1x}(A\cos x + B\sin x)$.

$y^{*'}(x) = \left(e^{1x}(A\cos x + B\sin x)\right)' =$

$= e^{1x}(A\cos x + B\sin x) + e^{1x}(-A\sin x + B\cos x) =$

$= e^{1x}(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x)$

$y^{*''}(x) = \left(e^{1x}(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x)\right)' =$

$= e^{1x}(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x) +$

$+ e^{1x}(-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x) =$

$= e^{1x}(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x -$

$- A\cos x - B\sin x) = e^{1x}(-2A\sin x + 2B\cos x)$

и подставляя их в исходное уравнение, получим

$y^{*''}(x) + 2y^{*'}(x) = -2e^x(\sin x + \cos x)$

$e^{1x}(-2A\sin x + 2B\cos x) + 2 * e^{1x}(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x) =$

$= -2e^x(\sin x + \cos x)$

$$e^{1x}(-2A\sin x+2B\cos x+2A\cos x+2B\sin x-2A\sin x+2B\cos x)=-2e^{x}(\sin x$$

$$-4A\sin x+4B\cos x+2A\cos x+2B\sin x=-2\sin x-2\cos x$$
$$(-4A+2B)\sin x+(2A+4B)\cos x=-2\sin x-2\cos x$$
$$\begin{cases}(-4A+2B)=-2\\(2A+4B)=-2\end{cases}$$
$$\begin{cases}(-4A+2B)=-2\\6B=-4\end{cases}$$
$$\begin{cases}(-4A+2B)=-2\\B=-2/3\end{cases}$$
$$\begin{cases}(-4A+2*(-2/3))=-2\Rightarrow -4A=-2+4/3\Rightarrow -4A=-2/3\Rightarrow A=-1/6\\B=-2/3\end{cases}$$

$$y^{*}(x)=e^{1x}(\frac{-1}{6}\cos x-\frac{2}{3}\sin x)$$
$$y=\overline{y}+y^{*}(x)=C_1+C_2e^{-2\cdot x}+e^{1x}(\frac{-1}{6}\cos x-\frac{2}{3}\sin x)$$

Пример 5.19. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка: Найти общее решение линейного дифференциального уравнения методом вариации постоянных (методом Лагранжа):

$$y''-4y'+5y=\frac{1}{\cos x}e^{2x}.$$

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''-4y'+5y=0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$k^2-4k+5=0.$$
$$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5=16-20=-4$$
$$k_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{4+\sqrt{-4}}{2}=\frac{4+2i}{2}=2+1i$$
$$k_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{4-\sqrt{-4}}{2}=\frac{4-2i}{2}=2-1i$$

$\bar{y} = e^{2x}\left(C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x\right)$ Общее решение однородного уравнения

Найдем частное решение неоднородного уравнения

Рассмотрим правую часть исходного уравнения

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} e^{2x}$$

Решим задание через вронскиан

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

Так как $y = e^{2x}\left(C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x\right)$, то выражения принимают значения

$$\begin{cases} y_1 = e^{2 \cdot x} \cos 1x \\ y_2 = e^{2 \cdot x} \sin 1x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = e^{2 \cdot x}(2\cos x - \sin x) \\ y_2' = e^{2 \cdot x}(2\sin x + \cos x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' e^{2 \cdot x} \cos x + C_2' e^{2 \cdot x} \sin x = 0 \\ C_1' e^{2 \cdot x}(2\cos x - \sin x) + C_2' e^{2 \cdot x}(2\sin x + \cos 2x) = \dfrac{1}{\cos x} e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1'(2\cos x - \sin x) + C_2'(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1' \dfrac{cosx}{\sin x} \\ C_1'(2\cos x - \sin x) - C_1' \dfrac{cosx}{\sin x}(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1' \dfrac{cosx}{\sin x} \\ C_1' \dfrac{((2\cos x \sin x - \sin^2 x - (2\sin x \cos x + \cos^2 x))}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1' \dfrac{cosx}{\sin x} \\ C_1' \dfrac{(2\cos x \sin x - \sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x)}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1' \dfrac{cosx}{\sin x} \\ C_1' \dfrac{(-\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1' \dfrac{cosx}{\sin x} \\ C_1' \dfrac{(-1)}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -C_1' \dfrac{cosx}{\sin x} \\ C_1' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = -\dfrac{-\sin x}{\cos x} * \dfrac{cosx}{\sin x} \\ C_1' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = 1 \\ C_1' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = \int 1dx = x + B \\ C_1 = \int \dfrac{-\sin x}{\cos x} dx = \int \dfrac{d\cos x}{\cos x} = \ln\left|\cos x\right| + A \end{cases}$$

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 1x + C_2 \sin 1x\right)$$
$$y = e^{2x}\left(\left(\ln|\cos x| + A\right)\cos x + \left(x + B\right)\sin x\right)$$

Пример 5.20. Найти решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y, \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 3 \\ 2 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2\cdot 3 = 0$$

$$4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 25 + 8 = 33$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)\cdot \alpha_1 + 3 \cdot \beta_1 = 0 \\ 2 \cdot \alpha_1 + \left(4 - \dfrac{5 + \sqrt{33}}{2}\right) \cdot \beta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{-3-\sqrt{33}}{2}\right)\cdot\alpha_1+3 \quad \cdot\beta_1=0 \\ 2 \quad \cdot\alpha_1+\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right) \quad \cdot\beta_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}745\cdot\alpha_1+6 \quad \cdot\beta_1=0 \\ 2{,}745\cdot\alpha_1+6 \quad \cdot\beta_1=0 \end{cases}$$

$$2{,}745\cdot\alpha_1+6 \quad \cdot\beta_1=0$$

$$\alpha_1=-2{,}19\beta_1$$

$$\begin{cases} \alpha_1=-2{,}19 \\ \beta_1=1 \end{cases}$$

$$\lambda_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$$

$$\begin{cases} \left(1-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\cdot\alpha_2+3 \quad \cdot\beta_2=0 \\ 2 \quad \cdot\alpha_2+\left(4-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right) \quad \cdot\beta_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right)\cdot\alpha_2+3 \quad \cdot\beta_2=0 \\ 2 \quad \cdot\alpha_2+\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right) \quad \cdot\beta_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-3+\sqrt{33}\right)\cdot\alpha_2+6 \quad \cdot\beta_2=0 \\ 4 \quad \cdot\alpha_2+\left(3+\sqrt{33}\right) \quad \cdot\beta_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8{,}745\cdot\alpha_2+6 \quad \cdot\beta_2=0 \\ -8{,}745\cdot\alpha_2+6 \quad \cdot\beta_2=0 \end{cases}$$

$$-8{,}745\cdot\alpha_2+6 \quad \cdot\beta_2=0$$

$$\alpha_2=0{,}69\beta_2$$

$$\beta_2 = 1$$
$$\alpha_2 = 0{,}69$$

$$\begin{cases} x = -2{,}19 \quad \cdot e^{\frac{5+\sqrt{33}}{2}} \qquad C_1 + 1 \quad \cdot e^{\frac{5-\sqrt{33}}{2}} \qquad C_2 \\ y = 0{,}69 \quad \cdot e^{\frac{5+\sqrt{33}}{2}} \qquad C_1 + 1 \quad \cdot e^{\frac{5-\sqrt{33}}{2}} \qquad C_2 \end{cases}$$

Пример 5.21. Найти решение системы дифференциальных уравнений: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t \end{cases} \qquad y = \frac{\dfrac{dx}{dt} - 2x - \cos t}{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} - \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + \sin t = +4\dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + \sin t = +4 \cdot \left(-x - 2y + \sin t\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + \sin t = +4 \cdot \left(-x - 2y + \sin t\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+\sin t=+4\cdot\left(\dfrac{-x-2\dfrac{dx}{dt}-2x-\cos t}{4}+\sin t\right) \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+\sin t=-4x-2\dfrac{dx}{dt}+4x+2\cos t+4\cdot\sin t \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+\sin t+4x+2\dfrac{dx}{dt}-4x-2\cos t-4\cdot\sin t=0 \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}-2\cos t-3\cdot\sin t=0 \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=2\cos t+3\cdot\sin t \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\int\left(2\cos t+3\cdot\sin t\right)dt \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2\sin t-3\cdot\cos t+C_1 \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\int\left(2\sin t-3\cdot\cos t+C_1\right)dt \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-2y+\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2\cos t - 3\cdot\sin t + C_1 t + C_2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

$$y = \frac{\dfrac{dx}{dt} - 2x - \cos t}{4}$$

$$y = \frac{\left(2\sin t - 3\cdot\cos t + C_1\right) - 2\cdot\left(-2\cos t - 3\cdot\sin t + C_1 t + C_2\right) - \cos t}{4}$$

$$y = \frac{2\sin t - 3\cdot\cos t + C_1 + 4\cos t + 6\cdot\sin t - 2C_1 t - 2C_2 - \cos t}{4}$$

$$y = \frac{8\sin t + C_1 - 2C_1 t - 2C_2}{4}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -2\cos t - 3\cdot\sin t + C_1 t + C_2 \\ y = \dfrac{8\sin t + C_1 - 2C_1 t - 2C_2}{4} \end{cases}$$

Пример 5.22.

Найти функцию дохода $Y = Y(t)$, если известно, что величина потребления задаётся функцией $C = C(t)$, коэффициент капиталоёмкости прироста дохода $b$, $y_0$.

| № задачи | $C = C(t)$ | $b$ | $y_0$ |
|---|---|---|---|
| 220 | C=3t | 0,4 | 3 |

Найти функцию дохода $Y = Y(t)$, если известно, что величина потребления задаётся функцией $C = 3t$, коэффициент капиталоёмкости прироста дохода $b = 0.4$, $Y(0) = 3$.

Решение:

Известно, что функция дохода равна

$Y(t) = I(t) + C(t)$,

где $I(t)$ – сумма инвестиций, $C(t)$ – величина потребления.

А также имеет место дифференциальное уравнение

$bY'(t) = I(t)$,

где $b$ – коэффициент капиталоёмкости прироста дохода. По условию задачи составим дифференциальное уравнение:

$Y(t) = 0.4Y'(t) + 3t$, или $0.4y'(t) - y(t) = -3t$

$y'(t) - 2{,}5y(t) = -7{,}5t$

Итак, функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Будем искать его решение в виде $Y(t) = u(t)v(t)$.

Тогда $y' = u'v + v'u$, подставим в уравнение $u'v + v'u - 2{,}5uv = -7{,}5t$

1) $u(v' - 2{,}5v) = 0$

$\frac{dv}{v} = 2{,}5dt$

$\ln v = 2{,}5t$

$v = e^{2{,}5t}$

$u = 3te^{-2{,}5t} + \frac{3}{2.5}e^{-2{,}5t} + C$

2) $u'v = -7{,}5t$

$u'e^{2{,}5t} = -6t$

$\int du = -\int 7{,}5te^{-2{,}5t}dt$

$u = -7{,}5(t\frac{e^{-2{,}5t}}{-2{,}5} - \int \frac{e^{-2{,}5t}}{-2{,}5}dt)$

$u = 3te^{-2{,}5t} + \frac{6}{5}e^{-2{,}5t} + C$

$u = 3te^{-2{,}5t} + 1.2e^{-2{,}5t} + C$

Общее решение $y = uv$ или $y = Ce^{2.5t} + 3t + 1.2$

Используя начальные условия $Y(0) = 3$, найдём $C$:

$3 = Ce^{2.5*0} + 3*0 + 1.2$

$3 = C + 1.2$ или $C = 1.8$.

Итак, функция дохода имеет вид $y = 1.8e^{2.5t} + 3t + 1.2$.

## Раздел II ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

***Вариант 1***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x+2}{2x^2-7x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+2x+1}-5x)$,

**в)** $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{2x+7}-5}$, **г)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \operatorname{tg}^2(x/3)}{\cos 2x \sin^3(2x)}$,

**д)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+3x-5}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x-2}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$, **б)** $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$,

**в)** $y=\log_5\left(3^{-x}-\operatorname{tg}\sqrt{1-x^2}\right)$, **г)** $y=(2+\ln x)^{\sin x}$,

**д)** $\operatorname{tg}(x/y)=3x^2+4y^2+6xy.$ **е)** $x=\cos(t^2),\quad y=\sin(t^2)$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2+\dfrac{x}{2}$ на отрезке [–3;3].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{1-2x}{x^2}.$$

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)** $z=2xy-\operatorname{tg}x+\sqrt{y}$, **б)** $z=\dfrac{\cos(2x)}{1+y^2}$, **в)** $z=(1+\operatorname{ctg}y)^{\sqrt{x}}$.

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int \frac{\cos(3+4\ln x)}{4x}dx$ **б)** $\int x^3\sqrt{9+3x^4}\,dx,$

**в)** $\int (4-5x)e^{8x}dx,$ **г)** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx,$

**д)** $\int \frac{7dx}{(x-2)^2(x+5)},$ **е)** $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int_1^8 \frac{96-160\sqrt[3]{x}}{x^2}dx,$ **б)** $\int_0^4 \frac{3xdx}{\sqrt{9-2x}},$ **в)** $\int_{-\pi/2}^{\pi} 9x\sin 3x dx.$

***Вариант 2***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+8x+5}{5x^2+4x+10},$ **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{36x^2+8x+9}-6x),$

**г)** $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{\sqrt{4x+21}-3},$ **д)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x\cdot \sin^2(x/4)}{\operatorname{tg}(2x^2)},$

**в)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2},$ **е)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{4x-5}.$

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y=(\sqrt[3]{x^2}+1)\sqrt{x^3+4},$ **б)** $y=\frac{4\sin x}{\cos^2 x},$

**в)** $y=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}},$ **г)** $y=(\operatorname{ctg}x)^{3x-1},$

**д)** $\sin(xy)=x^2+\operatorname{arctg}y,$ **е)** $x=\operatorname{ctg}t,\quad y=1/\cos^2 t.$

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 + 8x^2 - 9$ на отрезке [0;3].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y = \frac{2x}{4x^2 - 1}.$$

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)** $z = \frac{x^3}{6} - \operatorname{ctg}(xy) + \frac{1}{\sqrt{y}}$, **б)** $z = \frac{\sin(y^3)}{x^4}$, **в)** $z = (\cos x)^{\ln y}$.

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int \frac{\sin(2 + 3\ln x)}{x} dx$, **б)** $\int x^2 \sqrt{2 + 3x^3}\, dx$,

**в)** $\int (2x + 1)\sin 2x dx$, **г)** $\int (4x + 1)\ln x dx$,

**д)** $\int \frac{x + 2}{x^2(x + 1)} dx$, **е)** $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int_1^4 \frac{42x - 14x^3}{\sqrt{x}} dx$, **б)** $\int_1^5 \frac{\sqrt{11}\, dx}{x\sqrt{11 - 2x}}$, **в)** $\int_{\pi/2}^{\pi} 2x \cos$

***Вариант 3***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 6x - 7}$, **б)** $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 8x})$,

**г)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 2x - 2)(3x - 2)}{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$, **д)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x/2) \cdot \operatorname{tg} 3x}{\arcsin 6x \cdot \sin 5x}$,

**в)** $\lim\limits_{x\to 3}\ \dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$,  **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-2}{9x+1}\right)^{2x+5}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{1-x}$,  **б)** $y=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$,

**в)** $y=\log_2\operatorname{tg}\log_3(x-\cos x)$,  **г)** $y=(2-\sqrt{x})^{\cos x}$,

**д)** $xe^{3y}+ye^{-4x}=\ln(x^2+y^2)$,  **е)** $x=\operatorname{tg}t,\quad y=1/\sin^2 t$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x+\dfrac{4}{x}$ на отрезке [1;4].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{(x+1)^2}{x^2}.$$

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)** $z=\dfrac{x^3}{6}-\operatorname{ctg}(xy)+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$,  **б)** $z=\dfrac{\sin(y^3)}{x^4}$,  **в)** $z=(\cos x)^{\ln y}$.

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int\dfrac{e^{3\operatorname{tg}x+5}}{\cos^2 x}dx$,  **б)** $\int x^5\sqrt{2+7x^6}\,dx$,

**в)** $\int(4x+5)e^{-3x}dx$,  **г)** $\int(3x^2-2x)\ln x\,dx$,

**д)** $\int\dfrac{1-x}{(x+1)^2 x}dx$,  **е)** $\int\dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int\limits_{1}^{16} 48\,\frac{3x+5\sqrt[4]{x}}{x^2}\,dx$, **б)** $\int\limits_{0}^{6} \frac{3x\,dx}{\sqrt{16-2x}}$, **в)** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin\frac{x}{3}\,dx$.

***Вариант 4***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to 4}\ \frac{x^2-3x-4}{1-\sqrt{9-2x}}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2+3x+16}-7x)$,

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+7)(3x^2+3x+1)}{2x^3+4x+5}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)\cdot \mathrm{tg}(x/2)}{x^2\sin(x/3)}$,

**в)** $\lim\limits_{x\to -1}\ \frac{4x^2+3x-1}{3x^2+2x-1}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-7}{3x+2}\right)^{4x+3}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y=\frac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$, **б)** $y=\sin 3x-x\cos 2x$,

**в)** $y=\sqrt{2+\ln(1-\mathrm{ctg}\,2x)}$, **г)** $y=(1-\ln x)^{\sqrt{x}}$,

**д)** $\cos(xy)=y^3+\arcsin x$, **е)** $x=1-\cos t,\quad y=t-\sin^2 t$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^4/2+x^3-x^2+2$ на отрезке [–3;1].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$y=e^{-x^2+8x-14}$.

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)** $z = \operatorname{ctg}(xy) - \frac{1}{\sqrt{x}} + e^{-2y^2}$, **б)** $z = \frac{x^4}{\cos 3y}$, **в)** $z = (1-3^y)^{\ln x}$.

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int \frac{\operatorname{ctg}(2+5\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} dx$, **б)** $\int x^4 \sqrt{5+8x^5}\, dx$,

**в)** $\int (2x-1)\cos 3x\, dx$ **г)** $\int \ln(3x+8) dx$,

**д)** $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x+2)} dx$, **е)** $\int \sin^2 4x dx$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int_1^4 \frac{3x^2-9x}{\sqrt{x^3}} dx$, **б)** $\int_1^{10} \frac{\sqrt{6}\, dx}{2x\sqrt{6+3x}}$, **в)** $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{4} dx$.

***Вариант 5***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+6x+9}{7x^2+6x+1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{81x^2+4x+9}-9x)$

**г)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+5x+4}{\sqrt{7-2x}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg}(x/3)}{\operatorname{tg}^2(x/4)}$,

**в)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{2x^2+x-10}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^{5x-2}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}}$, **б)** $y = \sin^2 x(2+3\cos^2 x)$,

**в)** $y = \ln\left(\frac{1}{x} + \operatorname{tg} e^{\sin x}\right)$, **г)** $y = (1+\sin x)^{\ln x}$,

**д)** $1 + x^3 + y^3 = e^{x^2+y^2}$, **е)** $x = 2^{-t}, \quad y = 2^{3t}$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ на отрезке [–6;–1].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$y = xe^{-x^2/2}$.

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)** $z = x^7 - \cos(2xy) + \sqrt{y^3}$, **б)** $z = \frac{e^{1/x}}{y^2}$, **в)** $z = (\cos x)^{\operatorname{ctg} y}$.

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int \frac{\sin 5x}{9 + \cos^2 5x} dx$, **б)** $\int x^8 \sqrt{3 + 5x^9}\, dx$,

**в)** $\int (7x+6)e^{x/2} dx$, **г)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$,

**д)** $\int \frac{52\ dx}{(x^2+1)(x+5)}$ **е)** $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int_1^8 64 \frac{3x - 5\sqrt[3]{x^2}}{x^3} dx$, **б)** $\int_0^3 \frac{27x\,dx}{\sqrt{25-3x}}$, **в)** $\int_{\pi/2}^{\pi} 4x \sin 2x\, dx$.

***Вариант 6***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+18}{8x^2+5x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2+3x+4}-7x)$,

**г)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{2x+3}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cdot\sin(x/4)}{\operatorname{tg}^2(3x^2)}$,

**в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{2x^2-5x+2}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-5}\right)^{4x+5}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^5}}$, **б)** $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$,

**в)** $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x+\ln\cos x}$, **г)** $y=(1+\sqrt{x})^{\operatorname{tg} x}$,

**д)** $e^{x/y}=x^5-y^5$, **е)** $x=\operatorname{arctg} t,\quad y=t^2$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2-9x+1$ на отрезке [–1;2].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$y=(1+x)e^{x+2}$.

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)** $z=e^{xy}+\operatorname{tg} x^3+\sqrt[4]{y}$, **б)** $z=\dfrac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{x}}$, **в)** $z$

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int\sin 2x e^{2-3\cos 2x}dx$, **б)** $\int x^7\sqrt{2x^8-9}dx$,

**в)** $\int(4x-3)\sin\dfrac{x}{2}dx$, **г)** $\int(4x^3+1)\ln x dx$,

**д)** $\int \frac{49x^2}{(x+2)^2(x-1)}dx$, **е)** $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int_1^8 \frac{60x-50}{\sqrt[3]{x}}dx$, **б)** $\int_1^4 \frac{\sqrt{7}\,dx}{x\sqrt{28-3x}}$, **в)** $\int_{\pi/4}^{\pi} 72x\cos 6x\,dx$.

***Вариант 7***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{x+4}-1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{64x^2+7x+4}-8x)$,

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(3x^2+5x+2)(2x+1)}{4+8x^2-5x^3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x\cdot \mathrm{tg}^2(x/2)}{x\cdot \sin^2(2x)}$,

**в)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x+9}{4x+1}\right)^{9x-5}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y=\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{1-x^2}$, **б)** $y=\sin(x^2)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$,

**в)** $y=10^{x^2+\ln \mathrm{ctg}\sqrt{x}}$, **г)** $y=(\mathrm{tg}\,x)^{1/x}$,

**д)** $x^2\ln y=\cos(x^3+y^3)$, **е)** $x=\log_2 t,\quad y=t^3$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{x^2+4}{x}$ на отрезке [1;4].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)** $z = \frac{6}{x^3} - \operatorname{ctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{y^5}}$, **б)** $z = \frac{\sin\sqrt{y}}{1+x}$, **в)** $z = (\cos 2x)^{1/y}$

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int \frac{e^{3-8\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,dx$, **б)** $\int x^4\sqrt{2x^5-7}\,dx$,

**в)** $\int (4-6x)e^{-x/3}dx$, **г)** $\int (2x+5x^4)\ln x\,dx$,

**д)** $\int \frac{25x+50}{(x+3)^2(x-2)}dx$ **е)** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}\,dx$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int\limits_1^{16} \frac{3-2\sqrt[4]{x^3}}{2x}dx$, **б)** $\int\limits_0^6 \frac{3x\,dx}{\sqrt{4+2x}}$, **в)** $\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{2}\,x\sin\frac{x}{2}dx$.

***Вариант 8***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{13-x}-4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x})$,

**г)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(3x^2-2x+3)(2x+1)}{2x^3+7x^2+6x+4}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}^2(x/5)}{\arcsin^3(2x)}$,

**в)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-7x+2}{x^2-5x+6}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{6x-2}{6x+5}\right)^{4x+3}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y = \dfrac{3\sqrt[3]{x^3 + 5x^4 - 5}}{x}$, **б)** $y = (1 + \sin 2x)\arccos x$,

**в)** $y = \sqrt{1 + \ln(1 + \operatorname{tg} 3x)}$, **г)** $y = (1 + \ln x)^{x^2}$,

**д)** $xe^{3y} - ye^{-4x} = x^2 + y^2$, **е)** $x = 1/t, \quad y = e^t$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке [0;4].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)**

$$z = \operatorname{tg}(4xy) - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + e^{\frac{-y^2}{4}}, \quad \textbf{б)}\ z = \frac{1 + x^3}{\cos 6y}, \quad \textbf{в)}\ z = (\ln x)^{\sin y}.$$

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int \dfrac{e^{3-8\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,dx$, **б)** $\int x^4\sqrt{2x^5 - 7}\,dx$,

**в)** $\int (4 - 6x)e^{-x/3}\,dx$, **г)** $\int (2x + 5x^4)\ln x\,dx$,

**д)** $\int \dfrac{25x + 50}{(x+3)^2(x-2)}\,dx$, **е)** $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^7 x}\,dx$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int\limits_1^{16} \frac{3-2\sqrt[4]{x^3}}{2x}\,dx$, **б)** $\int\limits_0^{6} \frac{3x\,dx}{\sqrt{4+2x}}$, **в)** $\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{2}x\sin\frac{x}{2}\,dx$.

***Вариант 9***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^2+2x+12}{4x^2+2x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{9x^2+4x+25}-3x)$,

**в)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4x^2-5x-21}{2x^2-x-15}$, **г)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{\sqrt{5x+1}-4}$,

**д)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^2(3x)\sin(x/2)}{x^2\cdot\sin(2x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{8x+3}{8x+2}\right)^{5x-2}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y=\frac{5\sqrt[5]{x^2-x+3}}{x}$, **б)** $y=2^x e^{-3x}$,

**в)** $y=\log_7\left(2^x-\mathrm{ctg}\sqrt{1+x}\right)$, **г)** $y=(\ln x)^{\cos x}$,

**д)** $\arcsin y=\ln(1+xy)-x$, **е)** $x=\cos(t/2),\quad y=t-\sin t$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на отрезке [–1;1].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=x^2-\frac{2}{x}.$$

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)** $z = xy^2 - \operatorname{tg}\dfrac{x}{3} + \sqrt{y^7}$, **б)** $z = \dfrac{\sin(4x)}{y^2 - 4}$, **в)** $z = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{y}}$.

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int \dfrac{\operatorname{ctg}(3\ln x - 7)}{x}\,dx$ **б)** $\int x^4\sqrt{7x^5 - 6}\,dx$,

**в)** $\int (4x+5)e^{x/2}dx$, **г)** $\int \dfrac{\ln x}{x^3}\,dx$,

**д)** $\int \dfrac{x\,dx}{(x-3)^2(x-2)}$ **е)** $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int\limits_1^{16} \dfrac{6 - 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, **б)** $\int\limits_0^4 \dfrac{147x\,dx}{\sqrt{36+7x}}$, **в)** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi} 8x\sin 4x\,dx$.

***Вариант 10***

**1.** Вычислить пределы:

**а)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 + 9x + 2}{4x^2 + 3x + 1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2 + 9x + 4} - 2x)$,

**г)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{\sqrt{7x-2} - 3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x \cdot \operatorname{tg}(x/3)}{\operatorname{tg}^2(x/4)}$,

**в)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 + x - 10}$,

**е)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{8x+1}$.

**2.** Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

**а)** $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, **б)** $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}\cos 4x$,

**в)** $y = \log_3 \log_5 \operatorname{ctg}\left(x + \sqrt{\sin x}\right)$, **г)** $y = (1+\sqrt{x})^{\cos x}$

**д)** $\sin(x/y) = x^2 - y^3$, **е)** $x = 1/\sin^2 t, \quad y = \operatorname{tg} t$.

**3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x^2 - 2x)^2$ на отрезке [0;3].

**4.** Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$y = x\,(\ln x + 1)$.

**5.** Найти все частные производные 1-го порядка:

**а)**

$z = \sin(xy) + \dfrac{1}{x^5} + \lg y$, **б)** $z = \dfrac{\operatorname{ctg}(x^5)}{\sqrt[3]{y^2}}$, **в)** $z = (1+\ln x)^{1/y}$.

**6.** Вычислить неопределенные интегралы:

**а)** $\int \dfrac{\operatorname{tg}(3\ln x - 5)}{x}\,dx$, **б)** $\int x^6\sqrt{2x^7 - 3}\,dx$,

**в)** $\int (2+7x)\sin 4x\,dx$, **г)** $\int (4-9x)\ln x\,dx$

**д)** $\int \dfrac{25(x-3)}{(x-4)^2(x+1)}\,dx$, **е)** $\int \dfrac{dx}{\cos^4 2x}$.

**7.** Вычислить определенные интегралы:

**а)** $\int\limits_1^8 \dfrac{10 - 15x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, **б)** $\int\limits_1^6 \dfrac{\sqrt{3}\,dx}{x\sqrt{12+4x}}$, **в)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 18x\cos 3x\,dx$.

**Образец заданий аудиторной контрольной работы №1**

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{13-x}-4}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x})$,

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-5x+6}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-2x+3)(2x+1)}{2x^3+7x^2+6x+4}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x\cdot \mathrm{tg}^2(x/5)}{\arcsin^3(2x)}$,

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{6x-2}{6x+5}\right)^{4x+3}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & \text{если } x<1,\\ 2, & \text{если } x=1,\\ 5-2x, & \text{если } 1<x\le 3,\\ 2^{x-4}, & \text{если } 3<x\le 6,\\ \ln(x-6), & \text{если } x>6. \end{cases}$$

**3.** . Задана функция y = f(x) и два значения аргумента $x_1$ и $x_2$. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

$f(x) = 8^{1/(5-x)}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

**Образец заданий аудиторной контрольной работы №2**

1. Найти производные dy/dx данных функций:

1) $y=\dfrac{3\sqrt[3]{x^3+5x^4-5}}{x}$,

2) $y = (1+\sin 2x)\arccos x,$

3) $y = (1+\ln x)^{x^2}$

4) $xe^{3y} - ye^{-4x} = x^2 + y^2$

5) $y = \sqrt{1+\ln(1+\operatorname{tg} 3x)}$

6) $x = 1/t, \quad y = e^t$

2. Найти dy/dx и $d^2y/dx^2$ для заданных функций:

1) $y = x^3 \ln x$ ;
2) $y = \operatorname{arctg} e^{4x}$ ;
3) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x - 2\sqrt{x}$$

на отрезке [0;4].

4. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3},$ б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{1/\ln(2x-2)}..$

5. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

**Образец заданий аудиторной контрольной работы №3**

1. Найти все частные производные 1–го порядка:

1) $z = \operatorname{tg}(4xy) - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} + e^{\frac{-y^2}{4}},$

2) $z = \dfrac{1+x^3}{\cos 6y},$

3) $z = (\ln x)^{\sin y}$

2. Дана функция $z = x \cdot e^{xy}$. Показать, что

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции
$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x$ в замкнутой области D:
$x \le 0,\ y \le 0,\ x + y + 2 \le 0$.

4. Дана функция $z = \ln\left(3x^2 + 4y^2\right)$, точка A(1;3) и вектор $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.
Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора a.

5. Вычислить неопределенные интегралы

$$\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}\, dx}{x};$$

б) $\int x \ln^2 x\, dx;$

в) $\int \frac{(x^3 - 6)\, dx}{x^4 + 6x^2 + 8};$

г) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 2};$

д) $\int \frac{(x + 1)\, dx}{x\sqrt{x + 2}};$

е) $\int \frac{(x - 2)\, dx}{x^2 + 2x + 2}$

6. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

**Образец заданий аудиторной контрольной работы №4**

1. Найти общий или частный интеграл (решение) дифференциального уравнения первого порядка:

а) $y'y \cdot \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - y^2}} + 1 = 0,$

б) $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi},$

в) $(104y^3 - x)y' = 4y, \quad y\big|_{x=8} = 1,$

г) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y,$

д) $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x), \quad y(0) = 1,$

е) $\left[\sin 2x - 2\cos(x + y)\right]dx - 2\cos(x + y)dy = 0.$

2. Найти частный интеграл (решение) дифференциального уравнения, допускающего понижения порядка:

$$4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5,$$

4. Исследовать на сходимость следующие числовые ряды (для знакочередующихся рядов провести еще исследование на абсолютную и условную сходимость):

а) $\frac{5}{8} + \frac{11}{15} + \frac{17}{22} + \frac{23}{29} + \ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n} + 4}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+11}{3n+7}\right)^{n^2}$,

г)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n^2 + 4)5^n}{(n+6)!}.$$

5. Найти радиус и интервал сходимости следующего степенного ряда, а также исследовать его на сходимость на концах интервала:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{(n^3+8)2^n}.$$

6. Разложите данную функцию f(x) в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0$ (выпишете первых три ненулевых члена ряда):

$$f(x) = \sqrt{x}\ln x, \quad x_0 = 1.$$

***Задачи Приложения математического анализа в экономике***

***З а д а ч а 1.***

*Задача на экономические приложения производных функций одной переменной.*

1. Поступления от реализации производственной продукции x выражаются функцией $f(x) = 9x - x^2$, а затраты, связанные с производством продукции в количестве $x$, записываются функцией $C = -6x^2 + 13x - 18$. Определите оптимальный объем производства, обеспечивающий максимум прибыли.
2. Найти эластичность функции спроса $D = 300 - 5p$ по цене и эластичность функции предложения $S = 60 + 5p$ по цене при $p_1 = 20$. Определить, на сколько процентов изменятся спрос и предложение, если цена увеличится на 5%..
3. Затраты, связанные с производством продукции, определяются функцией $Y = -480x + 8x^2 + 12000$. Определите объем производства, обеспечивающий минимальные затраты. Дайте экономическое истолкование результату.
4. Объем $x$ выпущенной продукции и выручка $U(x)$, полученная от реализации, заданы функцией $U = 10x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{15}x^3$. Найдите, при каком объеме продукции выручка минимальна. Вычислите предельную выручку.
5. Цена на товар составляет 250 руб., издержки производства этого товара равны $120x + x^2$, где $x$ - число единиц произведенного товара. Найти, при каком количестве товара функция прибыли принимает максимальное значение.
6. Издержки производства продукции определяются функцией $5x^2 + 80x$, где $x$ - число единиц произведенной за месяц продукции. Продукция продается по цене 280 руб. за изделие. Сколько изделий нужно произвести и продать, чтобы прибыль была максимальна?
7. Количество произведенной *за день* продукции $Q(x)$ зависит от числа рабочих в сборочном цехе следующим образом: $Q(x) = 100x + 3x^2$, где $x$ - число рабочих. Вычислить значение прироста выработки *за неделю*, вызванное добавлением одного рабочего.
8. Вычислить предельную выручку, если известны уравнение

спроса $10q + p - 100 = 0$ и значение цены $p = 80$ на продукцию ($q$ - количество продукции, $p$ - цена продукции). Что она показывает?

9. . Производитель реализует продукцию по цене $2$ ден. ед. за единицу, а общие издержки равны $C(x) = 2 + 3x - x^2$ ден. ед., где $x$ - количество продукции. Известно, что наибольшая прибыль достигается при выпуске 0,5 ед. продукции. Чему равны полный доход $R(x)$ и общие издержки $C(x)$ при оптимальном плане выпуска продукции?

10. Вычислить предельную выручку, если известно уравнение спроса $\sqrt{q} + 3p - 50 = 0$ и значение цены $p = 10$ на некоторую продукцию ($q$ - количество продукции, $p$ - цена продукции).

11. Вычислить эластичность функции спроса $q = \dfrac{100 - p}{5}$ в точке $p = 50$ ($q$ - количество продукции, $p$ - цена продукции). Дать экономическое истолкование результату. Вычислить процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%.

12. Задана зависимость $6 - 2p - x = 0$, связывающая количество продукции $x$ и цену $p$ товара. Постоянные издержки производства составляют $C = 5$ ден.ед., а переменные затраты на одну единицу продукции равны 2 ден.ед. Запишите функции дохода $R(x)$, общих издержек $C(x)$ и прибыли $PR(x)$. Постройте графики функций $R(x)$, $C(x)$, $PR(x)$.

13. Зависимость спроса от цены выражается формулой $d(p) = 10 - 2p$. Запишите функцию выручки от цены. При каких значениях цены выручка возрастает? Вычислите эластичность спроса на товар по цене $p = 2$, дайте экономическое истолкование.

14. Зависимость спроса от цены выражается формулой $d(p) = 15 + 2p - p^2$. Вычислите эластичность спроса на товар по цене $p = 2$, дайте экономическое истолкование. Постройте график предельного спроса. Запишите функцию выручки от цены. При каких значениях цены выручка убывает?

15. Пусть $y = \dfrac{x}{3 + 2x}$ есть функция Торнквиста спроса потребителей $y$ на товары первой необходимости в зависимости от

дохода $x$. Найдите эластичность $E_x(y)$ при $x=2$, дайте экономическое истолкование полученному результату.

16. Дана функция спроса $D(p)=100\sqrt{4-p}$ от цены товара $p$. Составить функцию выручки. Вычислить эластичность функции спроса в точке $p=150$ и дать экономическое истолкование результату. Как повлияет изменение цены на выручку?

17. Предприятие производит x ед. продукции в месяц и реализует ее по цене $p=25-\frac{1}{30}x$. Суммарные издержки производства составляют $K=\frac{1}{15}x^2+5x+300$. Определите, при каком объеме производства прибыль предприятия будет максимальной.

18. Производитель реализует свою продукцию по цене $p=2-x/2$ ден. ед. за единицу продукции, а издержки задаются функцией $C(x)=2+x$, где $x$ - объем выпущенной продукции. Найдите оптимальный объем выпуска продукции и соответствующую прибыль.

19. Поступления от реализации производственной продукции x выражаются функцией $f(x)=600x-2x^3$, а затраты, связанные с производством продукции x, записываются функцией $c(x)=450x-8x^2-1300$. Определите оптимальный объем производства, обеспечивающий максимум прибыли.

20. Производитель реализует свою продукцию по цене $p=\frac{6-x}{2}$ ден.ед. за единицу продукции, а издержки задаются функцией $C(x)=2+3x-x^2$, где $x$ - объем выпущенной продукции. Найдите оптимальный объем выпуска продукции и соответствующую прибыль.

*Задача на экономические приложения производных функций нескольких переменных*

1. Затраты фирмы по выпуску $x$ изделий первого вида составляют $4x+x^2$ ден.ед., а по выпуску $y$ изделий второго вида $8y+y^2$ ден. ед.

1) Составьте функцию $f(x,y)$ общих затрат на производство всех изделий и вычислите затраты фирмы по выпуску двух изделий первого вида и одного изделий второго вида.

2) Определите вид линий уровня и постройте одну из них при $C = 5$.
3) Вычислите эластичности затрат по каждому виду изделий, если $x = 2,\ y = 1$, и дайте им экономическое истолкование.

2. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).
1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость ед. фактора $K$ равна 4 ден.ед., а стоимость ед. фактора $L$ равна 1 ден.ед.
2) Решите задачу определения максимального выпуска продукции, который может обеспечить фирма, полностью истратив все средства $C = 100$ ден.ед.

3. Предприятие работает по первой технологии $x$ часов и по второй $y$ часов, выпуская за час работы по каждой технологии продукцию стоимостью $3$ ден. ед. и $4$ ден. ед. Производственные расходы за 1 час работы составляют $1$ ден. ед. и $2$ ден. ед.
1) Составьте функции дохода, общих расходов, прибыли и вычислите прибыль фирмы за время работы по первой технологии 2 часа, а по второй 1 час.
2) Определите вид линий уровня функции прибыли и постройте их.
3) Вычислите эластичности функции прибыли по каждой технологии за время работы по первой технологии 2 часа, а по второй 1 час и дайте им экономическое истолкование.

4. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = 2K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).
1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость единицы $K$ равна 1 ден. ед., а стоимость единицы $L$ равна 2 ден. ед.

2) Определите наименьшие издержки при выпуске количества продукции $Q = 40$.

5. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).

1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость единицы $K$ равна 2 ден. ед., а стоимость единицы $L$ равна 4 ден. ед.

2) Найдите максимальный выпуск продукции, который может обеспечить фирма, полностью истратив все имеющиеся средства 60 ден. ед.

6. Дана производственная функция фирмы $f(x, y) = 2x + 3y$, где $x$, $y$ - объемы используемых ресурсов. Известны рыночные цены продукции и ресурсов: $p_0 = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$.

1) Составьте функции дохода $R(x, y)$, издержек $C(x, y)$ и прибыли $PR(x, y)$ и вычислите прибыль фирмы при использовании 2 ед. первого ресурса и 3 ед. второго ресурса.

2) Определите вид линий уровня функции прибыли и постройте ее при $x = 2$, $y = 3$.

3) Вычислите эластичности прибыли по каждому виду ресурсов при $x = 2$, $y = 3$ и дайте им экономическое истолкование.

7. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = 2K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).

1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость единицы $K$ равна 4 ден.ед., а стоимость единицы $L$ равна 4 ден.ед.

2) Определите наименьшие издержки при выпуске 30 единиц продукции.

8. Дана производственная функция фирмы $f(x, y) = x^2 + x + 2y$, где $x$, $y$ - объемы используемых ресурсов. Известны рыночные цены продукции и ресурсов: $p_0 = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$.

1) Составьте функции дохода $R(x, y)$, издержек $C(x, y)$ и прибыли $PR(x, y)$ и вычислите прибыль при использовании 3 ед. первого ресурса и 2 ед. второго ресурса.
2) Определите вид линий уровня функции прибыли и постройте ее при $x = 1,\ y = 2$.
3) Вычислите эластичности прибыли по каждому виду ресурсов при $x = 1,\ y = 2$ и дайте им экономическое истолкование.

9. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).
1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость единицы $K$ равна 1 ден.ед., а стоимость единицы $L$ равна 4 ден. ед.
2) Определите максимальный выпуск продукции, который может обеспечить фирма, полностью истратив все имеющиеся средства $C = 200$ ден.ед.

10. Пусть $Q = 2K^{1/2}L^{1/2}$ - производственная функция фирмы, связывающая ресурсы (капитал $K$, труд $L$) и выпуск продукции $Q$.
1) Сколько единиц продукции выпускает фирма при технологическом способе производства $K$ = 10, $L$ = 40?
2) Постройте изокванту для выпуска продукции объемом Q (10, 40).
3) Найдите эластичности производственной функции при K=5, L=10 и дайте им экономическое истолкование.

11. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).
1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость единицы фактора $K$ равна 3 ден. ед., а стоимость единицы фактора $L$ равна 3 ден. ед.
2) Найдите максимальный выпуск продукции, который может обеспечить фирма, полностью истратив все имеющиеся средства 50 ден. ед.

2.2. Затраты на единицу продукции $П_1$ и $П_2$ составляют 2 и 1 ден. ед.

1) Составьте функцию издержек $C = f(x_1, x_2)$, где $x_1, x_2$ - объемы продукции $П_1$ и $П_2$.

2) Постройте линию уровня, проходящую через точку $(2; 3)$,дайте экономическое истолкование.

3) Найдите эластичности издержек по каждому виду продукции при $x_1 = 2,\ x_2 = 3$, дайте результатам экономическое истолкование.

12. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = 2K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).

1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость ед. фактора $K$ равна $p_1 = 1$ ден. ед., а стоимость ед. фактора $L$ равна $p_2 = 2$ ден. ед.

2) Определите наименьшие издержки при выпуске количества продукции $Q = 50$.

13.Общие издержки производства заданы функцией $C = 0{,}5x^2 + 0{,}6xy + 0{,}4y^2 + 700x + 600y + 2000$, где $x$ и $y$ - количество товаров $A$ и $B$. Общее количество произведенной продукции должно быть равно 500 ед.

1) Сколько единиц товара $A$ и $B$ нужно производить, чтобы издержки на их изготовление были наименьшими?

2) Постройте линию уровня функции, соответствующую наименьшим затратам.

15. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = 2K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).

1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость единицы $K$ равна 1 ден. ед., а единицы фактора $L$ равна 2 ден. ед.

2) Определите наименьшие издержки при выпуске количества продукции $Q = 60$.

16.Определить минимальную себестоимость продукции, если производственная функция себестоимости от факторов производства $x_1$ и $x_2$ определяется моделью $Y = 2x_1^{\,2} + x_2^{\,2} - 20x_1 - 14x_2 + 99$, а ограничение на факторы $x_1$ и $x_2$ имеет вид $x_1 + 2x_2 - 12 = 0$.

17. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).

1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость ед. фактора $K$ равна 4 ден. ед., а стоимость ед. фактора $L$ равна 2 ден. ед.

2) Решите задачу определения максимального выпуска продукции, который может обеспечить фирма, полностью истратив все средства $C = 200$ ден. ед.

18. Фирма выпускает продукцию двух видов, при этом затраты составляют $x^2 + 2x$ ден. ед. на изготовление $x$ ед. продукции $П_1$ и $y^2 + 4y$ ден. ед. на изготовление $y$ ед. продукции $П_2$. Рыночная цена единицы продукции равна соответственно $35$ и $40$ ден. ед.

1) Составьте функции дохода, издержек и прибыли.

2) Вычислите прибыль и эластичности прибыли по каждому виду продукции при изготовлении 1 единицы $П_1$ и 2 единиц $П_2$, дайте им экономическое истолкование.

3) Постройте соответствующую линию уровня функции издержек и дайте ей экономическое истолкование.

19.Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = 2K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).

1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость единицы $K$ равна 2 ден. ед., а единицы фактора $L$ равна 1 ден. ед.

2) Определите наименьшие издержки при выпуске количества продукции $Q = 60$.

21. Производственная деятельность фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $Q = K^{1/2}L^{1/2}$, где $Q$ - величина выпуска продукции, $K$ - число единиц оборудования (капитал) и $L$ - численность работающих (труд).

1) Составьте функцию издержек фирмы, если стоимость ед. фактора $K$ равна $p_1 = 2$ ден. ед., а стоимость ед. фактора $L$ равна $p_2 = 4$ ден. ед.

2) Найдите максимальный выпуск продукции, который может обеспечить фирма, полностью истратив все имеющиеся средства 60 ден. ед.

## Раздел III КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

## Математический анализ

**Тема 1.1. Предел и непрерывность**

1. Функции в экономическом анализе.
2. Предел функции. Определение предела функции в терминах е – d, в терминах
3. последовательностей.
4. Понятие бесконечно малых и бесконечно больших функций. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших.
5. Существование предела монотонной функции.
6. Критерий Коши существования предела функции.
7. Вычисление пределов: пределы основных элементарных функций, предел многочлена, рациональной дроби. Типы неопределенностей.
8. Первый замечательный предел, его следствия.
9. Второй замечательный предел, его следствия.
10. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших в окрестности заданной точки.
11. Различные определения непрерывности функций в точке.
12. Точки разрыва, их классификация.
13. Свойства функций, непрерывных в точке: непрерывность суммы, произведения, частного непрерывных функций; теорема о непрерывности сложной функции.
14. Равномерная непрерывность функции. Связь с понятием непрерывности. Теорема Кантора. Правило Лопиталя, (случай 0/0, случай ¥/¥). Раскрытие неопределенностей.

**Тема 1.2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Приложения производной.**

1. Определение производной функции в точке, понятие правой и левой производной.
2. Вычисление производной по определению.
3. Понятие дифференцируемости функции в точке, теорема о необходимом и достаточном условии дифференцируемости.
4. Дифференциал функции. Геометрический смысл производной и дифференциала.
5. Уравнения касательной и нормали к графику функции. Физический смысл производной.

6. Производная суммы, разности, произведения и частного функций.
7. Производная обратной функции.
8. Производная и дифференциал сложной функции, инвариантность формы первого дифференциала.
9. Неявно заданные функции и отображения. Теоремы о разрешимости. Вычисление производных неявно заданных функций.
10. Производные основных элементарных функций.
11. Таблица производных.
12. Производные и дифференциалы высших порядков.

**Тема 1.3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**

1. Множества в n–мерном евклидовом пространстве.
2. Внутренние и граничные точки, предельные точки и точки прикосновения. Открытые, замкнутые множества в Rn.
3. Понятие функции нескольких переменных. График функции. Множества линий уровня.
4. Предел функции n переменных.
5. Непрерывность функции. Предел по множеству. Повторные пределы. Свойства пределов функции.
6. Свойства непрерывных функций на множествах: аналоги теорем Вейерштрасса и Больцано–Коши. Равномерная непрерывность. Терема Кантора.
7. Частные производные. Дифференцируемость функций многих переменных. Частные производные сложной функции.
8. Эластичность функций нескольких переменных.
9. Дифференциал. Геометрический смысл частных производных и дифференциала.
10. Дифференцирование сложной функции, инвариантность формы дифференциала.
11. Производная по направлению. Градиент, его свойства.
12. Частные производные и дифференциалы высших порядков, теорема о равенстве смешанных производных. Экономические понятия, связанные с понятием частной производной.
13. Понятие локального экстремума функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия. Случай двух переменных. Уравнения нормали и касательной плоскости к графику функции.
14. Условный экстремум. Прямой метод отыскания условного экстремума.

15. Метод подстановки и метод неопределенных множителей Лагранжа.
16. Необходимые и достаточные условия относительного экстремума.
17. Задача о нахождении наименьшего и наибольшего значения функции в области.

**Тема 1.4. Исследование графиков функций одной переменной**

1. Локальный экстремум функции. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума).
2. Теорема Ролля (о нуле производной).
3. Теорема Лагранжа, формула конечных приращений. Условие постоянства функции.
4. Теорема Коши, обобщенная формула конечных приращений.
5. Общая схема исследования функции на монотонность.
6. Необходимое условие экстремума. Стационарные точки. Экстремум функции, недифференцируемой на интервале, критические точки.
7. Достаточные условия экстремума по первой производной, по старшим производным.
8. Общая схема решения задачи на экстремум функции.
9. Возрастание, убывание функции в точке. Достаточное условие возрастания (убывания) функции в точке.
10. Направление выпуклости графика функции. Признак направления выпуклости. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия перегиба.
11. Асимптоты графика функции.
12. Общая схема исследования функции и построения графиков.

**Тема 1.5. Неопределенный интеграл**

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.
2. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Таблицы основных неопределенных интегралов.
4. Основные методы интегрирования (метод замены переменной, интегрирования по частям, разложение на элементарные дроби).
5. Понятие об интегрировании рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций

**Тема 1.6. Определенный интеграл**

1. Интегральная сумма Римана, геометрический смысл интегральной суммы. Понятие интегрируемой функции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм

2. Ограниченность интегрируемых функций. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. Нижний и верхний интегралы.
3. Свойства интегрируемых функций и определенного интеграла, ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ. Производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу.
4. Теорема о существовании первообразной.
5. Основная формула интегрального исчисления.
6. Формула замены переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям, разложение на элементарные дроби.
7. Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.
8. Двойные и тройные интегралы.
9. Экономические понятия, связанные с определенным интегралом. Использование определенных интегралов в экономических задачах.
10. Понятие о несобственных интегралах. Определения. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов.
11. Приближенное вычисление определенных интегралов: формула прямоугольников, трапеций, Симпсона.

**Тема 1.7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**

Контрольные вопросы

1. Комплексные числа. Определение. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа.
2. Геометрическая интерпретация, модуль, аргумент.
3. Операции над комплексными числами: сложение, умножение, возведение в степень, извлечение корня. Формулы Эйлера и Муавра.
4. Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.
5. Комплексные числа в алгебраической форме, алгебра комплексных чисел, модуль. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

**Тема 1.8. Ряды**

Контрольные вопросы

1. Числовой ряд и его сумма.
2. Необходимое условие сходимости.
3. Свойства сходящихся рядов.
4. Признаки сходимости рядов с положительными членами (признаки сравнений, Даламбера)

5. Ряды с произвольными членами.
6. Абсолютная и условная сходимости.
7. Свойства сходящихся числовых рядов.
8. Знакочередующиеся ряды.
9. Признак Лейбница.
10. Многочлен Тейлора для функции одной переменной.
11. Формулы Тейлора и Маклорена.
12. Разложение по формуле Маклорена функций: $e^x$, sin x, cos x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, и использование этих разложений.

**Тема 1.9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. Системы линейных дифференциальных уравнений**

1. Простейшие дифференциальные уравнения 1–го порядка, разрешенные относительно производной.
2. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним.
3. Однородные уравнения 1–го порядка и сводящиеся к ним.
4. Линейные уравнения 1–го порядка и сводящиеся к ним.
5. Уравнения Бернулли и Риккати.
6. Уравнения в полных дифференциалах.
7. Общая теория линейных дифференциальных уравнений п–го порядка.
8. Общая теория линейных однородных дифференциальных уравнений п–го порядка.
9. Общая теория линейных неоднородных дифференциальных уравнений п–го порядка.
10. Методы решения систем линейных дифферециальных уравнений

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

**Основная литература**

1. Высшая математика для экономистов: Учебник / Под ред. проф. Кремера Н.Ш. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2006 –497 с.
2. Математический анализ в экономике: учебно–методическое пособие. Под ред. Н.Ш Кремера. – М.: Финстатинформ, 2009
3. Данко П.Е, Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая Математический анализ в упражнениях и задачах, часть 1, – М.: Высшая школа, 2009. — 304 с.
4. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М.Тришин, М.Н. Фридман., под ред. Н.Ш Кремера.– 4 издание переработанное и дополненное.–М.: ТК Юрайт, Изд–во Юрайт, 2013.
5. Шипачев В.С. Курс высшей математики: Учебник. – М.: ТК Велби, Изд–во Проспект, 2004.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров/ под ред А. Тихонова. – М.: Юрайт, 2012. – 479 с.
7. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Высшая школа, 2006

**Дополнительная литература:**

1. Математический анализ для экономистов (под редакцией Гриба А.А. и Тарасюка А.Ф.) – М.: ФИЛИН, 2000.
2. Кузнецов, Л. А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 2003.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ Д. Т. Письменный. – М.: Айрис–пресс, 2006. – 608 с.
4. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для ВТУЗов/ В. П. Минорский. – М.: Физматлит, 2006. – 336 с.

*Учебное издание*

**Коренюгина Людмила Михайловна**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 «Экономика»

Составитель: Л.М.Коренюгина
Редактор: *Н.В.Лалетин*
Оригинал-макет и верстка: Л.М.Коренюгина

Подписано в печать | Сдано в производство

Формат 14,85х21,0 | Бумага потребительская.
Печать трафаретная. | Усл. печ. л. 7,31
Изд. № | Заказ №
Тираж экз. | завод - экз.

Редакционно-издательский центр АНО ВО СИБУП.
660037, Красноярск, ул. Московская, 7 «А», т. 223-33-13