Автономная некоммерческая организация
высшего образования
«Сибирский институт бизнеса, управления и психологии»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 Экономика»

Красноярск 2019

Издаётся по решению научно-методического совета экономического факультета АНО ВО СИБУП

Коренюгина Л.М.
Методы оптимальных решений: методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 Экономика / Л.М.Коренюгина. – Красноярск: АНО ВО СИБУП, 2019. – 85 с.;

Методические указания включают содержание основных вариантов контрольных работ по дисциплине и задания к ним. Представлены контрольные вопросы.

©АНО ВО СИБУП, 2019
©Коренюгина Л.М., 2019

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 4

Раздел I СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ 5

1.1Содержание дисциплины «Методы оптимальных решений» ..5
1.2 Методические указания к выполнению заданий 7
1.3.Примеры решения задач 39

Раздел II ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 67

Раздел III КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ» 82

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 84

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина Методы оптимальных решений является частью математического цикла (вариативная часть) дисциплин подготовки студентов по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика». Дисциплина реализуется на Экономическом факультете Сибирского института бизнеса, управления и психологии кафедрой Прикладной математики и информатики.

Целью преподавания дисциплины является развитие у студентов логического мышления, привитие навыков чёткой формулировки прикладной задачи, её корректного математического описания и правильного использования математических аппаратных средств для её решения.

Задачи:

- формирование основных особенностей математического мышления;
- формирование представления о важнейших математических понятиях, на основе которых возможно принятие решения;
- развитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с методами сбора и обработки статистической информации, оценки состояния и перспектив развития экономических процессов; решением прикладных задач, применение математического аппарата при анализе сложных экономических процессов, принятии решений.

Преподавание дисциплины предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельная работа студента, консультации.

Программой дисциплины предусмотрены следующие виды контроля: текущий контроль успеваемости в форме опроса, рубежный контроль в форме тестирования и промежуточный контроль в форме экзамена.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 4 зачётных единицы, 144 часа.

Раздел I СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

1.1Содержание дисциплины «Методы оптимальных решений»

Таблица 1. Тематический план лекционных занятий

Номер раздела дисциплины	Тема лекции
Раздел 1. Линейное программирование	
	Тема 1. Введение. Предмет математического программирования.
	Тема 2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования
	Тема 3. Двойственность в линейном программировании
	Тема 4. Транспортные задачи
	Тема 5. Целочисленное программирование
Раздел 2. Элементы нелинейного программирования и теории игр.	
	Тема 6. Нелинейное программирование
	Тема 7. Динамическое программирование
	Тема 8. Сетевое планирование
	Тема 9. Системы массового обслуживания (СМО)
	Тема 10. Теория игр
	Тема 11.Методы принятия решений в условиях неопределенности и в условиях риска
	Тема 12. Оценка эффективности принятия решений и выбранной модели
Итого	

Таблица 2. Тематический план практических занятий

Номер раздела дисциплины	Темы практических занятий
Раздел 1. Линейное программирование	
	Тема 1. Введение. Предмет математического программирования.
	Тема 2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования
	Тема 3. Двойственность в линейном программировании
	Тема 4. Транспортные задачи
	Тема 5. Целочисленное программирование
Раздел 2. Элементы нелинейного программирования и теории игр.	
	Тема 6. Нелинейное программирование
	Тема 7. Динамическое программирование
	Тема 8. Сетевое планирование
	Тема 9. Системы массового обслуживания (СМО)
	Тема 10. Теория игр
	Тема 11.Методы принятия решений в условиях неопределенности и в условиях риска
	Тема 12. Оценка эффективности принятия решений и выбранной модели
Итого	

1.2 Методические указания к выполнению заданий

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1 Основные определения и понятия

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) формулируется следующим образом – найти переменные задачи x_1, x_2, ..., x_n, которые обеспечивают экстремум целевой функции

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min(\max)$$

и удовлетворяют системе ограничений (1.1)

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, i = 1,2,..., l \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, i = l+1, l+2,..., m. \end{cases}$$

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования (ЗЛП) называется любой n-мерный вектор $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений равенств и неравенств. Множество допустимых решений задачи образует область допустимых решений D.

Оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение, при котором целевая функция $Z(X)$ достигает экстремума.

Каноническая задача линейного программирования (КЗЛП) имеет вид

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min(\max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$x_j \ge 0, j = 1,2,..., n.$$

Она отличается от ОЗЛП тем, что её система ограничений является системой только уравнений и все переменные неотрицательные.

Приведение ОЗЛП к каноническому виду ЗЛП:

- чтобы заменить исходную задачу минимизации на задачу максимизации (или наоборот задачу максимизации на задачу

минимизации) достаточно целевую функцию умножить на «-1» и искать максимум (минимум) полученной функции;

- если среди ограничений имеются неравенства, то путем введения дополнительных неотрицательных переменных $x_{n+1} \geq 0$ они преобразуются в равенства:

неравенство $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}\ x_n \geq b_i$ заменяется на равенство $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}\ x_n + x_{n+1} = b_i$,

неравенство $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}\ x_n \leq b_i$ заменяется на равенство $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}\ x_n + x_{n+1} = b_i$;

- если некоторая переменная x_k не имеет ограничений по знаку, то она заменяется (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью между двумя новыми неотрицательны-ми переменными: $x_k = x'_k - x''_k$, где $x'_k \geq 0$. $x''_k \geq 0$.

Графический метод решения ЗЛП с двумя неизвестными

ЗЛП с двумя неизвестными имеет вид:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq)b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq (\geq)b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq (\geq)b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$$

Метод основан на возможности графического изображения области допустимых решений и нахождении среди них оптимального решения.

Область допустимых решений (ОДР) задачи является выпуклым многоугольником и строится как пересечение (общая часть) областей решений каждого из неравенств ограничений задачи.

Областью решения неравенства $a_{i1}x_1+a_{i2}\ x_2 \leq b_i$ является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{i1}x_1+a_{i2}\ x_2 = b_i$, соответствующая этому неравенству, делит координатную плоскость. Чтобы определить, какая из двух полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на разделяющей прямой подставить в неравенство:

- если неравенство справедливо, то областью решений является полуплоскость, содержащая эту точку;

- если неравенство не справедливо, то областью решений является полуплоскость, не содержащая эту точку.

Для нахождения среди допустимых решений оптимального используются линии уровня.

Линией уровня называется прямая $c_1x_1+c_2 x_2 = l$, где l=const, на которой целевая функция задачи принимает постоянное значение. Все линии уровня параллельны между собой.

Градиент целевой функции *grad* $Z(X)$ задает вектор нормали $C = (c_1, c_2)$ линий уровня. Целевая функция на линиях уровня возрастает, если линии уровня перемещать в направлении их нормали, и убывает – в противоположном направлении.

Опорной прямой называется линия уровня, которая имеет хотя бы одну общую точку с ОДР и по отношению к которой ОДР находится в одной из полуплоскостей. ОДР задачи имеет не более двух опорных прямых.

Оптимальное решение ЗЛП лежит на опорной прямой в угловой точке многоугольника ОДР. ЗЛП имеет единственное решение, если опорная прямая проходит через одну угловую точку ОДР, бесконечное множество решений, если опорная прямая проходит через ребро многоугольника ОДР. ЗЛП не имеет решения, если ОДР является пустым множеством (когда система ограничений несовместна) и если ОДР неограниченна в направлении экстремума (целевая функция неограниченна).

Алгоритм графического метода решения ЗЛП с двумя неизвестными:

1. Построить ОДР.
2. Построить вектор нормали $C = (c_1, c_2)$ и линию уровня $c_1x_1+c_2 x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору C.
3. Передвигать линию уровня до опорной прямой в направлении вектора C в задаче на max, или в противоположном направлении – в задаче на min.
4. Если при перемещении линии уровня в направлении экстремума ОДР уходит в бесконечность, то ЗЛП не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции.
5. Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то для его нахождения решить совместно уравнения прямых, ограничивающих ОДР и имеющих общие точки с опорной прямой. Если экстремум достигается в двух угловых точках, то ЗЛП имеет бесконечное множество решений, принадлежащих ребру ОДР, ограниченному этими угловыми точками. В данном случае вычисляются координаты обеих угловых точек.

6. Вычислить значение целевой функции в точке экстремума.

Симплекс-метод решения ЗЛП

Симплекс-метод основывается на следующих положениях:

- ОДР задачи линейного программирования является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек;

- Оптимальным решением ЗЛП является одна из угловых точек ОДР. Угловые точки ОДР алгебраически представляют некоторые базисные (опорные) решения системы ограничений ЗЛП.

Базисным (опорным) решением ЗЛП называется такое допустимое решение $X_0 =(x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}, 0,…0)$, для которого векторы условий (столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений) линейно независимы.

Ненулевые координаты $x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}$ решения X_0 называются базисными переменными, оставшиеся координаты решения X_0 - свободными переменными. Число отличных от нуля координат опорного решения не может быть больше ранга r системы ограничений ЗЛП (числа линейно независимых уравнений в системе ограничений ЗЛП). Далее считаем, что система ограничений ЗЛП состоит из линейно независимых уравнений, т.е. $r = m$.

Смысл симплекс-метода заключается в целенаправленном переходе от одного опорного решения ЗЛП к другому (т.е. от одной угловой точки ОДР к другой) в направлении экстремума и состоит в последовательности этапов:

- найти начальное опорное решение;

- осуществить переход от одного опорного решения к другому;

- определить критерий достижения оптимального решения или сделать заключение об отсутствии решения.

Алгоритм выполнения Симплекс-метода ЗЛП

Алгоритм симплекс-метода осуществляет переход от одного опорного решения ЗЛП к другому в направлении экстремума целевой функции.

Пусть ЗЛП задана в каноническом виде (1.2) и выполнено условие

$$b_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,m, \qquad (1.3)$$

соотношение (1.3) всегда можно выполнить, домножив соответствующее уравнение на «-1» в случае отрицательности b_i. Также считаем, что система уравнений в ограничениях задачи (1.2)

линейно независима и имеет ранг $r = m$. При этом вектор опорного решения имеет m ненулевых координат.

Пусть исходная задача (1.2), (1.3) приведена к виду, где базисные переменные $x_1, x_2, ..., x_m$ выражены через свободные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$

$$Z(X) = \gamma_0 - (\gamma_{m+1}x_{m+1} + \gamma_{m+2}x_{m+2} + ... + \gamma_n x_n \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1m+1}x_{m+1} + \alpha_{1m+2}x_{m+2} + ... + \alpha_{1n}x_n), \\ x_2 = \beta_2 - (\alpha_{2m+1}x_{m+1} + \alpha_{2m+2}x_{m+2} + ... + \alpha_{2n}x_n), \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ x_m = \beta_m - (\alpha_{mm+1}x_{m+1} + \alpha_{mm+2}x_{m+2} + ... + \alpha_{mn}x_n), \\ x_j \geq 0, \ j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

(1.4)

На основе этих соотношений построим таблицу 1

Таблица 1.

Свобод. перем. / Базис. перем.	x_{m+1}	x_{m+2}	…	x_n	Свобод. члены
x_1	α_{1m+1}	α_{1m+2}	…	α_{1n}	β_1
x_2	α_{2m+1}	α_{2m+2}	…	α_{2n}	β_2
…	…	…	…	…	…
x_m	α_{mm+1}	α_{mm+2}	…	α_{mn}	β_m
Z	γ_{m+1}	γ_{m+2}	…	γ_n	γ_0

Таблица 1 называется симплекс-таблицей. Все дальнейшие преобразования связаны с изменениями содержания этой таблицы.

Алгоритм симплекс-метода:

1. В последней строке Z симплекс-таблицы в задаче на min находят наименьший положительный элемент (в задаче на max - наименьший отрицательный элемент), не считая свободного члена. Столбец, ответствующий этому элементу, называется разрешающим.

2. Вычисляют отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (симплекс-отношение). Находят

наименьшее из этих симплекс - отношений, оно соответствует разрешающей строке.

3. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент.

4. Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс - отношений, то выбирают любое из них. То же самое относится к положительным элементам последней строки симлекс - таблицы.

5. После нахождения разрешающего элемента переходят к следующей таблице. Неизвестные переменные, соответствующие разрешающей строке и столбцу, меняют местами. При этом базисная переменная становится свободной переменной и наоборот. Симплекс - таблица преобразуется следующим образом (таблица 2):

Таблица 2.

Базис. перем. \ Свобод. перем.	x_{m+1}	x_1	…	x_n	Свобод. члены
x_{m+2}	$\frac{\alpha_{1m+1}}{\alpha_{1m+2}}$	$\frac{1}{\alpha_{1m+2}}$	…	$\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{1m+2}}$	$\frac{\beta_1}{\alpha_{1m+2}}$
x_2		$-\frac{\alpha_{2m+2}}{\alpha_{1m+2}}$	…		
…	…	…	…	…	…
x_m		$-\frac{\alpha_{mm+2}}{\alpha_{1m+2}}$	…		
Z		$-\frac{\gamma_{m+2}}{\alpha_{1m+2}}$	…		

6. Элемент таблицы 2, соответствующий разрешающему элементу таблицы 1, равен обратной величине разрешающего элемента.

7. Элементы строки таблицы 2, соответствующие элементам разрешающей строки таблицы 1, получаются путем деления соответствующих элементов таблицы 1 на разрешающий элемент.

8. Элементы столбца таблицы 2, соответствующие элементам разрешающего столбца таблицы 1, получаются путем деления соответствующих элементов таблицы 1 на разрешающий элемент и берутся с противоположным знаком.

9. Остальные элементы вычисляются по *правилу прямоугольника:* мысленно вычерчиваем прямоугольник в таблице 1, одна вершина которого совпадает с разрешающим элементом (Рэ), а другая – с элементом, который мы ищем; обозначим элемент в новой таблице 2 через (Нэ), а элемент, стоящий на этом же месте в старой таблице 1 – через (Сэ). Остальные две вершины А и В дополняют фигуру до прямоугольника. Тогда искомый элемент Нэ из таблицы 2 равен Нэ = Сэ – А*В/Рэ.

10. Критерий оптимальности. Как только получится таблица, у которой в последней строке в задаче на min все элементы отрицательны (в задаче на max все элементы положительны), считается, что экстремум найден. Оптимальное значение целевой функции равно свободному члену в строке Z, а оптимальное решение определяется свободными членами при базисных переменных. Все свободные переменные полагаются равными нулю.

11. Если в разрешающем столбце все элементы отрицательны, то задача не имеет решений (минимум не достигается).

Метод искусственного базиса решения ЗЛП

Алгоритм симплекс-метода применим, если выделено какое-либо опорное решение ЗЛП, т. е, исходная ЗЛП (1.2) приведена к виду (1.4). Метод искусственного базиса предлагает процедуру построения такого опорного решения.

Метод искусственного базиса основан на введении искусственных базисных переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, с помощью которых система ограничений ЗЛП (2.2)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.5)$$

может быть преобразована к виду

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n), \\ y_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n), \end{cases} \qquad (1.6)$$

Системы (1.5) и (1.6) будут эквивалентны в том случае, если все y_i будут равны нулю. Как и раньше мы считаем, что все $b_i \geq 0$. Для того чтобы y_i были равны 0, мы должны преобразовать задачу таким образом, чтобы все искусственные базисные переменные y_i перешли в свободные переменные. Такой переход можно сделать алгоритмом симплекс метода относительно дополнительной целевой функции

$$F(y) = y_1 + y_2 + ... + y_m = d_0 - (d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_n x_n). \quad (2.7)$$

Исходная симплекс - таблица для данного метода имеет вид

Свобод. перем. / Базис. перем.	x_1	x_2	…	x_n	Свобод. члены
y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
$Z(x)$	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	**0**
$F(y)$	d_1	d_2	…	d_n	d_0

Сначала симплекс таблица преобразуется относительно целевой функции $F(y)$ до получения опорного решения. Опорное решение найдено, когда выполнен следующий критерий: $F(y) = 0$ и все искусственные переменные y_i переведены в свободные переменные. Затем из симплекс таблицы вычеркивается строка для $F(y)$ и столбцы для y_i и решают задачу для исходной целевой функции $Z(x)$ до получения оптимального решения.

Рекомендуется вводить минимум искусственных переменных.

Двойственные задачи линейного программирования

Пара задач линейного программирования называется симметричной двойственной парой, если они удовлетворяют условиям:

1. число неизвестных одной задачи равно числу ограничений другой задачи;

2. матрица коэффициентов системы ограничений получается одна из другой путем транспонирования;

3. неравенства в системах ограничений имеют противоположный смысл;

4. свободные члены системы ограничений одной из задач становятся коэффициентами целевой функции другой задачи, коэффициенты целевой функции превращаются в свободные члены ограничений;

5. целевые функции в задачах имеют противоположный смысл: в первой – max, во второй – min.

Одна из таких задач называется прямой (основной), а другая – двойственной

Прямая	Двойственная
$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$	$L\ (U) = b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_mu_m \to \min$
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$	$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \ge c_1, \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \ge c_n, \end{cases}$
$x_i \ge 0.\ i = 1.2.\ldots.n.$	$u_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,m.$

- задачи динамического программирования, если оптимизация целевой функции *f(X)* сводится к поэтапной оптимизации некоторых промежуточных

Правило построения двойственной пары

К пяти признакам, сформулированным ранее, необходимо добавить следующие:

1. в исходной задаче ограничения неравенства следует записывать со знаком ≥, если целевая функция стремится к min, и со знаком ≤, если целевая функция стремится к max;

2. каждому ограничению неравенства исходной задачи соответствует в двойственной задаче условие неотрицательности переменных $u_i \ge 0$;

3. каждому условию равенства соответствует переменная u_i без ограничения на знак, и наоборот: неотрицательным переменным x_k из основной задачи в двойственной задаче соответствуют ограничения - неравенства, а неограниченным по знаку переменным соответствуют равенства.

Решение двойственных задач опирается на следующие теоремы:

Теорема (первая теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то двойственная к ней задача тоже имеет оптимальное решение. Причем экстремальные значения целевых функций совпадают. Если же одна задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то двойственная ей задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Теорема (вторая теорема двойственности). Для того чтобы допустимые решения $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$ являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия сопряжения:

$$x_j\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i\right) = 0,\ j = 1,2,...,n;$$

$$u_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = 0,\ i = 1,2,...,m.$$

Пара двойственных задач может быть решена симплекс методом. Преобразуем пару двойственных задач к виду, допускающему применение симплекс алгоритма. Для этого введем неотрицательные выравнивающие переменные y_j, $j = 1,2,\ldots,m$ в прямую задачу и v_i, $i = 1,2,\ldots, n$ – в двойственную задачу:

прямая задача:

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n), \end{cases} \qquad (1.8)$$

$$Z(x) = 0 - (-c_1x_1 - c_2x_2 + ... - c_nx_n) \to \max$$

двойственная задача:

$$\begin{cases} -v_1 = c_1 - (a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{1n}u_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -v_n = c_n - (a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_n), \end{cases} \qquad (1.9)$$

$$L(U) = 0 - (-b_1u_1 - b_2u_2 + ... - b_mu_m \to \min$$

Построим для задач (1.8) и (1.9) общую симплекс-таблицу, причем эта таблица имеет дополнительные столбец и строку для двойственной задачи:

Двойственная задача		v_1	v_2	…	v_n	$L(u)$
	Свобод. перем. / Базис. перем.	x_1	x_2	…	x_n	Свобод. члены
$-u_1$	y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
$-u_2$	y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…
$-u_m$	y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
	$Z(x)$	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	**0**

Задачи, представленные в обшей симплекс - таблице, решаются обычным симплекс-методом, алгоритм которого приведен выше. Метод решения с помощью общей симплекс-таблицы называется двойственным симплекс методом.

2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

2.1 Основные определения и понятия

Постановка транспортной задачи (ТЗ)

Однородный груз находится у m поставщиков в объемах a_1, a_2. ..., a_m. Груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2, ..., bn. Общий объем поставок равен общему объему заявок. Заданы стоимости c_{ij}, $i = 1,2,\ldots, m$, $j = 1,2,\ldots, n$ доставки единицы груза от каждого поставщика i каждому потребителю j. Требуется рассчитать такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, заявки всех потребителей полностью удовлетворяются и суммарные транспортные издержки минимальны.

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c \quad (2.1) \qquad \text{n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \quad (2.2)$$

Математическая модель ТЗ

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1 \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\ldots \quad (2.5) \qquad \ldots, n.$$

Переменными (неизвестными) ТЗ являют объемы перевозок от каждого *i*-го поставщика каждому *j*-му потребителю. Целевая функция (2.1) выражает требование минимизации транспортных издержек на перевозку всех грузов. Ограничения (2.2) отражают тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью. Ограничения (2.3) выражает требование полностью удовлетворить заявки всех n потребителей. Ограничения (2.4) называется уравнением баланса и отражает равенство общего объема поставок общему объему заявок.

Математическая формулировка ТЗ: найти такой план перевозок x_{ij}, удовлетворяющий ограничениям (2.2)–(2.5) и обеспечивающий минимум целевой функции (2.1). ТЗ всегда имеет решение, т.к. целевая функция (2.1) ограничена снизу нулем ввиду неотрицательности её слагаемых.

Исходные данные ТЗ записываются в таблице (называемой транспортной таблицей) вида

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

В дальнейшем все действия по нахождению решения ТЗ будут сводиться к преобразованию транспортной таблицы.

Доказано, что система ограничений (2.2)-(2.5) ТЗ имеет ранг $N = m + n - 1$, поэтому решение ТЗ не может иметь отличных от нуля координат больше, чем N. Значит, в каждом решении, включая оптимальное, будут отличны от нуля не более, чем (n+m—1) перевозок x_{ij}. Ячейки (клетки) таблицы, в которых записываются эти отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) - свободными.

Решение ТЗ называется невырожденным, если число ненулевых координат вектора решения X равно $N = m + n - 1$. Уравнение баланса (2.4) является обязательным условием решения ТЗ.

Когда уравнение баланса нарушено, то в ТЗ необходимо искусственно восстановить баланс следующим способом:

- в ТЗ с избытком заявок вводится фиктивный поставщик с запасом $a_ф$, равным недостающему объему поставок;

- в ТЗ с избытком запасов вводится фиктивный потребитель с заявкой $b_ф$, равной превышающему объему поставок.

Транспортная таблица дополняется в первом случае фиктивной строкой $a_ф$, во втором – фиктивным столбцом $b_ф$. В клетках таблицы, связывающих фиктивные пункты с реальными, стоимости перевозки $c_{ij} = 0$.

Метод «северо-западного угла»

Метод «северо-западного угла» построения опорного решения ТЗ: заполнение транспортной таблицы начинается с левой верхней клетки («северо-западного угла») и состоит из однотипных операций. Запасы первого поставщика используются для обеспечения сначала первого потребителя, затем второго и т.д. до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего поставщика и т.д. до полного распределения запасов между потребителями.

После построения начального опорного решения необходимо проверить, чтобы число занятых клеток равнялось $N = m + n - 1$, т.е. решение было невырожденным.

Метод потенциалов решения ТЗ

Векторы $U = (u_1, u_2. ..., u_m)$ и $V = (v_1, v_2. ..., v_n)$ называются потенциалами поставщиков и потребителей соответственно, если их координаты удовлетворяют соотношениям $u_i + v_j = c_{ij}$, для $x_{ij} > 0$, $i = 1,2,\ldots, m$, $j = 1,2,\ldots, n$.

Теорема. Если для всех базисных клеток решения ($x_{ij} > 0$) $u_i + v_j = c_{ij}$,а для всех свободных клеток ($x_{ij} = 0$) $u_i + v_j \le c_{ij}$,, то решение x_{ij} является оптимальным и никакими способами улучшено быть не может.

Если среди свободных клеток найдется хотя бы одна, в которой величина $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$ при $x_{ij} = 0$, то решение может быть улучшено. Процесс улучшения решения состоит в определении вводимой и выводимой клеток транспортной таблицы. В таблицу вводится клетка, для которой Δ_{ij} максимальна. Выводимая клетка определяется с помощью цикла.

Правило построения цикла:

В соответствии со свойствами ТЗ для невырожденного базисного решения в таблице можно образовать замкнутую цепочку, состоящую только их вертикальных и горизонтальных звеньев, одной из вершин которой является выбранная свободная клетка, а остальные – занятые клетки. Логика построения цикла проста: «выйдя» из свободной, вводимой в базис, клетки в горизонтальном направлении, мы должны «остановиться» в той занятой клетке таблицы, из которой сможем двигаться дальше по вертикали до следующей занятой клетки. В вертикальном направлении переходим к следующей такой занятой клетке, чтобы, повернув в ней в горизонтальном направлении, мы смогли перейти к следующей занятой клетке, и далее аналогично выстраиваем цепочку таким образом, чтобы вернуться к исходной клетке и образовать замкнутый цикл.

Переход от одного опорного решения ТЗ к другому производится с помощью цикла. В построенном цикле, начиная с вводимой клетки (которая считается первой), помечаются вершины:

нечетные знаком «+»,

а четные знаком «–».

Среди множества клеток, помеченных знаком «–», выбирается клетка с наименьшим значением x_{ij} (обозначим его Q). Затем производится пересчет плана по цепочке: к объемам перевозок в клетках, помеченных знаком «+», добавляется объем Q, а из клеток, помеченных знаком «–», этот объем вычитается. В результате в базис решения вводится исходная клетка цикла с объемом Q и выводится клетка цикла, объем которой был равен Q. Если новое базисное решение не оптимально, то описанная процедура продолжается до получения оптимального решения.

Алгоритм решения ТЗ методом потенциалов.

1. Проверить уравнение баланса (2.4). При необходимости выровнять баланс введением фиктивного поставщика или фиктивного потребителя.

2. Построить начальное опорное решение, например, методом («северо-западного угла» и проверить правильность его составления по количеству базисных клеток (их должно быть $N = m+ n - 1$, остальные клетки – свободные)).

3. Определить потенциалы $U = (u_1, u_2. ..., u_m)$ и $V = (v_1, v_2,..., _n)$ по базисным клеткам. Для этого решают систему уравнений

$u_i + v_j = c_{ij}$, для $x_{ij} > 0$, $i = 1,2,\ldots, m,\ j = 1,2,\ldots, n,$

которая имеет бесконечное множество решений. Для нахождения частного решения системы одно из значений потенциала задают произвольно, например, полагают $u_1 = 0$.

4. Проверить выполнение условия оптимальности для всех свободных клеток. Для этого вычисляют $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$ при $x_{ij} = 0$.

Если все $\Delta_{ij} \le 0$, то план оптимален, вычисляют значение целевой функции и решение задачи заканчивается.

5. Если хотя бы в одной свободной клетке $\Delta_{ij} > 0$, приступают к улучшению решения путем переброски перевозок по циклу.

6. После этого заново подсчитываются потенциалы и Δ_{ij}, и, если план все еще не оптимален, процедура улучшения продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение.

Если в ТЗ получается *вырожденное решение*, когда число ненулевых клеток меньше чем ($m + n$-1), то вырожденность устраняется следующим методом: вырожденное решение дополняется необходимым количеством нулевых клеток (базисных нулей) таким образом, чтобы они позволяли построить цикл и рассчитать полную систему потенциалов, и далее действуют в соответствии с правилами описанного выше алгоритма.

3. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Постановка задачи целочисленного программирования (ЦП)

В общем виде задача ЦП формулируется следующим образом: найти максимум или минимум функции

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \qquad (3.1)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j,\ j = 1,2,...,n, \qquad (3.2)$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,...,n. \qquad (3.3)$$

$$x_i, i - 1,2,...,n \text{ - целые числа} \qquad (3.4)$$

Метод Гомори решения задачи ЦП

(метод отсекающих плоскостей**)** основан на следующем подходе: отправной точкой для решения исходной задачи (3.1) - (3.4) является решение задачи (3.1)-(3.3) без учета условий целочисленности (3.4). Если получаемый в результате оптимальный план x^* содержит только целые компоненты, то решение задачи ЦП автоматически получено. В противном случае к системе ограничений задачи должно быть добавлено такое ограничение, для которого:

- найденное нецелочисленное оптимальное решение x^* не удовлетворяет вновь добавляемому ограничению;

- любое допустимое целочисленное решение задачи (3.1) – (3.4) удовлетворяет вновь добавляемому ограничению.

Такое ограничение называют *правильным отсечением*. Геометрически правильное отсечение задает гиперплоскость, отсекающую от выпуклого многогранного множества допустимых решений некоторого многогранника, не содержащего целочисленных решений.

Правильное отсечение строится следующим образом. Пусть симплекс - методом получено нецелочисленное решение задачи (3.1)-(3.3) без учета условий целочисленности (3.4). Пусть *i*-е ограничение задачи, находящееся в последней оптимальной симплекс таблице, имеет вид

$$x_i + \sum_{j \in J} \alpha_{ij} x_j = \beta_i,$$

где x_i – базисная переменная в уравнении ограничения;

α_{ij} – коэффициенты при неизвестных;

x_j – свободные переменные в уравнении ограничения;

β_i – правая часть уравнения (координата оптимального решения), которая является дробным числом;

i – индекс строки с максимальной дробной частью $\{\beta_i\}$ числа β_i ;

J – множество индексов свободных переменных последней симплекс таблицы.

Тогда дополнительное ограничение (правильное отсечение) имеет вид

$$\{\beta_i\} - \sum_{j \in J} \{\alpha_{ij}\} x_j \le 0, \qquad (3.5)$$

где $\{\beta_i\}$ – дробная часть β_i;

$\{\alpha_{ij}\}$ - дробная часть α_{ij}.

Напомним, что целой частью [S] числа S называется ближайшее целое, не превосходящее S. Дробная часть {S} числа S есть разность {S}= S - [S]. Преобразуем неравенство в (3.5) в строгое равенство с помощью введения неотрицательной выравнивающей переменной $x_{n+1} \ge 0$, получим

$$x_{n+1} - \sum_{j \in J} \{\alpha_{ij}\} x_j = -\{\beta_i\}, \qquad (3.6)$$

Добавив сформированное отсекающее ограничение (3.6) к последней симплекс таблице получаем новую оптимизационную задачу, которую продолжаем решать двойственным симплекс-методом. Для решения задачи ЦП удобно применять модификацию двойственного симплекс-метода, которая совпадает со стандартным алгоритмом симплекс-метода из раздела 1.1 за исключением правила выбора разрешающего элемента. Разрешающий элемент выбирается следующим образом:

- разрешающая строка i берется либо введенная строка отсекающего ограничения (3.6) с целью вывода искусственной переменной x_{n+1} из базиса, либо строка с отрицательным свободным членом β_i , в которой есть хотя бы один отрицательный элемент α_{ij};

- разрешающий столбец j находим как

$$\min_j \left| \frac{\gamma_j}{\alpha_{ij}} \right|, для\, \alpha_{ij} < 0,$$

т.е. как минимальное отношение модуля элементов γ_j строки целевой функции Z к отрицательным элементам α_{ij} .

Если в результате решения двойственным симплекс - методом получаем целочисленное решение, то вычисления заканчиваются, в противном случае составляем новое отсекающее ограничение и процесс решения повторяется.

Доказано, что метод Гомори позволяет получить решение задачи ЦП за конечное число шагов.

Задача не имеет целочисленного решения, если оптимальное решение содержит координату с дробной частью и все коэффициенты соответствующего уравнения являются целыми.

4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1 Основные определения и понятия

Постановка задачи динамического программирования (ДП)

Пусть экономическая система S может находиться в конечном числе состоянии S_k, k=1,2,…n и является управляемой. Состояние системы S на k-ом шаге определяется совокупностью чисел $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_m^{(k)})$, которые получены в результате реализации управления u_k, обеспечивающего переход системы S из состояния $x^{(k-1)}$ в состояние $x^{(k)}$.

Будем предполагать, что:

1. состояние $x^{(k)}$, в которое перешла система S, зависит от данного состояния $x^{(k-1)}$ и выбранного управления u_k и не зависит от того, каким образом система S перешла в состояние $x^{(k-1)}$;

2. если в результате реализации k-го шага обеспечен доход $W_k(x^{(k-1)};u_k)$, зависящий от исходного состояния системы $x^{(k-1)}$ и выбранного управления u_k, то общий доход за n шагов составляет

$$W(u) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x^{(k-1)}, u_k).$$

Первое условие называют условием отсутствия *последействия*, а второе – условием *аддитивности* целевой функции задачи.

Задача ДП состоит в нахождении оптимальной стратегии управления, т.е. такой совокупности управлений $u^* = (u_1^*, ..., u_n^*)$, в результате реализации которых система S за n шагов переходит из начального состояния $x^{(\circ)}$ в конечное $x^{(n)}$ и при этом общий доход $W(u)$ принимает наибольшее значение.

Принцип оптимальности Беллмана. Каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление

на этом шаге так, чтобы доход на данном шаге плюс оптимальный доход на всех последующих шагах был максимальный.

Математическая формулировка принципа оптимальности.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Обозначим через $F_0(x^{(o)})$ максимальный доход, получаемый за n шагов при переходе системы S из начального состояния $x^{(o)}$ в конечное состояние $x^{(n)}$ при реализации оптимальной стратегии управления $u^* = (u_1^*, ..., u_n^*)$, а через $F_k(x^{(k)})$ – максимальный доход, получаемый при переходе из любого состояния $x^{(k)}$ в конечное состояние $x^{(n)}$ при оптимальной стратегии управления на оставшихся (n-k) шагах. Тогда

$$F_0(x^{(\circ)}) = \max_{u=(u_1, \ldots, u_n)} [W_1(x^{(\circ)}, u_1) + ... + W_n(x^{(n)}, u_n)], \quad (4.1)$$

$$F_k(x^{(k)}) = \max_{u_{k+1}} [W_{k+1}(x^{(k)}, u_{k+1}) + F_{k+1}(x^{(k+1)})] \quad (4.2)$$

при k = 0,1, …, n-1.

Выражение (4.2) представляет собой математическую запись принципа оптимальности Беллмана и носит название основного функционального уравнения Беллмана. Используя уравнение (4.2) находится решение рассматриваемой задачи динамического программирования.

Алгоритм решения задач динамического программирования

Из принципа оптимальности следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n-м шаге, затем на двух последних шагах, затем на трёх последних шагах и т.д., вплоть до первого шага. Таким образом, решение задачи ДП целесообразно начинать с определения оптимального решения на последнем, n-м шаге. Чтобы найти это решение, очевидно, нужно сделать различные предположения о том, как мог окончиться предпоследний шаг, и с учетом этого выбрать управление u_n, обеспечивающее максимальное значение функции дохода $W_n(x^{(n-1)}; u_n)$. Такое управление, выбранное при определенных предположениях о том, как окончился предыдущий шаг, называется *условно оптимальным управлением*. Следовательно, принцип оптимальности требует находить на каждом шаге условно оптимальное управление для любого из возможных исходов предшествующего шага.

Рассмотрим этот процесс более подробно.

Полагая k = *n* - 1 в уравнении Беллмана (4.2), получим следующее функциональное уравнение:

$$F_{n-1}(x^{(n-1)}) = \max_{u_n} [W_n(x^{(n-1)}, u_n) + F_n(x^{(n)})] \qquad (4.3)$$

В уравнении (4.3) $F_n(x^{(n)})$ можно считать известным. Используя теперь уравнение (4.3) и рассматривая всевозможные допустимые состояния системы S на (*n*-1)-ом шаге $x_1^{(n-1)}$, $x_2^{(n-1)}$, ..., $x_i^{(n-1)}$, ... находим условные оптимальные решения

$$u_n(x_1^{(n-1)}), \quad u_n(x_2^{(n-1)}), \ldots, u_n(x_i^{(n-1)}), \ldots$$

и соответствующие значения функции (5.3):

$$F_{n-1}(x_1^{(n-1)}), F_{n-1}(x_2^{(n-1)}), \ldots, F_{n-1}(x_i^{(n-1)}).$$

Таким образом, на *n*-ом шаге находим условно оптимальное управление при любом допустимом состоянии системы S после (*n*-l)-го шага, т.е. в каком бы состоянии система не оказалась после (*n*-l)-го шага, нам уже известно, какое следует принять решение на *n*-м шаге.

Перейдем теперь к рассмотрению функционального уравнения при *k* = *n*-2:

$$F_{n-2}(x^{(n-2)}) = \max_{u_{n-l}} [W_{n-1}(x^{(n-2)}, u_{n-1}) + F_{n-1}(x^{(n-1)})]. \qquad (4.4)$$

Решая функциональное уравнение (4.4) при различных состояниях на (*n*-2)-ом шаге, получим условно оптимальные управления $u_{n-1}(x_i^{(n-2)})$, i=1,2,... .

Каждое из этих управлений совместно с уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивает максимальное значение дохода на двух последних шагах. Последовательно осуществляя описанный выше итерационный процесс, дойдем, до первого шага. На этом шаге известно, в каком состоянии может находиться система. Поэтому уже не требуется делать предположений о допустимых состояниях системы, а остается лишь только выбрать управление, которое является наилучшим с учетом условно оптимальных управлений, уже принятых на всех последующих шагах.

Чтобы найти оптимальную стратегию управления, т.е. определить искомое решение задачи ДП, нужно теперь пройти всю

последовательность шагов, только на этот раз от начала к концу. А именно: на первом шаге в качестве оптимального управления u_1^* возьмем найденное условно оптимальное управление u_1. На втором шаге найдем состояние x_1^* , в которое переводит систему управление u_1^*. Это состояние определяет найденное условно оптимальное управление u_2^o, которое теперь будем считать оптимальным. Зная u_2^* , находим x_2^*, а значит, определяем u_3^* и т.д. В результате этого находим решение задачи ДП, т.е. максимально возможный доход и оптимальную стратегию управления, включающую оптимальные управления на отдельных шагах.

5. ГРАФЫ

5.1 Основные определения и понятия

- Граф – пара множеств V и X, таких что G = (V, X).

V – множество вершин, X – множество ребер.

- Петля – ребро вида (v,v).
- Кратные рёбра – одинаковые пары в X.
- Ориентированный граф (орграф D) – граф, для которого пары в X упорядочены. Ребра в орграфе называются дугами и обозначаются (v_i, v_j).
- Вершина и ребро называются инцидентными, если вершина является для этого ребра концевой точкой.
- Степенью вершины V графа G называется число δ (v) рёбер графа, инцидентных вершине v. Если δ (v) = l, тогда v – висячая вершина, если δ (v) = 0, тогда v – изолированная вершина.
- Полустепенью исхода (захода) вершины v орграфа D называется $\delta^-(v)$ – число дуг, исходящих из v ($\delta^+(v)$ – число дуг, заходящих в вершину v).
- Маршрутом для графа G (путем для орграфа D) называется последовательность $v_1x_1v_2x_2v_3 \ldots x_kv_{k+1}$.
- Цепь – незамкнутый маршрут (путь), в котором все рёбра (дуги) попарно различны.
- Простая цепь – цепь, в которой все вершины попарно различны
- Цикл (контур) – замкнутый маршрут (путь), в котором все рёбра (дуги) попарно различны.
- Простой цикл (контур) – цикл (контур), в котором все вершины попарно различны.
- Деревом графа называется его связный подграф без циклов.

• Покрывающее дерево (остов графа) – дерево, содержащее все вершины графа.

• Длина пути – число рёбер (дуг) в маршруте (пути).

• Путь в графе называется минимальным, если он состоит из минимального количества рёбер.

• Матрица смежности графа: A = [a_{ij}], V = {v_1, ...,v_n}, X= {x_1, ..., x_m.}

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, если (v_i, v_j) \in X, \\ 0, если (v_i, v_j) \notin X \end{cases}$$

• Матрица инцидентности орграфа D: B = [b_{ij}]

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, если \cdot v_i - начало \cdot дуги \cdot (v_i, v_j), \\ 1, если \cdot v_i - конец \cdot дуги \cdot (v_i, v_j), \\ 0, если \cdot v_i - не \cdot инцендентна \cdot дуге \cdot (v_i, v_j). \end{cases}$$

• Граф называется нагруженным, если каждой дуге (i, j) поставлено в соответствие число *l*(i, j), называемое длиной дуги.

• Матрица длин дуг графа: C = [c_{ij}]

$$c_{ij} = \begin{cases} l(i, j), если \cdot есть \cdot ребро \cdot между \cdot v_i \cdot и \cdot v_j, \\ \infty, иначе. \end{cases}$$

• Путь называется минимальным (кратчайшим) в нагруженном графе или нагруженном орграфе, если он имеет минимальную длину пути.

Задача о кратчайшем пути между двумя вершинами графа

Пусть для каждой дуги *(x, y)* графа G задана её длина *l(x, y)*, если вершины *x* и *y* не соединены дугой, то *l(x, y)* = ∞. Длина пути определяется как сумма длин отдельных дуг, составляющих этот путь. Требуется найти кратчайший путь между двумя заданными вершинами s и *t* графа G.

Алгоритм поиска кратчайшего пути (алгоритм окрашивания)

В ходе выполнения алгоритма окрашивают вершины и дуги графа и вычисляют величины *d(x),* равные кратчайшему пути из вершины s в вершину *x,* включающему только окрашенные вершины.

1. Полагают $d(s) = 0$, $d(x) = \infty$ для любого $x \neq s$. Окрашивают вершину s и полагают $y = s$.

2. Для каждой неокрашенной вершины x пересчитывают величину $d(x)$ по формуле $d(x) = \min \{d(x), d(y) + l(y,x)\}$.

Если $d(x) = \infty$ для всех вершин, то вычисления заканчивают. В графе G отсутствуют дуги из вершины s в неокрашенные вершины.

В противном случае окрасить вершину x, для которой величина $d(x)$ минимальна, и дугу, ведущую в вершину x. Полагают $y = x$.

3. Если $y = t$, то кратчайший путь найден. В противном случае переходят к шагу 2.

С помощью описанного алгоритма можно определить кратчайший путь из s во все вершины исходного графа. Для этого процедуру окрашивания нужно продолжить до тех пор, пока все вершины графа не будут окрашены. При этом для графа G будет построено покрывающее дерево (если такое дерево существует) с корнем в вершине s и включающем все вершины и все окрашенные дуги.

6. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

6.1 Основные определения и понятия

Сетевое планирование применяется для организации больших комплексов работ. Управление такими работами можно эффективно осуществлять с помощью метода критического пути, позволяющего сравнительно просто выяснить, когда необходимо начинать и заканчивать выполнение отдельных операций и как задержка выполнения некоторой операции влияет на время завершения всего проекта.

Сеть – конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном направлении.

Сетевой график – сеть, представляющая взаимосвязь отдельных работ проекта.

Обычно привязывается к оси времени. Наибольшее распространение получили сетевые графики, в которых вершины графа обозначают события, операции изображаются ориентированными дугами, а связи - ориентированными пунктирными дугами. Время наступления события – время, когда завершено выполнение всех операций, входящих в данную вершину.

Правила построения сетевых моделей:

- основой является структурно-временная таблица, содержащая перечень всех операций, длительность и порядок их следования

(опорной называется операция (работа), без выполнения которой невозможно выполнение последующих операций);

- всем стрелкам сетевого графика задают общее направление слева направо;

- между одной парой событий можно изобразить только одну работу;

- не должно быть стрелок, которые ниоткуда не выходят и никуда не входят;

- сеть может содержать несколько начальных вершин (в которые не входит ни одна дуга). В этом случае можно добавить еще одну вершину и провести из нее дуги с нулевыми длительностями работ во все начальные вершины. Тогда сеть будет иметь одну начальную вершину. Аналогично вводят конечную вершину;

- для упрощения анализа сети, устраняют пересечения работ преобразованием взаимного расположения работ и событий;

- нумерацию событий проводят последовательно слева направо и сверху вниз.

Правильная нумерация – номер начала любой дуги меньше номера ее конца.

Временные параметры сетевых моделей:

- *Ранний срок свершения j-го события* t_j^{p} – наиболее ранний из возможных моментов наступления данного события при заданной продолжительности работ.

- *Поздний срок свершения j-го события* t_j^{n} – наиболее поздний из допустимых моментов наступления данного события, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок.

- *Резерв времени на свершение j-го события Rj* – это промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события j без нарушения сроков завершения всего комплекса, определяется как разность между поздним t_j^{n} и ранним t_j^{p} сроками наступления события

$$Rj = t_j^{\text{n}} - t_j^{\text{p}}.$$

- *Ранний срок начала работы* $t_{ij}^{\text{P.H}}$ – наиболее ранний из возможных моментов начала данной работы при заданной продолжительности работ. Он совпадает с ранним сроком наступления ее начального события:

$$t_{ij}^{\text{P.H}} = t_j^{\text{p}}.$$

- *Ранний срок окончания работы* $t_{ij}^{\text{P.O}}$ – наиболее ранний из возможных моментов окончания данной работы при заданной

продолжительности работ. Он превышает ранний срок наступления ее события i на величину продолжительности работы:

$t_{ij}^{\text{Р.О}} = t_j^{\text{Р}} + t_{ij}$.

- *Поздний срок начала работы* $t_{ij}^{\text{П.Н}}$ – наиболее поздний из допустимых моментов начала данной работы, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок:

$t_{ij}^{\text{П.Н}} = t_j^{\text{П}} - t_{ij}$.

- *Поздний срок окончаний работы* $t_{ij}^{\text{П.О}}$ – наиболее поздний из допустимых моментов окончания данной работы, при котором еще возможно выполнение последующих работ в установленный срок:

$t_{ij}^{\text{П.О}} = t_j^{\text{П}}$.

- *Полный резерв времени работы (i,j)* $r_{ij}^{\text{П}}$ – максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы t_{ij} без изменения общего срока выполнения комплекса:

$r_{ij}^{\text{П}} = t_j^{\text{П}} - t_j^{\text{Р}} - t_{ij}$.

- *Свободный резерв времени работы (i, j)* $r_{ij}^{\text{С.В}}$ – максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы при условии, что все события сети наступают в свои ранние сроки: $r_{ij}^{\text{С.В}} = t_j^{\text{Р}} - t_i^{\text{Р}} - t_{ij}$.

- 7. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО)

-

- 7.1 Основные определения и понятия

-

- СМО – системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо работ, а с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов. СМО включает следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающее устройство, выходящий поток требований.

- Поток событий – последовательность появления событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.

- Стационарный поток – если вероятность попадания любого числа событий на промежуток времени зависит от длины этого промежутка и не зависит от того, как далеко расположен этот промежуток от начала отсчета. Стационарность потока означает независимость от времени его вероятностных характеристик.
- Поток без последействия – число событий, попадающих на один промежуток времени не зависит от числа событий, попавших на другой непересекающийся промежуток.
- Ординарный поток – вероятность попадания на малый отрезок времени двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания только одного события.
- Простейший (пуассоновский) поток – поток одновременно обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последействия.
- Показатели эффективности СМО:
- 1) Вероятность того, что поступающее в систему требование откажется присоединяться к очереди и теряется ($P_{отк}$). Этот показатель для системы массового обслуживания с отказами равен вероятности того, что в системе находится столько требований, сколько она содержит приборов (каналов) обслуживания:
-
- $P_{отк} = P_m$,
- где m – число каналов обслуживания.
- Для системы с ограниченной длиной очереди $P_{отк}$ равно вероятности того, что в системе находится $m + l$ требований:
-
- $P_{отк} = P_{m+l}$,
- где l – допустимая длина очереди.
- Противоположным показателем является вероятность обслуживания требования
-
- $P_{обсл} = 1 – P_{отк}$.
-
- Вероятности состояний Pi определяются по формулам:
-
- *система с отказами*
-
- $P_i = P_0 * \rho^i / i!$,
-
- где i = l, 2, ..., m, $\rho = \lambda/\mu$, λ – интенсивность входящего потока требований, μ - производительность одного канала (прибора)

обслуживания, S_0, S_1, ... , S_m – состояния системы (индекс указывает число требований в системе), m – общее число каналов, а вероятность P_0 находится из выражения

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m} \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1}$$

система с ограниченной длиной очереди и ожиданием

имеющей m каналов с ограниченной очередью, число мест в которой ограничено величиной *l* вероятности состояний S_1 , S_2 , ..., S_m находят по формуле

$Pi = P_0 * \rho^i / i!$, (i = l, 2, ... m).

Вероятности состояний S_{m+1} , S_{m+2}, ..., S_{m+l} определяют по формулам

$$P_i = \frac{\rho^i}{m^{i-m} \cdot m!} P_0 \qquad (i = m+1, \ldots, m+l)$$

В большинстве практических задач при $(\rho / m) < 1$

$$P_0 = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{m+1}}{m \cdot m!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^i}{1 - \frac{\rho}{m}} \right]^{-1}$$

2) Среднее количество требований, ожидающих начала обслуживания,

$$M_{ож} = \sum_{n=m+1}^{m+l} (n - m) P_n ,$$

где P_n – вероятность того, что в системе находятся *n* требований.

При условии простейшего потока требовании и экспоненциального закона распределения времени обслуживания формулы для $M_{ож}$ принимают следующий вид:

система с ограниченной длиной очереди

- $$M_{ож} = \frac{P_0 \rho^m}{m!} \sum_{n=1}^{l} n \left(\frac{\rho}{m} \right)^n ,$$
- где ρ = λ/μ, λ – интенсивность входящего потока требований (среднее число требований, поступающих в единицу времени), μ – интенсивность обслуживания (среднее число обслуженных требований в единицу времени);
-
- *система с ожиданием*
-
- $$M_{ож} = \frac{P_0 \rho^{m+1}}{m \cdot m!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{m}\right)^2} .$$
- 3) Относительная (q) и абсолютная (A) пропускные способности системы. Эти величины находят соответственно по формулам
-
- $q = 1 - P_{отк}$, $A = \lambda q$.
-
- 4) Среднее число занятых обслуживанием приборов в случае экспоненциального характера потока требований и времени обслуживания
-
- $m_З = \rho q$.
-
- Для системы массового обслуживания с отказами $m_З$ можно найти по формуле
- $$m_З = \sum_{n=1}^{m} n \cdot P_n$$
-
-
- 5) Общее количество требований, находящихся в системе (M). Эту величину определяют следующим образом:
-
- *система массового обслуживания с отказами*
-
- $M = m_З$,
-

- *система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди и ожиданием*

- $M = m_З + M_{ож}$.

- 6) Среднее время ожидания требованиям начала обслуживания ($T_{ож}$). Если известна функция распределения вероятности времени ожидания требованием начала обслуживания

- $F(t) = P(T_{ож} < t)$,

то среднее время ожидания находится как математическое ожидание случайной величины $T_{ож}$:

- $$T_{ож} = M[T_{ож}] = \int_0^\infty t dF.$$

- $T_{ож}$ при показательном законе распределения требований во входящем потоке можно определить по формуле

- $$T_{ож} = \frac{M_{ож}}{\lambda}.$$

- *8.ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ*

Задача о назначениях яляется частным видом линейной оптимизационной задачи. Наиболее часто задача о назначениях представляется следующим образом:

Имеются n рабочих и m видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-м рабочим j-той работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом - работа. Необходимо составить план работ так чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.

Математическая модель задачи.

Переменными $x_{i,j}$ обозначим назначение с *i*-го рабочего на *j*-ую пункт работу. $x_{i,j}$ может принимать значения 1 (назначен) и 0 (не назначен). $c_{i,j}$ – стоимость выполнения *i*-м рабочим *j*-той работы. $i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}$. Так как количество рабочих превышает количество работ, то не всем рабочим будет назначена работа.

$$\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij} \to min$$

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1 \\ \sum_j x_{ij} \le 1 \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

$$i = \overline{1,n}$$

$$j = \overline{1,m}$$

Решение задачи о назначениях очень похоже на решение транспортной задачи. Особеность лишь в том, что плановые переменные могут принимать только значения 0 или 1 и в каждом столбце и строке может быть только одно ненулевое значение. Для решения задачи о назначениях в Excel с использованием настройки Поиск решения следует выделить ячейки назначений и подсчитать для них суммы по столбцам и по строкам. В ячейку целевой функции следует ввести формулу вычисляющую сумму произведений стоимости работы на план назначений.

После чего следует выбрать в Excel пункт меню *Данные/Поиск решения*, в окне *Поиск решения* выбрать целевую ячейку, изменяемые ячейки и добавить ограничения. Как правила используются ограничения следующего вида:

Неотрицательность значений изменяемых ячеек;

Суммы значений изменяемых ячеек для каждой строки и столбца должны быть равны 1;

Иногда бывает необходимо задать целечисленные ограничения на изменяемые ячейки.

Далее следует нажать кнопку *Выполнить*, после чего будет получено решение задачи о назначениях.

Довольно часто задача о назначениях бывает представлена в так называемом несбалансированном виде (*количество работ не равно количеству работников*). В этом случае для приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду следует добавить в таблицу одну или несколько фиктивных работ или работников.

9. ТЕОРИЯ ИГР

Теория игр – математическая теория конфликтных ситуаций.

Стратегией игрока называется система правил, однозначно определяющих выбор поведения игрока на каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Игры, в которых целью каждого участника является получение по возможности большего индивидуального выигрыша, называются бескоалиционными в отличие от коалиционных (кооперативных), в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коллективов (коалиции (кооперации)) без дальнейшего разделения выигрыша между участниками.

Игра называется с нулевой суммой, если один игрок выигрывает столько, сколько второй проигрывает в той же партии.

Матричная – парная игра с нулевой суммой, задаваемая матрицей - $\|aij\|_{mxn}$, элементы которой определяют выигрыш первого игрока (и соответственно проигрыш второго), если первый игрок выберет i-ю строку (i-ю стратегию), а второй игрок – j-й столбец (j-ю стратегию). Матрица $\|aij\|_{mxn}$ называется платежной матрицей или матрицей игры.

Каждая фиксированная стратегия, которую может выбрать игрок, называется его чистой стратегией.

Матричная игра имеет решение в чистых стратегиях, если игра имеет равновесную ситуацию – когда $v = V = v^*$, где

$v = \max\limits_{1\le i\le m}\left\{\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}\right\}$ - нижняя цена игры;

$V = \min\limits_{1\le j\le n}\left\{\max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}\right\}$ - верхняя цена игры.

Всегда $v \le V$. v^* называется ценой игры в чистых стратегиях.

Если $v = V = v^*$, то решение игры в чистых стратегиях достигается в седловых точках. Любая пара (i_0, j_0) называется седловой точкой, когда существует элемент матрицы a_{i0j0} , обладающий свойством $a_{ij0} \le a_{i0j0} \le a_{i0j}$, т. е. когда элемент матрицы a_{i0j0} - минимальный в своей строке и в то же время максимальный в столбце.

Если обозначить через $p_1, p_2, ..., p_m$ вероятности (частоты), с которыми первый игрок выбирает соответственно первую, вторую, ..., m-ю чистую стратегию, так что

$$pi \ge 0,\ i = 1, 2, ..., m, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$

через q_1, q_2, , ..., q_n — вероятности, с которыми второй игрок выбирает первую, вторую, ..., n-ю свою чистую стратегию, причем

$$qj \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n,\quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

то наборы чисел P = (p_1, p_2, ..., ..., p_m) и Q = (q_1, q_2, ..., q_n) называются смешанными стратегиями первого и второго игроков соответственно.

Каждый игрок имеет бесчисленное множество смешанных стратегий.

• налитическое решение игры 2x2

Если матрица размером 2x2 не имеет седловой точки, то каждый из игроков обладает единственной оптимальной смешанной стратегией P^0 и Q^0 с компонентами

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})},\ p_2 = 1 - p_1$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})},\ q_2 = 1 - q_1$$

цена игры v* определяется формулой

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}.$$

• Правило (принцип) доминирования

Строка k называется доминируемой строкой l, если все элементы строки k не превышают соответствующих элементов строки l, т.е. $a_{ki} \leq a_{li}$ для всех i.

Столбец k называется доминируемым столбцом l, если все элементы столбца l не превышают соответствующих элементов столбца k, т.е. $a_{kj} \geq a_{lj}$ для всех j. Оптимальные смешанные стратегии в игре с усеченной матрицей, полученной отбрасыванием доминируемых строк и столбцов, являются оптимальным решением исходной игры, если вероятности доминируемых чистых стратегий положить равными нулю.

1.3.Примеры решения задач

Задание 1. Построить математическую модель задачи линейного программирования. Решить задачу линейного программирования графическим методом. Дать экономическое истолкование оптимальному решению и наибольшему значению целевой функции.

Для изготовления изделий двух типов А и В используют различные виды древесины. Норма расхода древесины на производство одного изделия каждого типа А и В, цена одного изделия, а также общее количество древесины каждого вида (запас сырья) приведены в таблице.

Найти оптимальный план производства изделий А и В, при котором общая стоимость всей произведенной продукции будет максимальной.

№ задачи	Вид древесины	Общее кол-во древесины	Нормы расхода древесины на одно изделие вида		Цена одного изделия	
			А	В	А	В
10	I II III	300 260 300	3 2 1.5	1 1.5 2	15	40

Решение:

Составим математическую модель задачи. Она включает в себя переменные, систему ограничений и целевую функцию.

Пусть x_1-количество продукции вида А

x_2-количество продукции вида В

Вывод: x_1 = ед. продукции вида А, x_2 = ед. продукции вида В

F(X) = максимальная прибыль

Необходимо найти максимальное значение целевой функции $F = 15x_1+40x_2 \rightarrow max$, при системе ограничений:

$3x_1+x_2 \leq 300$ (1)

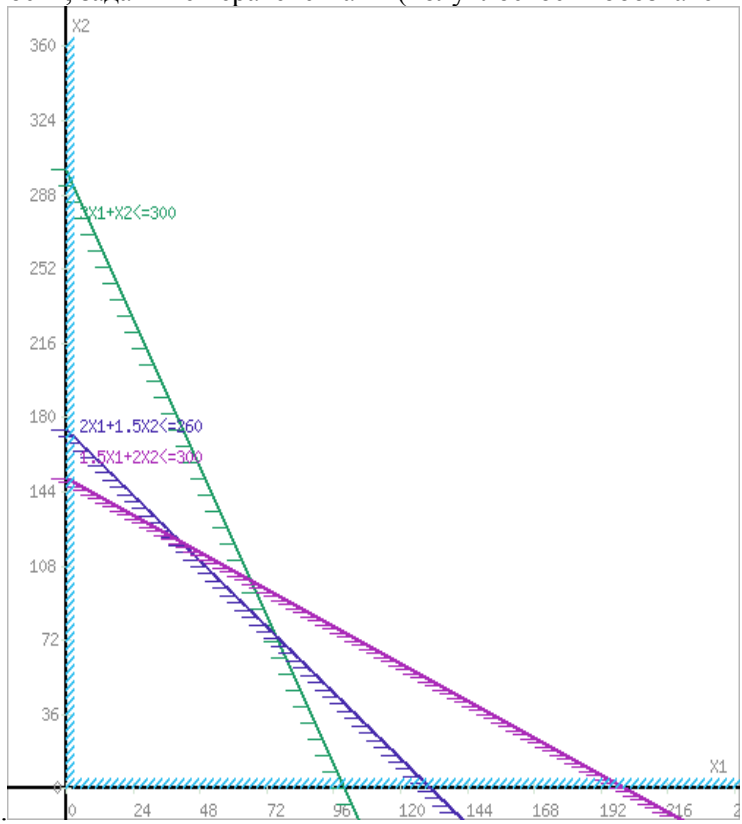
$2x_1+1.5x_2 \leq 260$ (2)

$1.5x_1+2x_2 \leq 300$ (3)

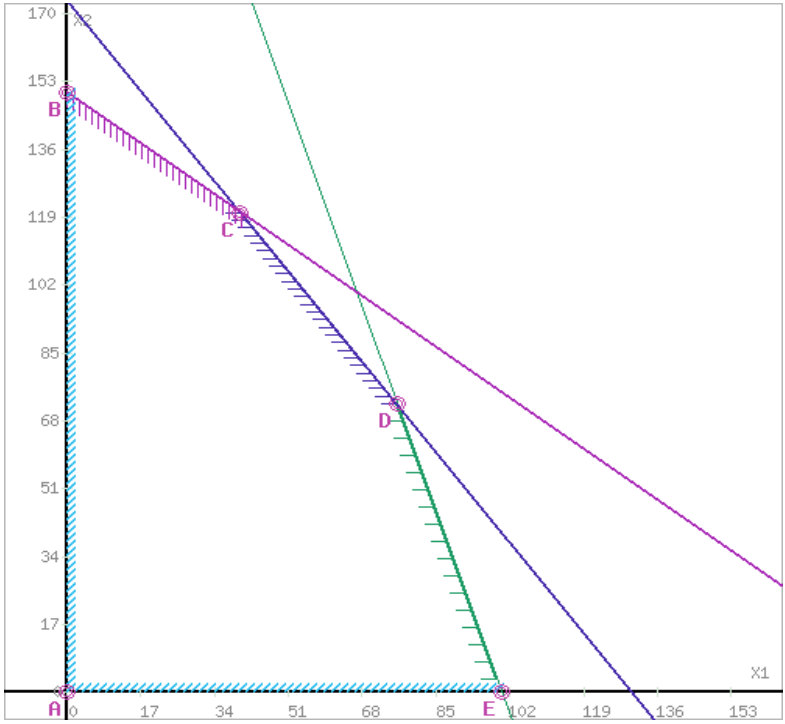
$x_1 \geq 0$ (4)

$x_2 \geq 0$ (5)

Построим область допустимых решений, т.е. решим графически систему неравенств. Для этого построим каждую прямую и определим полуплоскости, заданные неравенствами (полуплоскости обозначены штрихом).



Границы области допустимых решений
Пересечением полуплоскостей будет являться область, координаты точек которого удовлетворяют условию неравенствам системы ограничений задачи.
Обозначим границы области многоугольника решений.



Рассмотрим целевую функцию задачи $F = 15x_1+40x_2 \rightarrow max$.
Построим прямую, отвечающую значению функции $F = 0$: $F = 15x_1+40x_2 = 0$. Вектор-градиент, составленный из коэффициентов целевой функции, указывает направление максимизации F(X). Начало вектора – точка (0; 0), конец – точка (15; 40). Будем двигать эту прямую параллельным образом. Поскольку нас интересует максимальное решение, поэтому двигаем прямую до последнего касания обозначенной области. На графике эта прямая обозначена пунктирной линией.

Область допустимых решений представляет собой многоугольник Прямая F(x) = const пересекает область в точке B. Так как точка B получена в результате пересечения прямых (3)и (5), то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:
$1.5x_1+2x_2=300$
$x_1=0$

Решив систему уравнений, получим: $x_1 = 0$, $x_2 = 150$
Откуда найдем максимальное значение целевой функции:
F(X) = 15*0 + 40*150 = 6000

Неиспользованный экономический резерв ресурса 1 составляет 150 (300-150).

Этот резерв не может быть использован в оптимальном плане, но указывает на возможность изменений в объекте моделирования (например, резерв ресурса можно продать или сдать в аренду).

2-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, т.е. ресурс 2-го вида израсходован не полностью. Значит, этот ресурс не является дефицитным.

Неиспользованный экономический резерв ресурса 2 составляет 35 (260-225).

Этот резерв не может быть использован в оптимальном плане, но указывает на возможность изменений в объекте моделирования (например, резерв ресурса можно продать или сдать в аренду).

3-ое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что 3-ый ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным.

Задание 2

. Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех видов. На изготовление единицы изделия А требуется затратить сырья каждого вида a_1, a_2, a_3 кг соответственно, а для единицы изделия В- b_1, b_2, b_3 кг соответственно. Производство обеспечено сырьем каждого вида в количестве p_1, p_2, p_3 кг соответственно. Стоимость единицы изделия А составляет α рублей, а единицы изделия В- β рублей. Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную стоимость готовой продукции. Решите задачу симплекс- методом.

20. $a_1=5$ $b_1=2$ $p_1=750$ $\alpha=30$ $\beta=49$
$a_2=4$ $b_2=5$ $p_2=807$
$a_3=1$ $b_3=7$ $p_3=840$

Решение:

Ответ:

$x_1 =$ единиц продукции вида 1

$x_2 =$ единиц продукции вида 2

F(X) =максимальная прибыль

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции $F(X) = 30x_1 + 49x_2$ при следующих условиях-ограничений.

$5x_1 + 2x_2 \leq 750$

$4x_1 + 5x_2 \leq 807$

$x_1 + 7x_2 \leq 840$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме).

В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_3. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_4. В 3-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_5.

$5x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 750$

$4x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 807$

$1x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 840$

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Базисные переменные это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.

Экономический смысл дополнительных переменных: дополнительные переменные задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_3, x_4, x_5

Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план:

X1 = (0,0,750,807,840)

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	750	5	2	1	0	0
x_4	807	4	5	0	1	0
x_5	840	1	7	0	0	1
F(X0)	0	-30	-49	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2}

и из них выберем наименьшее:

min (750 : 2 , 807 : 5 , 840 : 7) = 120

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (7) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_3	750	5	2	1	0	0	375
x_4	807	4	5	0	1	0	$161^2/_5$
x_5	840	1	7	0	0	1	120
F(X1)	0	-30	-49	0	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x_5 в план 1 войдет переменная x_2.

Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_5 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=7

На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1.

В остальных клетках столбца x_2 плана 1 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_2 и столбец x_2.

Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А*В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (7), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
750-(840 • 2):7	5-(1 • 2):7	2-(7 • 2):7	1-(0 • 2):7	0-(0 • 2):7	0-(1 • 2):7

807-(840 • 5):7	4-(1 • 5):7	5-(7 • 5):7	0-(0 • 5):7	1-(0 • 5):7	0-(1 • 5):7
840 : 7	1 : 7	7 : 7	0 : 7	0 : 7	1 : 7
0-(840 • -49):7	-30-(1 • -49):7	-49-(7 • -49):7	0-(0 • -49):7	0-(0 • -49):7	0-(1 • -49):7

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	510	$^{33}/_{7}$	0	1	0	$^{-2}/_{7}$
x_4	207	$^{23}/_{7}$	0	0	1	$^{-5}/_{7}$
x_2	120	$^{1}/_{7}$	1	0	0	$^{1}/_{7}$
F(X1)	5880	-23	0	0	0	7

Итерация №1.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1}

и из них выберем наименьшее:

min (510 : $4^{5}/_{7}$, 207 : $3^{2}/_{7}$, 120 : $^{1}/_{7}$) = 63

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен ($3^{2}/_{7}$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	min
x_3	510	$4^{5}/_{7}$	0	1	0	$^{-2}/_{7}$	$108^{2}/_{11}$
x_4	207	$3^{2}/_{7}$	0	0	1	$^{-5}/_{7}$	63
x_2	120	$^{1}/_{7}$	1	0	0	$^{1}/_{7}$	840
F(X2)	5880	-23	0	0	0	7	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы.

Вместо переменной x_4 в план 2 войдет переменная x_1.

Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_4 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=$3^{2}/_{7}$

На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1.

В остальных клетках столбца x_1 плана 2 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_1 и столбец x_1.

Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
510-(207 • $4^5/_7$):$3^2/_7$	$4^5/_7$-($3^2/_7$ • $4^5/_7$):$3^2/_7$	0-(0 • $4^5/_7$):$3^2/_7$	1-(0 • $4^5/_7$):$3^2/_7$	0-(1 • $4^5/_7$):$3^2/_7$	$^{-2}/_7$-($^{-5}/_7$ • $4^5/_7$):$3^2/_7$
207 : $3^2/_7$	$3^2/_7$: $3^2/_7$	0 : $3^2/_7$	0 : $3^2/_7$	1 : $3^2/_7$	$^{-5}/_7$: $3^2/_7$
120-(207 • $^1/_7$):$3^2/_7$	$^1/_7$-($3^2/_7$ • $^1/_7$):$3^2/_7$	1-(0 • $^1/_7$):$3^2/_7$	0-(0 • $^1/_7$):$3^2/_7$	0-(1 • $^1/_7$):$3^2/_7$	$^1/_7$-($^{-5}/_7$ • $^1/_7$):$3^2/_7$
5880-(207 • -23):$3^2/_7$	-23-($3^2/_7$ • -23):$3^2/_7$	0-(0 • -23):$3^2/_7$	0-(0 • -23):$3^2/_7$	0-(1 • -23):$3^2/_7$	7-($^{-5}/_7$ • -23):$3^2/_7$

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	213	0	0	1	$^{-33}/_{23}$	$^{17}/_{23}$
x_1	63	1	0	0	$^7/_{23}$	$^{-5}/_{23}$
x_2	111	0	1	0	$^{-1}/_{23}$	$^4/_{23}$
F(X2)	7329	0	0	0	7	2

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	213	0	0	1	$^{-33}/_{23}$	$^{17}/_{23}$
x_1	63	1	0	0	$^7/_{23}$	$^{-5}/_{23}$
x_2	111	0	1	0	$^{-1}/_{23}$	$^4/_{23}$
F(X3)	7329	0	0	0	7	2

Оптимальный план можно записать так:

$x_1 = 63$

$x_2 = 111$

$F(X) = 30•63 + 49•111 = 7329$

Определение дефицитных и недефицитных (избыточных) ресурсов. Вторая теорема двойственности.

Подставим оптимальный план прямой задачи в систему ограниченной математической модели:

$5*63 + 2*111 = 537 < 750$

$4*63 + 5*111 = 807 = 807$

1*63 + 7*111 = 840 = 840

1-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, т.е. ресурс 1-го вида израсходован не полностью. Значит, этот ресурс не является дефицитным.

Неиспользованный экономический резерв ресурса 1 составляет 213 (750-537).

Этот резерв не может быть использован в оптимальном плане, но указывает на возможность изменений в объекте моделирования (например, резерв ресурса можно продать или сдать в аренду).

2-ое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что 2-ый ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным.

3-ое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что 3-ый ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным.

Ответ: Оптимальный план: $x_1 = 63$ $x_2 = 111$ $F(X) = 30 \cdot 63 + 49 \cdot 111 = 7329$

Задание 3

На трех базах A_1, A_2, A_3 находится однородный груз в количестве a_1, a_2, a_3 тонн. Этот груз необходимо развести пяти потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, потребности которых в данном грузе составляют b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 тонн соответственно. Стоимость перевозок пропорциональна расстоянию и количеству перевозимого груза. Матрица тарифов и значения a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 приведены в таблице. Требуется спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

30.

b_j / a_i	100	200	80	60	160
100	7	6	4	3	6
200	8	5	15	9	10
300	4	6	3	5	2

Решение:

Математическая модель транспортной задачи:

$F = \sum\sum c_{ij}x_{ij}$, (1)

при условиях:

$\sum x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,\ldots, m,\ (2)$

$\sum x_{ij} = b_j,\ j = 1,2,\ldots, n,\ (3)$

$x_{ij} \geq 0$

Запишем экономико-математическую модель для нашей задачи.

Переменные:

x_{11} – количество груза из 1-го склада в 1-й магазин

x_{12} – количество груза из 1-го склада в 2-й магазин

x_{13} – количество груза из 1-го склада в 3-й магазин

x_{14} – количество груза из 1-го склада в 4-й магазин

x_{15} – количество груза из 1-го склада в 5-й магазин

x_{21} – количество груза из 2-го склада в 1-й магазин

x_{22} – количество груза из 2-го склада в 2-й магазин

x_{23} – количество груза из 2-го склада в 3-й магазин

x_{24} – количество груза из 2-го склада в 4-й магазин

x_{25} – количество груза из 2-го склада в 5-й магазин

x_{31} – количество груза из 3-го склада в 1-й магазин

x_{32} – количество груза из 3-го склада в 2-й магазин

x_{33} – количество груза из 3-го склада в 3-й магазин

x_{34} – количество груза из 3-го склада в 4-й магазин

x_{35} – количество груза из 3-го склада в 5-й магазин

Ограничения по запасам:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 100$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 200$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 300$

Ограничения по потребностям:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 100$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 200$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 80$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 60$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 160$

Целевая функция:

$7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + 6x_{15} + 8x_{21} + 5x_{22} + 15x_{23} + 9x_{24} + 10x_{25} + 4x_{31} + 6x_{32} + 3x_{33} + 5x_{34} + 2x_{35} \rightarrow \min$

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	7	6	4	3	6	100
A2	8	5	15	9	10	200

A3	4	6	3	5	2	300
Потребности	100	200	80	60	160	

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

$\sum a = 100 + 200 + 300 = 600$

$\sum b = 100 + 200 + 80 + 60 + 160 = 600$

Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	7	6	4	3	6	100
A2	8	5	15	9	10	200
A3	4	6	3	5	2	300
Потребности	100	200	80	60	160	

Этап I. Поиск первого опорного плана.

1. Используя *метод наименьшей стоимости*, построим первый опорный план транспортной задачи.

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i, или b_j.

Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Искомый элемент равен 2

Для этого элемента запасы равны 300, потребности 160. Поскольку минимальным является 160, то вычитаем его.

$x_{35} = \min(300,160) = 160.$

7	6	4	3	x	100
8	5	15	9	x	200
4	6	3	5	2	300 - 160 = 140
100	200	80	60	160 - 160 =	0

				0	

Искомый элемент равен 3

Для этого элемента запасы равны 100, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

x_{14} = min(100,60) = 60.

7	6	4	3	x	100 - 60 = 40
8	5	15	x	x	200
4	6	3	x	2	140
100	200	80	60 - 60 = 0	0	0

Искомый элемент равен 3

Для этого элемента запасы равны 140, потребности 80. Поскольку минимальным является 80, то вычитаем его.

x_{33} = min(140,80) = 80.

7	6	x	3	x	40
8	5	x	x	x	200
4	6	3	x	2	140 - 80 = 60
100	200	80 - 80 = 0	0	0	0

Искомый элемент равен 4

Для этого элемента запасы равны 60, потребности 100. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

x_{31} = min(60,100) = 60.

7	6	x	3	x	40
8	5	x	x	x	200
4	x	3	x	2	60 - 60 = 0
100 - 60 = 40	200	0	0	0	0

Искомый элемент равен 5

Для этого элемента запасы равны 200, потребности 200. Поскольку минимальным является 200, то вычитаем его.

x_{22} = min(200,200) = 200.

7	x	x	3	x	40
x	5	x	x	x	200 - 200 = 0

4	x	3	x	2	0
40	200 - 200 = 0	0	0	0	0

Искомый элемент равен 7

Для этого элемента запасы равны 40, потребности 40. Поскольку минимальным является 40, то вычитаем его.

x_{11} = min(40,40) = 40.

7	x	x	3	x	40 - 40 = 0
x	5	x	x	x	0
4	x	3	x	2	0
40 - 40 = 0	0	0	0	0	0

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	7[40]	6	4	3[60]	6	100
A2	8	5[200]	15	9	10	200
A3	4[60]	6	3[80]	5	2[160]	300
Потребности	100	200	80	60	160	

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 6, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является вырожденным.

Строим новый план.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F(x) = 7*40 + 3*60 + 5*200 + 4*60 + 3*80 + 2*160 = 2260

Искомый элемент равен 6

Для этого элемента запасы равны 100, потребности 200. Поскольку минимальным является 100, то вычитаем его.

x_{12} = min(100,200) = 100.

x	6	x	x	x	100 - 100 = 0
8	5	15	9	10	200
4	6	3	5	2	300
100	200 - 100 = 100	80	60	160	0

Искомый элемент равен 2

Для этого элемента запасы равны 300, потребности 160. Поскольку минимальным является 160, то вычитаем его.

x_{35} = min(300,160) = 160.

x	6	x	x	x	0
8	5	15	9	x	200
4	6	3	5	2	300 - 160 =

					140
100	100	80	60	160 - 160 = 0	0

Искомый элемент равен 3

Для этого элемента запасы равны 140, потребности 80. Поскольку минимальным является 80, то вычитаем его.

$x_{33} = \min(140,80) = 80.$

x	6	x	x	x	0
8	5	x	9	x	200
4	6	3	5	2	140 - 80 = 60
100	100	80 - 80 = 0	60	0	0

Искомый элемент равен 4

Для этого элемента запасы равны 60, потребности 100. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

$x_{31} = \min(60,100) = 60.$

x	6	x	x	x	0
8	5	x	9	x	200
4	x	3	x	2	60 - 60 = 0
100 - 60 = 40	100	0	60	0	0

Искомый элемент равен 5

Для этого элемента запасы равны 200, потребности 100. Поскольку минимальным является 100, то вычитаем его.

$x_{22} = \min(200,100) = 100.$

x	6	x	x	x	0
8	5	x	9	x	200 - 100 = 100
4	x	3	x	2	0
40	100 - 100 = 0	0	60	0	0

Искомый элемент равен 8

Для этого элемента запасы равны 100, потребности 40. Поскольку минимальным является 40, то вычитаем его.

$x_{21} = \min(100,40) = 40.$

x	6	x	x	x	0
8	5	x	9	x	100 - 40 = 60

4	x	3	x	2	0
40 - 40 = 0	0	0	60	0	0

Искомый элемент равен 9

Для этого элемента запасы равны 60, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

x_{24} = min(60,60) = 60.

x	6	x	x	x	0
8	5	x	9	x	60 - 60 = 0
4	x	3	x	2	0
0	0	0	60 - 60 = 0	0	0

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	7	6[100]	4	3	6	100
A2	8[40]	5[100]	15	9[60]	10	200
A3	4[60]	6	3[80]	5	2[160]	300
Потребности	100	200	80	60	160	

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является *невырожденным*.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F(x) = 6*100 + 8*40 + 5*100 + 9*60 + 4*60 + 3*80 + 2*160 = 2760

Этап II. Улучшение опорного плана.

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* u_i, v_j. по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_2 = 6$; $0 + v_2 = 6$; $v_2 = 6$

$u_2 + v_2 = 5$; $6 + u_2 = 5$; $u_2 = -1$

$u_2 + v_1 = 8$; $-1 + v_1 = 8$; $v_1 = 9$

$u_3 + v_1 = 4$; $9 + u_3 = 4$; $u_3 = -5$

$u_3 + v_3 = 3$; $-5 + v_3 = 3$; $v_3 = 8$

$u_3 + v_5 = 2$; $-5 + v_5 = 2$; $v_5 = 7$

$u_2 + v_4 = 9$; $-1 + v_4 = 9$; $v_4 = 10$

	v_1=9	v_2=6	v_3=8	v_4=10	v_5=7

u_1=0	7	6[100]	4	3	6
u_2=-1	8[40]	5[100]	15	9[60]	10
u_3=-5	4[60]	6	3[80]	5	2[160]

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$

(1;1): 0 + 9 > 7; Δ_{11} = 0 + 9 - 7 = 2

(1;3): 0 + 8 > 4; Δ_{13} = 0 + 8 - 4 = 4

(1;4): 0 + 10 > 3; Δ_{14} = 0 + 10 - 3 = 7

(1;5): 0 + 7 > 6; Δ_{15} = 0 + 7 - 6 = 1

max(2,4,7,1) = 7

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;4): 3

Для этого в перспективную клетку (1;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	7	6[100][-]	4	3[+]	6	100
A2	8[40]	5[100][+]	15	9[60][-]	10	200
A3	4[60]	6	3[80]	5	2[160]	300
Потребности	100	200	80	60	160	

Цикл приведен в таблице (1,4 → 1,2 → 2,2 → 2,4).

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. y = min (2, 4) = 60. Прибавляем 60 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 60 из X_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	7	6[40]	4	3[60]	6	100
A2	8[40]	5[160]	15	9	10	200
A3	4[60]	6	3[80]	5	2[160]	300
Потребности	100	200	80	60	160	

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* u_i, v_j. по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_2 = 6$; $0 + v_2 = 6$; $v_2 = 6$

$u_2 + v_2 = 5$; $6 + u_2 = 5$; $u_2 = -1$

$u_2 + v_1 = 8$; $-1 + v_1 = 8$; $v_1 = 9$

$u_3 + v_1 = 4$; $9 + u_3 = 4$; $u_3 = -5$

$u_3 + v_3 = 3$; $-5 + v_3 = 3$; $v_3 = 8$

$u_3 + v_5 = 2$; $-5 + v_5 = 2$; $v_5 = 7$

$u_1 + v_4 = 3$; $0 + v_4 = 3$; $v_4 = 3$

	v_1=9	v_2=6	v_3=8	v_4=3	v_5=7
u_1=0	7	6[40]	4	3[60]	6
u_2=-1	8[40]	5[160]	15	9	10
u_3=-5	4[60]	6	3[80]	5	2[160]

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$

(1;1): $0 + 9 > 7$; $\Delta_{11} = 0 + 9 - 7 = 2$

(1;3): $0 + 8 > 4$; $\Delta_{13} = 0 + 8 - 4 = 4$

(1;5): $0 + 7 > 6$; $\Delta_{15} = 0 + 7 - 6 = 1$

max(2,4,1) = 4

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;3): 4

Для этого в перспективную клетку (1;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	7	6[40][-]	4[+]	3[60]	6	100
A2	8[40][-]	5[160][+]	15	9	10	200
A3	4[60][+]	6	3[80][-]	5	2[160]	300
Потребности	100	200	80	60	160	

Цикл приведен в таблице (1,3 → 1,2 → 2,2 → 2,1 → 3,1 → 3,3).

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. y = min (1, 2) = 40. Прибавляем 40 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 40 из X_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы
A1	7	6	4[40]	3[60]	6	100
A2	8[0]	5[200]	15	9	10	200
A3	4[100]	6	3[40]	5	2[160]	300
Потребности	100	200	80	60	160	

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* u_i, v_j. по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_3 = 4$; $0 + v_3 = 4$; $v_3 = 4$

$u_3 + v_3 = 3$; $4 + u_3 = 3$; $u_3 = -1$

$u_3 + v_1 = 4$; $-1 + v_1 = 4$; $v_1 = 5$

$u_2 + v_1 = 8$; $5 + u_2 = 8$; $u_2 = 3$

$u_2 + v_2 = 5$; $3 + v_2 = 5$; $v_2 = 2$

$u_3 + v_5 = 2$; $-1 + v_5 = 2$; $v_5 = 3$

$u_1 + v_4 = 3$; $0 + v_4 = 3$; $v_4 = 3$

	v_1=5	v_2=2	v_3=4	v_4=3	v_5=3

u_1=0	7	6	4[40]	3[60]	6
u_2=3	8[0]	5[200]	15	9	10
u_3=-1	4[100]	6	3[40]	5	2[160]

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $u_i + v_j \le c_{ij}$.

Минимальные затраты составят:

F(x) = 4*40 + 3*60 + 5*200 + 4*100 + 3*40 + 2*160 = 2180

Анализ оптимального плана.

Из 1-го склада необходимо груз направить в 3-й магазин (40), в 4-й магазин (60)

Из 2-го склада необходимо весь груз направить в 2-й магазин

Из 3-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (100), в 3-й магазин (40), в 5-й магазин (160)

Задача имеет множество оптимальных планов, поскольку оценка для (2;1) равна 0.

Задание 4

После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование может оказаться в одном из состояний: 1) требуется незначительный ремонт; 2) необходимо заменить отдельные детали; 3) дальнейшая эксплуатация возможна только после капитального ремонта. Накопленный на предприятии опыт свидетельствует, что вероятности состояний оборудования составляют, соответственно, q_1=0.3, q_2=0.6, q_3=0.1.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия может принять следующие решения: 1) произвести ремонт своими силами, потребует затрат, равных a_1, a_2, a_3 ден. ед. в зависимости от состояния оборудования; 2) произвести ремонт при помощи специалистов, что вызовет затраты b_1, b_2, b_3 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, на что будет израсходовано c_1, c_2, c_3 ден. ед.

Используя игровой подход, высказать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

Требуется: 1. Составить платежную матрицу игры, где первый игрок – руководство предприятия, принимающее решение о виде ремонта оборудования, второй игрок – природа, формирующая состояние промышленного оборудования. 2. Составить матрицу рисков. 3. Найти оптимальные стратегии статистика по максиминному критерию крайнего пессимизма (Вальда), критерию минимаксного

риска (Сэвиджа) и соответствующую цену игры. 4. Какие оптимальные рекомендации получит руководство предприятия?

Номер задачи	Данные для задания								
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
40	18	26	39	24	27	39	23	31	45

Решение:

Пункт 1

Составить платежную матрицу игры, где первый игрок – руководство предприятия, принимающее решение о виде ремонта оборудования, второй игрок – природа, формирующая состояние промышленного оборудования.

Платежная матрица:

Ai	П1	П2	П3
A1	18	26	39
A2	24	27	39
A3	23	31	45

Пункт 2. Составить матрицу рисков.

Находим матрицу рисков.

Риск – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий. Максимальный выигрыш в j-м столбце $b_j = \max(a_{ij})$ характеризует благоприятность состояния природы.

1. Рассчитываем 1-й столбец матрицы рисков.

$r_{11} = 24 - 18 = 6$; $r_{21} = 24 - 24 = 0$; $r_{31} = 24 - 23 = 1$;

2. Рассчитываем 2-й столбец матрицы рисков.

$r_{12} = 31 - 26 = 5$; $r_{22} = 31 - 27 = 4$; $r_{32} = 31 - 31 = 0$;

3. Рассчитываем 3-й столбец матрицы рисков.

$r_{13} = 45 - 39 = 6$; $r_{23} = 45 - 39 = 6$; $r_{33} = 45 - 45 = 0$;

A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	6	5	6
A_2	0	4	6
A_3	1	0	0

Пункт 3.

Найти оптимальные стратегии статистика по максиминному критерию крайнего пессимизма (Вальда), критерию минимаксного риска (Сэвиджа) и соответствующую цену игры.

Критерий Вальда.

По критерию Вальда за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е.

$a = \max(\min a_{ij})$

Критерий Вальда ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает пессимистическую оценку ситуации.

A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\min(a_{ij})$
A_1	18	26	39	18
A_2	24	27	39	24
A_3	23	31	45	23

Выбираем из (18; 24; 23) максимальный элемент max=24

Вывод: выбираем стратегию N=2.

Критерий Севиджа.

Критерий минимального риска Севиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается:

$a = \min(\max r_{ij})$

Критерий Сэвиджа ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает пессимистическую оценку ситуации.

Находим матрицу рисков.

Риск – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий. Максимальный выигрыш в j-м столбце $b_j = \max(a_{ij})$ характеризует благоприятность состояния природы.

1. Рассчитываем 1-й столбец матрицы рисков.

$r_{11} = 24 - 18 = 6$; $r_{21} = 24 - 24 = 0$; $r_{31} = 24 - 23 = 1$;

2. Рассчитываем 2-й столбец матрицы рисков.

$r_{12} = 31 - 26 = 5$; $r_{22} = 31 - 27 = 4$; $r_{32} = 31 - 31 = 0$;

3. Рассчитываем 3-й столбец матрицы рисков.

$r_{13} = 45 - 39 = 6$; $r_{23} = 45 - 39 = 6$; $r_{33} = 45 - 45 = 0$;

A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	6	5	6
A_2	0	4	6
A_3	1	0	0

Результаты вычислений оформим в виде таблицы.

A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\max(a_{ij})$
A_1	6	5	6	6
A_2	0	4	6	6
A_3	1	0	0	1

Выбираем из (6; 6; 1) минимальный элемент min=1

Вывод: выбираем стратегию N=3.

Пункт 4. Какие оптимальные рекомендации получит руководство предприятия?

Заключение: Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия A_3.

c_1=23, c_2=31, c_3=45 ден. ед.

Задание 5

Задача о назначениях

В цехе предприятия имеются 5 универсальных станков, которые могут выполнять четыре вида работ. Производительность каждого станка при выполнении каждой работы задается матрицей С. Найти наиболее рациональное распределение работ между станками, максимизирующее суммарную производительность станков, если каждый станок можно загружать только одной работой.

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 4 & 1 \\ 8 & 10 & 3 & 1 \\ 10 & 2 & 13 & 1 \\ 11 & 3 & 4 & 2 \\ 12 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение:

Составим математическую модель задачи:

Пусть

$$x_{ij} = \begin{cases} если i - й станок выполняет j - ю работу \\ 0, иначе \end{cases}$$

i = 1,2,3,4,5, j = 1,2,3,4

Каждый станок должен выполнять не более одной работы

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \le 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \le 1 \end{cases}$$

Каждая работа должна выполняться только одним станком:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1 \end{cases}$$

Условие неотрицательности переменных:

$x_{ij} \ge 0$, i = 1,2,3,4,5, j = 1,2,3,4

Суммарная производительность:

$Z = 9x_{11} + 9x_{12} + 4x_{13} + 1x_{14} + 8x_{21} + 10x_{22} + 3x_{23} + 1x_{24} + 10x_{31} + 2x_{32} + 13x_{33} +$

$+ 1x_{34} + 11x_{41} + 3x_{42} + 4x_{43} + 2x_{44} + 12x_{51} + 1x_{52} + 4x_{53} + 6x_{54} \rightarrow max$

Т.к. матрица С не квадратная, то введем фиктивный 5-ый вид работ с нулевыми производительностями для всех станков.

Исходная матрица имеет вид:

9	9	4	1
8	10	3	1
10	2	13	1
11	3	4	2
12	1	4	6

Модифицируем матрицу умножением всех элементов на (-1) и затем сложением их с максимальным элементом матрицы (13) так, чтобы матрица не содержала бы отрицательных элементов:

4	4	9	12
5	3	10	12
3	11	0	12
2	10	9	11
1	12	9	7

Для устранения дисбаланса добавляем дополнительные столбцы.

Шаг №1.

1. Проводим редукцию матрицы по строкам. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

4	4	9	12	0	
5	3	10	12	0	
3	11	0	12	0	**0**
2	10	9	11	0	
1	12	9	7	0	

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:

3	1	9	5	0
4	0	10	5	0
2	8	0	5	0
1	7	9	4	0
0	9	9	0	0
1	**3**	**0**	**7**	**0**

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

2. Методом проб и ошибок проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.

Фиксируем нулевое значение в клетке (1, 5). Другие нули в строке 1 и столбце 5 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (2, 2). Другие нули в строке 2 и столбце 2 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (3, 3). Другие нули в строке 3 и столбце 3 вычеркиваем.

В итоге получаем следующую матрицу:

3	1	9	5	**[0]**
4	**[0]**	10	5	[-0-]
2	8	**[0]**	5	[-0-]
1	7	9	4	[-0-]
0	9	9	0	[-0-]

Поскольку расположение нулевых элементов в матрице не позволяет образовать систему из 5-х независимых нулей (в матрице их только 3), то **решение недопустимое.**

3. Проводим модификацию матрицы. Вычеркиваем строки и столбцы с возможно большим количеством нулевых элементов:

столбец 5,

строку 5,
строку 2,
столбец 3,
Получаем сокращенную матрицу (элементы выделены):

3	**1**	9	**5**	0
4	0	10	5	0
2	**8**	0	**5**	0
1	**7**	9	**4**	0
0	9	9	0	0

Минимальный элемент сокращенной матрицы (min(3, 1, 5, 2, 8, 5, 1, 7, 4) = 1) вычитаем из всех ее элементов:

2	**0**	9	**4**	0
4	0	10	5	0
1	**7**	0	**4**	0
0	**6**	9	**3**	0
0	9	9	0	0

Затем складываем минимальный элемент с элементами, расположенными на пересечениях вычеркнутых строк и столбцов:

2	0	9	4	0
4	0	**11**	5	**1**
1	7	0	4	0
0	6	9	3	0
0	9	**10**	0	**1**

Шаг №2.

1. Проводим редукцию матрицы по строкам. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

2	0	9	4	0	**0**
4	0	11	5	1	**0**
1	7	0	4	0	**0**
0	6	9	3	0	**0**
0	9	10	0	1	**0**

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:

2	0	9	4	0
4	0	11	5	1
1	7	0	4	0
0	6	9	3	0
0	9	10	0	1
0	**0**	**0**	**0**	**0**

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

2. Проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.

Фиксируем нулевое значение в клетке (1, 5). Другие нули в строке 1 и столбце 5 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (2, 2). Другие нули в строке 2 и столбце 2 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (3, 3). Другие нули в строке 3 и столбце 3 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (4, 1). Другие нули в строке 4 и столбце 1 вычеркиваем.

Фиксируем нулевое значение в клетке (5, 4). Другие нули в строке 5 и столбце 4 вычеркиваем.

В итоге получаем следующую матрицу:

2	[-0-]	9	4	**[0]**
4	**[0]**	11	5	1
1	7	**[0]**	4	[-0-]
[0]	6	9	3	[-0-]
[-0-]	9	10	**[0]**	1

Количество найденных нулей равно k = 5. В результате получаем эквивалентную матрицу Сэ:

2	0	9	4	0
4	0	11	5	1
1	7	0	4	0
0	6	9	3	0
0	9	10	0	1

4. Определяем матрицу назначения X, которая позволяет по аналогично расположенным элементам исходной матрицы (в квадратах) вычислить максимальное значение прибыли.

2	[-0-]	9	4	**[0]**
4	**[0]**	11	5	1
1	7	**[0]**	4	[-0-]
[0]	6	9	3	[-0-]
[-0-]	9	10	**[0]**	1

Cmax = + 10 + 13 + 11 + 6 = 40

Интерпретация решения:

Первый станок не будет выполнять никакой работы, второй должен выполнять 2-ю работу, третий станок – 3-ю работу, четвертый станок – 1-ю работу, пятый станок должен выполнять 4-ю работу. При

таком распределении работ производительность будет максимальна и составит 40 единиц.

Задание 6

Рассматривается пространство трех товаров.

Дан вектор цен $p = (7 \quad 2 \quad 3)$ и доход потребителя M=43

Требуется описать с помощью системы неравенств бюджетное множество B и изобразить его графически.

Решение:

Бюджетное множество B-это множество наборов товаров, которые может себе позволить приобрести при данных ценах потребитель, обладающий доходом M (при этом предполагается, что тратить все деньги необязательно)

Поэтому бюджетное множество описывается системой неравенств

$$\begin{cases} p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 \leq M \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

Подставим в систему данные задачи: $p = (7 \quad 2 \quad 3)$

$p_1 = 7 \quad p_2 = 2 \quad p_3 = 3$ M=43

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 43 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

Построим бюджетное множество

Для этого определим вершины области построения

Найдем точки пересечения области с координатными осями. Для этого приравняем две координаты к нулю и найдем третью координату.

Если $x_2 = 0, x_3 = 0$, то

$7 \cdot x_1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 43$

$7 \cdot x_1 = 43 \qquad x_1 = \frac{43}{7}$

A($\frac{43}{7}$,0,0)

Если $x_1 = 0, x_3 = 0$, то

$7 \cdot 0 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot 0 = 43$

$2 \cdot x_2 = 43$

$x_2 = \frac{43}{2}$

B($0, \frac{43}{2}, 0$)

Если $x_1 = 0, x_2 = 0,$ то

$7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot x_3 = 43$

$3 \cdot x_3 = 43$

$x_3 = \frac{43}{3}$

C(0,0,$\frac{43}{3}$)

Отметим эти вершины на осях координат
Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно.

Построим граничные прямые.

Для этого приравняем только одну из координат к нулю

Если $x_3 = 0$, то

$$7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 43$$

x_1	0	$\frac{43}{7}$
x_2	$\frac{43}{2}$	0

Если $x_2 = 0$, то

$$7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_3 = 43$$

x_1	0	$\frac{43}{7}$
x_3	$\frac{43}{3}$	0

Если $x_1 = 0$, то

$$2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 43$$

x_2	0	$\frac{43}{2}$
x_3	$\frac{43}{3}$	0

При изображении бюджетного множества графически получаем трехгранную пирамиду

$$B = \{X = (x_1; x_2; x_3) \in R^3 | 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 43; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

,

Раздел II ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи 1–10. Решить графически задачу линейного программирования.

1.
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 18 \\ 4x_1+3x_2\le 24 \\ 2x_1+x_2\ge 2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=x_1+x_2\to \max$$

2.
$$\begin{cases} x_1+x_2\le 4 \\ 3x_1+x_2\ge 3 \\ x_1+3x_2\le 6 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=x_1+2x_2\to \max$$

3.
$$\begin{cases} x_1-x_2\le 2 \\ x_1+4x_2\le 12 \\ x_1\le 3 \\ 3x_1+2x_2\ge 6 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=4x_1+x_2\to \max$$

4.
$$\begin{cases} x_1-x_2\le 2 \\ x_1+x_2\le 4 \\ x_1+3x_2\le 5 \\ 2x_1+x_2\ge 2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=4x_1+x_2\to \max$$

5.
$$\begin{cases} x_1+3x_2\le 15 \\ 4x_1-x_2\le 8 \\ 2x_1+3x_2\ge 6 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=x_1+2x_2\to \max$$

6.
$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 8 \\ 2x_1-x_2\le 4 \\ x_1+2x_2\ge 2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=4x_1+x_2\to \max$$

27.
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 18 \\ x_1+4x_2\le 24 \\ x_1+3x_2\ge 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=x_1+x_2\to \max$$

28.
$$\begin{cases} 2x_1-x_2\le 2 \\ x_1+x_2\le 4 \\ x_1+3x_2\ge 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=3x_1+x_2\to \max$$

9.
$$\begin{cases} x_1+4x_2\ge 4 \\ 3x_1+2x_2\le 18 \\ 4x_1+x_2\ge 4 \\ x_1+2x_2\le 10 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=x_1+x_2\to \max$$

10.
$$\begin{cases} 3x_1+x_2\le 12 \\ x_1+3x_2\le 12 \\ x_1+2x_2\ge 3 \\ 2x_1+x_2\ge 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$
$$z=2x_1+3x_2\to \max$$

Задачи 11–20. На трех базах A_1, A_2, A_3 имеется однородный груз в количестве a_1, a_2, a_3 единиц. Этот груз нужно перевезти в пять пунктов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 единиц соответственно. Затраты на перевозку груза между пунктами поставок и потребления заданы матрицей тарифов C:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \end{pmatrix}.$$

Спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

11.

$a_1=250,\ a_2=200,\ a_3=150,$
$b_1=180,\ b_2=120,\ b_3=80,$
$b_4=115,\ b_5=105,$

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 8 & 22 & 10 & 15 \\ 16 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 18 & 26 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

12.

$a_1=400,\ a_2=300,\ a_3=300,$
$b_1=190,\ b_2=180,\ b_3=220,$
$b_4=225,\ b_5=185,$

$$C=\begin{pmatrix} 13 & 9 & 16 & 12 & 17 \\ 14 & 25 & 13 & 14 & 22 \\ 20 & 18 & 14 & 19 & 21 \end{pmatrix}.$$

13.

$a_1=150,\ a_2=230,\ a_3=220,$
$b_1=170,\ b_2=130,\ b_3=90,$
$b_4=100,\ b_5=110,$

$$C=\begin{pmatrix} 14 & 6 & 5 & 9 & 5 \\ 17 & 10 & 8 & 11 & 4 \\ 15 & 11 & 7 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

14.

$a_1=200,\ a_2=240,\ a_3=160,$
$b_1=130,\ b_2=170,\ b_3=100,$
$b_4=90,\ b_5=110,$

$$C=\begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

15.

$a_1=300,\ a_2=400,\ a_3=300,$
$b_1=170,\ b_2=230,\ b_3=220,$
$b_4=180,\ b_5=200,$

$$C=\begin{pmatrix}15 & 13 & 19 & 17 & 8\\ 7 & 10 & 15 & 6 & 14\\ 24 & 20 & 19 & 18 & 16\end{pmatrix}.$$

16.

$a_1=240,\ a_2=400,\ a_3=360,$
$b_1=300,\ b_2=160,\ b_3=220,$
$b_4=180,\ b_5=140,$

$$C=\begin{pmatrix}9 & 15 & 35 & 20 & 8\\ 15 & 35 & 12 & 10 & 6\\ 16 & 19 & 36 & 15 & 24\end{pmatrix}.$$

17.

$a_1=270,\ a_2=300,\ a_3=230,$
$b_1=170,\ b_2=110,\ b_3=200,$
$b_4=140,\ b_5=180,$

$$C=\begin{pmatrix}25 & 12 & 7 & 18 & 10\\ 35 & 13 & 12 & 15 & 3\\ 30 & 16 & 11 & 25 & 16\end{pmatrix}.$$

18.

$a_1=150,\ a_2=210,\ a_3=140,$
$b_1=160,\ b_2=60,\ b_3=100,$
$b_4=80,\ b_5=100,$

$$C=\begin{pmatrix}8 & 20 & 6 & 11 & 16\\ 5 & 14 & 12 & 15 & 18\\ 15 & 22 & 11 & 13 & 20\end{pmatrix}.$$

19.

$a_1=200,\ a_2=150,\ a_3=150,$
$b_1=100,\ b_2=90,\ b_3=80,$
$b_4=120,\ b_5=110,$

$$C=\begin{pmatrix}12 & 15 & 20 & 14 & 18\\ 14 & 8 & 15 & 11 & 20\\ 20 & 15 & 25 & 12 & 19\end{pmatrix}.$$

20.

$a_1=350,\ a_2=400,\ a_3=250,$
$b_1=175,\ b_2=225,\ b_3=240,$
$b_4=160,\ b_5=200,$

$$C=\begin{pmatrix}5 & 15 & 18 & 16 & 8\\ 6 & 10 & 15 & 6 & 4\\ 25 & 20 & 10 & 15 & 18\end{pmatrix}.$$

Задачи 21–30.

Составить экономико-математическую модель. Найти решение задачи линейного программирования при помощи средств Excel на ПК.

21. Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек, жилетов и шапочек чистую шерсть, силон, нитрон, запасы которых составляют соответственно 1000, 500 и 400 кг. Количество пряжи каждого вида, необходимой для изготовления 10 изделий, а также прибыль, получаемая от их реализации, приведены в таблице. Установить план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

Вид сырья	Затраты пряжи на 10 шт. изделий, кг			
	Свитера	Кофточки	Жилеты	Шапочки
Шерсть	4	2	3	1
Силон	2	1	1,5	0,5
Нитрон	1	1	0,5	0,5
Прибыль	6	5	5	1

22. Торговое предприятие реализует товары T_1, T_2, T_3, T_4, используя при этом площади торговых залов, оборудование и время обсуживающего персонала. Затраты на продажу одной партии товара каждого вида, их объемы и прибыль, получаемая от реализации каждой партии товара, приведены в таблице. Найти оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую предприятию максимальную прибыль.

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты ресурсов на товары			
		T_1	T_2	T_3	T_4
Время, чел.-ч	370	0,5	0,7	0,6	0,5
Оборудование, маш.-ч	100	0,3	0,4	0,2	0,3
Площадь, $м^2$	90	0,1	0,3	0,2	0,2
Прибыль, ден. ед.		5	8	6	6

23. На предприятии освоены четыре технологии производства основной продукции. В таблице указаны запасы потребляемых ресурсов, затраты их в течение месяца и объемы выпуска готовой продукции. Установить такое время работы предприятия по каждой

технологии, при котором выпуск продукции будет максимальным, а расход ресурсов не превысит их наличия.

Ресурсы	Запасы ресурсов	**Расход ресурса при технологии**			
		I	II	III	IV
P_1	20	2	2	1	5
P_2	16	4	1	4	1
P_3	22	2	3	1	2
Объем выпуска продукции		6	3	4	5

24. Механический завод использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку детали можно вести по четырем технологиям. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станкочасах), затраты времени на изготовление детали (в часах) и прибыль от выпуска каждой детали приведены в таблице. Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Оборудование	Фонд времени, ч	Технология			
		I	II	III	IV
Токарное	37	3	1	1	2
Фрезерное	20	2	2	3	0
Сварочное	30	0	1	1	4
Прибыль, ден. ед.		11	6	9	6

25. При подкормке посева нужно внести на 1 га почвы не менее 10 ед. химического вещества А, 25 ед. вещества Б, 20 ед. вещества В. Сельскохозяйственное предприятие закупает комбинированные удобрения четырех видов (I,II,III,IV). В таблице указаны содержание химических веществ и цена за единицу массы каждого вида удобрений. Минимизировать расходы по закупке необходимого количества удобрений.

Химическое вещество	Содержание вещества в единице массы удобрения			
	I	II	III	IV
А	1	5	2	1
Б	12	3	3	2
В	4	4	2	2
Цена	5	3	2	3

26. Имеющийся фонд материалов $М_1$, $М_2$, $М_3$ нужно распределить между изготовителями продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ так, чтобы получить максимальную прибыль. Нормы расходов материалов, запасы и прибыль, получаемая за единицу продукции, приведены в таблице.

Материал	Фонд материалов	Продукция			
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
$М_1$	50000	0,7	0,9	1,5	2,3
$М_2$	28000	1,4	0,3	0,7	2,5
$М_3$	40000	0,5	2,1	1,8	0,7
Прибыль		5	7	6	9

27. Предприятие может выпускать продукцию четырех видов – $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, сбыт любого количества которой обеспечен. При производстве продукции расходуются различные ресурсы, их запасы и удельные затраты приведены в таблице, там же указана и цена продукции. Найти оптимальный план выпуска продукции, максимизирующий выручку предприятия от ее реализации.

Ресурсы	Запасы ресурса	Нормы расходов			
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
Трудовые ресурсы	4800	4	2	2	2
Полуфабрикаты	2400	2	10	6	0
Станочное оборудование	1500	1	0	2	1
Цена единицы продукции		65	70	60	120

28. В суточном рационе кормления крупного рогатого скота должно быть не менее 20 кормовых единиц, не менее 2000 г белков и не менее 100 г кальция. Для кормления используют сено, силос, корнеплоды и концентраты. Содержание питательных веществ в 1 кг каждого вида корма, а также его себестоимость представлены в таблице. Составить кормовой рацион минимальной стоимости.

Содержание питательных веществ в 1 кг корма	Корм			
	Сено	Силос	Корнеплоды	Концентрат
Кормовая единица	0,5	0,2	6	0,8
Белки, г	40	10	12	200
Кальций, г	5	4	3	1
Себестоимость 1 кг корма, ден. ед.	2	1	2	4

29. Имеется четыре проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома каждого проекта даны в таблице. Определить, сколько домов каждого проекта нужно построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

Стройматериалы	Запасы стройматериалов, $м^3$	Расход стройматериалов для проектов, $м^3$			
		I	II	III	IV
Кирпич силикатный	1365	7	3	2	2
Кирпич красный	1245	6	3	3	2
Пиломатериалы	650	1	2	5	5
Полезная площадь, $м^2$		70	50	60	50

30. Сельскохозяйственное предприятие может произвести закупку техники четырех марок для выполнения трех видов работ. Производительность техники, общий объем работ и стоимость каждого трактора приведены в таблице. Найти оптимальный вариант приобретения техники, обеспечивающий выполнение всех работ при минимальных затратах на технику.

Вид работ	Объем работ	Производительность техники для каждой модели			
		M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	80	4	3	2	5
P_2	60	8	1	5	1
P_3	40	1	3	4	2
Стоимость единицы техники		7	2	5	3

Задачи 31–40. Решить задачу распределения инвестиций методом динамического программирования

Задача распределения инвестиций: распределить B единиц средств среди n предприятий, доход $g_i(x_j)$, i=1,2,…, n от которых в зависимости от количества вложенных средств x_i , j=1,2,…,m задается матрицей (nxm+1) (дана в таблицах вариантов задания), таким образом, чтобы суммарный доход со всех предприятий был максимальным. Состояние системы перед каждым шагом определяется числом еще не распределенных средств.

Указание: разбить процесс оптимизации на n шагов так, чтобы на каждом k-м шаге оптимизировать инвестирование не всех предприятий, а только предприятий с k-го по n-ое. При этом считаем, что в остальные предприятия (с первого по (k-1)-ое) тоже вкладываются средства, и поэтому на инвестирование предприятий с k –го по n-ое остаются не все средства, а меньшая сумма $c_k \le B$.

31 . n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$
0	0	0	0
1	2,2	2	2,8
2	3	3,2	5,4
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

32. n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$
0	0	0	0
1	2,4	2,1	2,9
2	3,1	3,5	5,7
3	4,2	4,9	6,6
4	5,4	6,4	6,9
5	6,1	6,7	7,2

33.n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$

34.n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$

0	0	0	0
1	2	1,8	2,5
2	2,8	2,9	5,1
3	3,9	4,5	6
4	5,1	5,9	6,3
5	5,6	6,1	6,6

35. n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$
0	0	0	0
1	1,8	1,6	2,4
2	2,6	2,8	5,1
3	3,7	4,4	6,1
4	4,8	5,8	6,3
5	5,5	6,1	6,5

37 . n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$
0	0	0	0
1	2,2	2	2,8
2	3	3,2	5,4
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

39.n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$
0	0	0	0
1	2	1,8	2,5
2	2,8	2,9	5,1
3	3,9	4,5	6
4	5,1	5,9	6,3
5	5,6	6,1	6,6

0	0	0	0
1	2,6	2,4	3,2
2	3,3	3,6	5,8
3	4,5	5,2	6,9
4	5,5	6,6	7,1
5	6,3	6,8	7,3

36.n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$
0	0	0	0
1	2	1,8	2,5
2	2,8	2,9	5,1
3	3,9	4,5	6
4	5,1	5,9	6,3
5	5,6	6,1	6,6

38. n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$
0	0	0	0
1	2,4	2,1	2,9
2	3,1	3,5	5,7
3	4,2	4,9	6,6
4	5,4	6,4	6,9
5	6,1	6,7	7,2

40.n=3, m=5

x_i	$g_1(x_j)$	$g_2(x_j)$	$g_3(x_j)$
0	0	0	0
1	2,6	2,4	3,2
2	3,3	3,6	5,8
3	4,5	5,2	6,9
4	5,5	6,6	7,1
5	6,3	6,8	7,3

Задачи 41–50.

1. По матрице инцидентности нарисовать граф.
2. Охарактеризовать граф.
3. Назвать специальные вершины графа.
4. Вычислить полустепени вершин.
5. Выписать цикл, цепь, простой цикл, простую цепь.

41.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	0	-1	-1	0
V_2	1	-1	0	0	0	0
V_3	0	1	-1	0	1	1
V_4	0	0	0	1	0	0
V_5	0	0	0	0	0	0
V_6	0	0	1	0	0	0

42.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	0	-1	0	0
V_2	1	-1	0	0	-1	1
V_3	0	1	-1	0	0	0
V_4	0	0	0	0	0	0
V_5	0	0	0	1	1	0
V_6	0	0	1	0	0	0

43

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	-1	1	0	0
V_2	0	0	0	0	0	0
V_3	1	-1	0	0	1	0
V_4	0	0	1	0	-1	0
V_5	0	0	0	0	0	-1
V_6	0	1	0	0	0	1

44

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	-1	1	0	0	0
V_2	0	0	0	-1	-1	0
V_3	0	0	0	0	1	0
V_4	0	1	0	1	0	-1
V_5	1	0	0	0	0	1
V_6	0	0	0	0	0	0

45.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	0	-1	-1	0
V_2	1	-1	0	0	0	0
V_3	0	1	-1	0	1	1
V_4	0	0	0	1	0	0
V_5	0	0	0	0	0	0
V_6	0	0	1	0	0	0

46.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	0	-1	0	0
V_2	1	-1	0	0	-1	1
V_3	0	1	-1	0	0	0
V_4	0	0	0	0	0	0
V_5	0	0	0	1	1	0
V_6	0	0	1	0	0	0

47

48

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	-1	1	0	0
V_2	0	0	0	0	0	0
V_3	1	-1	0	0	1	0
V_4	0	0	1	0	-1	0
V_5	0	0	0	0	0	-1
V_6	0	1	0	0	0	1

49

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	0	-1	-1	0
V_2	1	-1	0	0	0	0
V_3	0	1	-1	0	1	1
V_4	0	0	0	1	0	0
V_5	0	0	0	0	0	0
V_6	0	0	1	0	0	0

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	-1	1	0	0	0
V_2	0	0	0	-1	-1	0
V_3	0	0	0	0	1	0
V_4	0	1	0	1	0	-1
V_5	1	0	0	0	0	1
V_6	0	0	0	0	0	0

50

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	0	-1	0	0
V_2	1	-1	0	0	-1	1
V_3	0	1	-1	0	0	0
V_4	0	0	0	0	0	0
V_5	0	0	0	1	1	0
V_6	0	0	1	0	0	0

Задачи 51–60.

Решить задачу для СМО с отказами:

В вычислительный центр с m ЭВМ поступают заказы на вычислительные работы. Если работают все m ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается. Пусть среднее время работы с одним заказом составляет $T_{обс}^{ср}$ часов. Интенсивность потока заявок равна λ (1/ч). Найти вероятность отказа $P_{отк}$ и $m_з$ – среднее число занятых ЭВМ.

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
m	3	3	2	2	2	3	3	2	2	2
λ	0,25	0,2	0,2	0,15	0,1	0,25	0,2	0,2	0,15	0,1
$T_{обс}^{с}$	3	3	3	2	2	3	3	3	2	2

Задачи 61–70.

1. Решить игру в чистых стратегиях.
2. Выписать седловые точки.
3. Вычислить цену игры.

61)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	4	1	2
A_2	0	5	0	3
A_3	1	3	1	3

62)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-3	-2	-1
A_2	2	5	4	3
A_3	2	3	2	3

63)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	-2	-1	0
A_2	3	7	5	4
A_3	3	6	3	5

64)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	6	3	4
A_2	2	8	1	4
A_3	3	4	3	7

65

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	6	4
A_2	1	2	0	1
A_3	2	6	4	7

66)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	0	9	8
A_2	2	5	7	1
A_3	2	3	2	3

67)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	3	5	-1
A_2	2	9	4	3
A_3	2	5	2	7

68)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	8	3	4
A_2	2	7	5	4
A_3	3	4	3	7

69)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	3	4
A_2	2	5	4	4
A_3	3	4	9	7

70

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	7	1	4
A_2	0	5	0	3
A_3	1	2	9	3

Задачи 71–80.

В пространстве трех товаров рассмотреть бюджетное множество при векторе цен P и доходе Q. Описать его и его границу с помощью обычных и векторных неравенств и равенств, изобразить бюджетное множество и его границу графически. Вычислите объем бюджетного множества. Данные соответствующие вашему варианту брать в таблице:

№	P	Q	№	P	Q	№	P	Q
71	$\begin{pmatrix}7\\3\\2\end{pmatrix}$	42	72.	$\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$	24	73.	$\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$	60
74.	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	60	75.	$\begin{pmatrix}5\\8\\4\end{pmatrix}$	120	76.	$\begin{pmatrix}4\\9\\6\end{pmatrix}$	36
77.	$\begin{pmatrix}3\\8\\5\end{pmatrix}$	120	78.	$\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$	48	79.	$\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix}$	90
80.	$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$	48						

Задачи 81–90.

Даны вектор C, непроизводственного потребления и матрица A, межотраслевого баланса. Найти вектор валового выпуска, обеспечивающий данный вектор потребления. Данные соответствующие вашему варианту брать в таблице:

№	C	A	№	C	A
81.	$\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2/5 & 1/5\\1/8 & 1/4\end{pmatrix}$	82.	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/3 & 1/4\\1/4 & 1/4\end{pmatrix}$
83.	$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/3 & 1/6\\1/3 & 1/4\end{pmatrix}$	84.	$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\1/4 & 1/4\end{pmatrix}$
85.	$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2/5 & 1/5\\1/3 & 1/3\end{pmatrix}$	86.	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/4 & 1/8\\1/5 & 2/5\end{pmatrix}$
87.	$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/4 & 1/8\\1/4 & 1/3\end{pmatrix}$	88.	$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/5 & 2/5\\1/4 & 1/3\end{pmatrix}$
89.	$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/4 & 1/2\\1/3 & 1/3\end{pmatrix}$	90.	$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/8 & 1/2\\1/2 & 1/4\end{pmatrix}$

Задачи 91-100.

Решить задачу о назначениях с матрицей:

91

$$C=\begin{pmatrix}10 & 11 & 12 & 13 & 10\\1 & 2 & 5 & 7 & 10\\3 & 4 & 6 & 8 & 11\\7 & 6 & 5 & 4 & 12\\1 & 1 & 2 & 3 & 13\end{pmatrix}$$

$$L^*=44$$

92

$$C=\begin{pmatrix}16 & 11 & 12 & 13 & 10\\6 & 5 & 4 & 3 & 10\\5 & 6 & 7 & 8 & 11\\4 & 5 & 6 & 7 & 12\\3 & 4 & 5 & 6 & 13\end{pmatrix}$$

$$L^*=48$$

93

94

$$C=\begin{pmatrix}10 & 11 & 12 & 13 & 10\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 10\\ 2 & 1 & 3 & 1 & 11\\ 3 & 2 & 1 & 2 & 12\\ 3 & 2 & 1 & 1 & 13\end{pmatrix}$$

$$L^*=34$$

$$C=\begin{pmatrix}16 & 11 & 12 & 13 & 10\\ 7 & 6 & 5 & 4 & 10\\ 6 & 7 & 5 & 4 & 11\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 12\\ 4 & 5 & 6 & 7 & 13\end{pmatrix}$$

$$L^*=49$$

95

$$C=\begin{pmatrix}10 & 11 & 12 & 13 & 10\\ 2 & 1 & 2 & 3 & 10\\ 1 & 2 & 3 & 2 & 11\\ 1 & 2 & 2 & 3 & 12\\ 4 & 5 & 6 & 2 & 13\end{pmatrix}$$

$$L^*=35$$

96

$$C=\begin{pmatrix}10 & 11 & 12 & 13 & 10\\ 6 & 7 & 6 & 5 & 10\\ 1 & 6 & 5 & 6 & 11\\ 1 & 2 & 8 & 9 & 12\\ 1 & 2 & 3 & 8 & 13\end{pmatrix}$$

$$L^*=46$$

97

$$C=\begin{pmatrix}10 & 11 & 12 & 13 & 10\\ 4 & 5 & 6 & 7 & 10\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 11\\ 3 & 5 & 4 & 5 & 12\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 13\end{pmatrix}$$

$$L^*=42$$

98

$$C=\begin{pmatrix}16 & 11 & 12 & 13 & 14\\ 7 & 6 & 4 & 3 & 10\\ 1 & 6 & 2 & 1 & 11\\ 1 & 2 & 5 & 3 & 12\\ 1 & 3 & 6 & 4 & 13\end{pmatrix}$$

$$L^*=44$$

99

$$C=\begin{pmatrix}15 & 16 & 17 & 18 & 19\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 16\\ 2 & 1 & 5 & 6 & 17\\ 1 & 2 & 1 & 7 & 18\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 19\end{pmatrix}$$

$$L^*=49$$

100

$$C=\begin{pmatrix}15 & 16 & 17 & 18 & 19\\ 3 & 1 & 2 & 3 & 18\\ 2 & 3 & 7 & 5 & 17\\ 1 & 2 & 3 & 8 & 16\\ 5 & 4 & 3 & 3 & 15\end{pmatrix}$$

$$L^*=54$$

Раздел III КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ»

1. Предмет математического программирования. Примеры экономических задач, решаемых методами математического программирования.
2. Классификация основных методов математического программирования.
3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Симплексные таблицы.
4. Экономическая интерпретация элементов симплексной таблицы.
5. Улучшение опорного решения.
6. Определение ведущих столбца и строки.
7. Выбор начального допустимого базисного решения.
8. Введение искусственных переменных.
9. Вырожденные задачи линейного программирования.
10. Зацикливание и его предотвращение.
11. Двойственность в линейном программировании.
12. Двойственные задачи.
13. Экономическая интерпретация пары двойственных задач.
14. Теоремы двойственности, их экономическая интерпретация.
15. Транспортные задачи. Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи.
16. Метод потенциалов.
17. Основные способы построения начального опорного решения.
18. Транспортные задачи с нарушенным балансом производства и потребления.
19. Транспортные задачи с дополнительными условиями.
20. Целочисленное программирование
21. Постановка задачи ЦП.
22. Примеры целочисленных моделей.
23. Методы решения задач целочисленного программирования.
24. Метод Гомори.
25. Метод ветвей и границ.
26. Постановка задачи о коммивояжере.
27. Понятие о приближенных методах.
28. Нелинейное программирование.
29. Методы одномерной оптимизации.
30. Унимодальные функции.
31. Методы поиска.
32. Методы дихотомии и золотого сечения.
33. Общая задача нелинейного программирования.
34. Градиентные методы безусловной оптимизации.

35. Выпуклое программирование.
36. Метод штрафов.
37. Теорема Куна-Таккера, ее связь с теорией двойственности в линейном программировании.
38. Динамическое программирование. Постановка задачи ДП.
39. Основные определения.
40. Принцип оптимальности.
41. Рекуррентные уравнения Беллмана.
42. Примеры решения задач математического программирования методом Беллмана.
43. Сетевое планирование. Сеть проекта.
44. Табличный метод сетевого планирования
45. Диаграмма Ганта
46. Критический путь, время завершения проекта.
47. Резервы событий, резервы операций.
48. Системы массового обслуживания (СМО). СМО одноканальные и многоканальные
49. СМО с отказами
50. СМО с неограниченной очередью
51. СМО с Ограниченной очередью
52. Теория игр. Игра как математическая модель конфликта.
53. Основные понятия теории игр.
54. Классификация игр.
55. Примеры бескоалиционных игр.
56. Антагонистические игры.
57. Матричные игры.
58. Смешанные стратегии.
59. Графоаналитический метод решения игр.
60. Матричные игры и линейное программирование.
61. Определение риска. Примеры. Классификация рисков.
62. Определение неопределенности и примеры.
63. Методы принятия решений в условиях неопределенности и в условиях риска
64. Оценка эффективности принятия решений и выбранной модели. Понятие эффекта внешнего и внутреннего. Примеры
65. Понятие эффективности решений. Примеры эффективных и неэффективных решений.
66. Оценка эффективности принятия решений .
67. Оценка эффективности выбранной модели

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под общ. Ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 656 с.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов. М.: ЮНИТИ, 2009.
3. Красс М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник/М.С. Красс,Б.П. Чупрынов; под ред. М.С. Красса .- М. : Финансы и статистика, 2007.- 544 с.
4. Кузнецов,А.В. Высшая математика: математическое программирование: учебник /А.В.Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И.Холод; под общ .ред. А.В.Кузнецова .- СПб. : Лань, 2010.- 352 с.

Дополнительная литература:

1. Дмитриев В.Г., Дорошева Е.И., Савинов Г.В., Сорокина О.А, Основы линейного программирования: Учебное пособие / Под ред. Е.З. Хотимской. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. – 95 с.
2. Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. Математические методы и модели в управлении. 2005.
3. Мазалов,В.В. Математическая теория игр и приложения: учебное пособие /В.В. Мазалов .- СПб. : Лань, 2010.- 448 с.: ил.
4. Соколов А.В., Токарев В.В. Методы оптимальных решений. Т.1. Общие положения. Математическое программирование. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011.

Учебное издание

Коренюгина Людмила Михайловна

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические указания по подготовке к практическим занятиям, в том числе в интерактивной форме, и самостоятельному изучению дисциплины для студентов очной формы обучения по направлению 38.03.01 «Экономика»

Составитель: Л.М.Коренюгина
Редактор: *Н.В.Лалетин*
Оригинал-макет и верстка: Л.М.Коренюгина

Подписано в печать | Сдано в производство

Формат 14,85х21,0 | Бумага потребительская.
Печать трафаретная. | Усл. печ. л. 5,32
Изд. № | Заказ №
Тираж экз. | завод - экз.

Редакционно-издательский центр АНО ВО СИБУП.
660037, Красноярск, ул. Московская, 7 «А», т. 223-33-13