КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Вариант 22

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x+2}{3x^2+5x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+8x+16}-5x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{6x^2-7x+1}$,

г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{5-2x}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}4x\cdot\operatorname{tg}^2(x/5)}{\sin^3(3x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+7}\right)^{3x-4}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x+2}{3x^2+5x+6}$, Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель данной дробно-рациональной функции на x^2 (на х в наивысшей степени). Тогда используя свойства пределов, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+2}{3x^2+5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=\frac{4+0+0}{3+0+0}=\frac{4}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+8x+16}-5x)$, Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим данное выражение на точно такое же, но со знаком плюс между слагаемыми (на сопряженное выражение):

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+8x+16}-5x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{25x^2+8x+16}-5x)(\sqrt{25x^2+8x+16}+5x)}{(\sqrt{25x^2+8x+16}+5x)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{25x^2+8x+16})^2-(5x)^2}{(\sqrt{25x^2+8x+16}+5x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{25x^2+8x+16-25x^2}{(\sqrt{25x^2+8x+16}+5x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{25x^2+8x+16-25x^2}{(\sqrt{25x^2+8x+16}+5x)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{25x^2+8x+16-25x^2}{\sqrt{25x^2+8x+16}+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+16}{\sqrt{25x^2+8x+16}+5x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x}{x}+\frac{16}{x}}{\frac{\sqrt{25x^2+8x+16}}{x}+\frac{5x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x}{x}+\frac{16}{x}}{\frac{\sqrt{25x^2+8x+16}}{x}+\frac{5x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x}{x}+\frac{16}{x}}{\sqrt{\frac{25x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}+\frac{16}{x^2}}+\frac{5x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{16}{x}}{\sqrt{25+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}+5}==$$

$$=\frac{8+\frac{16}{\infty}}{\sqrt{25+\frac{8}{\infty}+\frac{16}{\infty^2}}+5}=\frac{8+0}{\sqrt{25+0+0}+5}=\frac{8}{\sqrt{25}+5}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{6x^2-7x+1}=\left|\dfrac{3(-3)^2-5\cdot(-3)+2}{6\cdot(-3)^2-7\cdot(-3)+1}=\dfrac{0}{0}\right|$, Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

Разложим данное выражение на множители

$3x^2-5x+2=0$

$Д=в^2-4ac=(5)^2-4\cdot 3\cdot 2=25-24=1$

$x_1=\dfrac{-в+\sqrt{Д}}{2a}=\dfrac{5+\sqrt{1}}{2\cdot 3}=\dfrac{5+1}{6}=1$

$x_2=\dfrac{-в-\sqrt{Д}}{2a}=\dfrac{5-\sqrt{1}}{2\cdot 3}=\dfrac{5-1}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$3x^2-5x+2=3\cdot(x-1)\cdot\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

$6x^2-7x+1=0$

$Д=в^2-4ac=(-7)^2-4\cdot 6\cdot 1=49-24=25$

$x_1=\dfrac{-в+\sqrt{Д}}{2a}=\dfrac{7+5}{2\cdot 6}=\dfrac{12}{12}=1$

$x_2=\dfrac{-в-\sqrt{Д}}{2a}=\dfrac{7-5}{2\cdot 6}=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

$6x^2-7x+1=6\cdot(x-1)\cdot\left(x-\dfrac{1}{6}\right)$

Затем сократим дробь на x–1≠0 (x→2, но x≠2):

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{6x^2+9x+9}=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)}{6\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)}{2\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right)}=\frac{\left(1-\frac{2}{3}\right)}{2\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)}=\frac{1}{5}.$$

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{5-2x}-3}=\left|\dfrac{(-2)^2-3\cdot(-2)-10}{\sqrt{5-2\cdot(-2)}-5}=\dfrac{0}{0}\right|$, Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на точно такое же выражение, стоящее в знаменателе, но со знаком плюс между слагаемыми:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{\sqrt{5-2x}-3}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x^2-3x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{\left(\sqrt{5-2x}-3\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x^2-3x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{\left(\sqrt{5-2x}\right)^2-(3)^2}=$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\left(x^2-3x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{5-2x-9} = \lim_{x\to -2} \frac{\left(x^2-3x-10\right)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{-2x-4}$$

$x^2-3x-10=0$

$Д = в^2-4ac = (-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10) = 9+40 = 49$

$$x_1 = \frac{-в+\sqrt{Д}}{2a} = \frac{3+\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{3+7}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-в-\sqrt{Д}}{2a} = \frac{3-\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$x^2-3x-10 = 1\cdot(x-5)\cdot(x+2)$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{1\cdot(x-5)\cdot(x+2)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{-2x-4} = \lim_{x\to -2} \frac{1\cdot(x-5)\cdot(x+2)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{-2(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{1\cdot(x-5)\left(\sqrt{5-2x}+3\right)}{-2} = \frac{1\cdot(-2-5)\left(\sqrt{5-2\cdot(-2)}+3\right)}{-2} = \frac{1\cdot(-7)\left(\sqrt{9}+3\right)}{-2} = \frac{7*6}{2} = 21$$

д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctg\,4x\,\mathrm{tg}^2(x/5)}{\sin^3(3x)} =$ Здесь мы имеем с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. При вычислении данного предела воспользуемся методом эквивалентных бесконечно малых величин.

$$\left|\begin{array}{l} при_x\to 0 \\ arc\,\mathrm{tg}(4x)\approx(4x) \\ \mathrm{tg}(x/5)\approx(x/5) \\ \sin(3x)\approx 3x \end{array}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{4x\cdot(x/5)^2}{(3x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\cdot\frac{x^2}{25}}{27x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot\frac{1}{25}}{27} = \frac{4}{675}$$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+7}\right)^{3x-4}$. Здесь мы имеем с неопределенностью вида 1^{∞}. Преобразуем выражение, стоящее в скобках, следующим образом

$$\frac{2x-3}{2x+7}=1+\frac{2x-3}{2x+7}-1=1+\frac{2x-3-2x-7}{2x+7}=1+\frac{-10}{2x+7}.$$

Тогда исходный предел можно преобразовать так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+7}\right)^{3x-4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-10}{2x+7}\right)^{3x-4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+7}{-10}}\right)^{\frac{2x+7}{-10}\cdot\frac{-10}{2x+7}\cdot(3x-4)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+7}{-10}}\right)^{\frac{2x+7}{-10}\cdot}\right]^{\frac{-10}{2x+7}\cdot(3x-4)}=$$

Предел выражения в квадратных скобках, в соответствии со вторым замечательным пределом, равен

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+7}{-10}}\right)^{\frac{2x+7}{-10}\cdot}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e\approx 2{,}718.$$

В результате получаем

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-10}{2x+7}\cdot(3x-4)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-30x+40}{2x+7}\cdot}$$

$$=e^{-30/2}=e^{-15}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x+3|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-2)^2, & \text{если } 0<x<3,\\ -5, & \text{если } x=3,\\ \log_3 x, & \text{если } 3<x\le 9,\\ 1/(9-x), & \text{если } x>9.\end{cases}$$

Данная функция задана тремя элементарными функциями, определенными на различных интервалах изменения x

Функция непрерывна на каждом интервале

Разрыв возможен только в точках , где меняется аналитическое выражение функции

Для этого найдем односторонние пределы

$$\lim_{x\to\ 0-\Delta} f(x)=\lim_{x\to\ 0-\Delta}|x+3|=0+\Delta+3=3$$

$$\lim_{x\to\ 0+\Delta} f(x)=\lim_{x\to\ 0+\Delta}(x-2)^2=(0+\Delta-2)^2=4$$

$$\lim_{x\to\ 0-\Delta} f(x)\neq\lim_{x\to\ 0+\Delta} f(x)$$

В точке функция терпит разрыв рода

$$\lim_{x\to\ 3-\Delta} f(x)=\lim_{x\to\ 3-\Delta}(x-2)^2=(3-\Delta-2)^2=1$$

$$\lim_{x\to\ 3+\Delta} f(x)=\lim_{x\to\ 3+\Delta}\log_3 x=\log_3(3+\Delta)=1$$

F(3)= -5

$$\lim_{x\to\ 3-\Delta} f(x)=\lim_{x\to\ 3+\Delta} f(x)\neq f(3)$$

В точке x=3 функция терпит устранимый разрыв

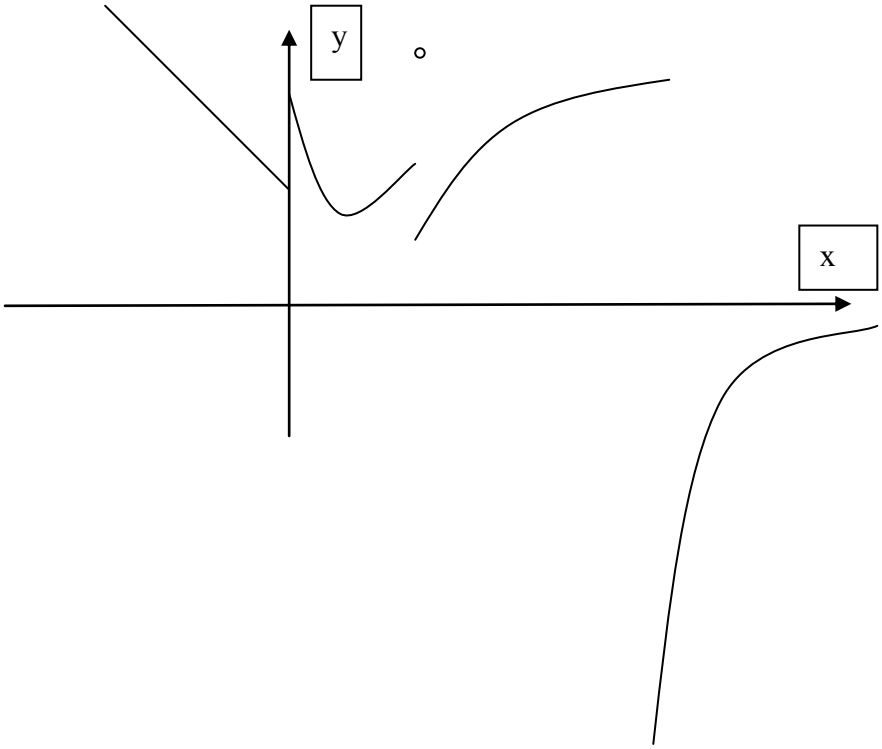
$$\lim_{x\to\ 9-\Delta} f(x)=\lim_{x\to\ 9-\Delta}\log_3 x=\log_3(9+\Delta)=2$$

$$\lim_{x\to\ 9+\Delta} f(x)=\lim_{x\to\ 9+\Delta}\frac{1}{9-x}=\frac{1}{9-(9+\Delta)}=\frac{1}{-\Delta}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\ 9-\Delta} f(x)\neq\lim_{x\to\ 9+\Delta} f(x)$$

В точке x=9 функция терпит разрыв второго рода

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{4\sqrt{x^5}}{(1+\sqrt[3]{x})^3}$, **б)** $y=\lg(1+x)\arcsin\dfrac{1}{x}$, **в)** $y=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}$,

г) $y=(\operatorname{ctg}x)^{3x-1}$, **д)** $x\sin 3y-y\cos 3x=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$, **е)** $x=\arcsin t,\quad y=t^2$.

а) $y=\dfrac{4\sqrt{x^5}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}$,

При вычислении производной данной функции следует использовать правило дифференцирования частного: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. В результате получим

$$y'=\left(\frac{4\sqrt{x^5}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}\right)'=\frac{\left(4\sqrt{x^5}\right)'\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(4\sqrt{x^5}\right)\left(\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3\right)'}{\left(\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3\right)^2}=\cdot\frac{\left(6\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt[3]{x}\right)-\left(6\sqrt{x^3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^{-2}}\right)}{\left(x+\sqrt[3]{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(4\cdot\frac{5}{2}\sqrt{x^3}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(4\sqrt{x^5}\right)3\left(\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\left(1+\sqrt[3]{x}\right)'}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^6}=$$

$$\frac{\left(4\cdot\frac{5}{2}\sqrt{x^3}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(4\sqrt{x^5}\right)3\left(\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2\right)\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^6}=$$

$$=\frac{\left(10\sqrt{x^3}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-\left(4\sqrt{x^5}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4}$$

б) $y=\lg(1+x)\arcsin\frac{1}{x}$, При вычислении производной данной функции следует использовать правило дифференцирования произведения $(uv)'=u'v+uv'$

В результате получим $y'=(\lg(1+x))'\arcsin\frac{1}{x}+\lg(1+x)\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)'=$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot\arcsin\frac{1}{x}+\lg(1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x}\cdot\arcsin\frac{1}{x}+\lg(1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot\arcsin\frac{1}{x}-\lg(1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

в) $y=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}$,

При вычислении производной данной функции следует использовать правило дифференцирования сложной функции. В результате получим

$$y'=\left(9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}\right)'=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}\cdot\ln 9\cdot\left(\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}\right)'=$$

$$=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}\cdot\ln 9\cdot\frac{1}{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}\cdot\left(x+\ln(x+\ln x)\right)'=$$

$$=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}\cdot\ln 9\cdot\frac{1}{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}\cdot\left(1+\frac{1}{(x+\ln x)}\right)(x+\ln x)'=$$

$$=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}\cdot\ln 9\cdot\frac{1}{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}\cdot\left(1+\frac{1}{(x+\ln x)}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

г) $y=(ctg)^{3x-1}$, При вычислении производной данной функции, прологарифмируем исходное выражение:

$$\ln y=\ln(ctg)^{3x-1},$$

$$\ln y=(3x-1)\ln(ctg)$$

Тогда

$$(\ln y)'=\frac{1}{y}y'=\left[(3x-1)\ln(ctg)\right]'=(3x-1)'\cdot\ln(ctgx)+(3x-1)\ln(ctg)'=3\cdot\ln(ctgx)+(3x-1)\frac{1}{ctgx}\cdot(ctgx)'=$$

$$=3\cdot\ln(ctgx)+(3x-1)\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}$$

Отсюда

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

$$y' = y\left[3\cdot\ln(ctgx)+(3x-1)\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}\right]$$

$$y = (ctg)^{3x-1},$$

$$y' = (ctg)^{3x-1}\left[3\cdot\ln(ctgx)+(3x-1)\frac{1}{ctgx}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}\right].$$

д) $x\sin 3y - y\cos 3x = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ $x\sin 3y - y\cos(3x) = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$,При вычислении производной от неявно заданной функции следует продифференцировать исходное уравнение по x с учетом того, что переменная y зависит от x: y=y(x):

$$\left(x\sin 3y - y\cos(3x)\right)' = \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)'.$$

$$\left(1\sin 3y + x3\cos 3y - (y'\cos(3x) + y(-3\sin 3x)\right) = \left(\frac{-2}{x^3}+\frac{-2}{y^3}y'\right)$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие y':

$$\left(-y'\cos(3x)\right) - \frac{-2}{y^3}y' = -\sin 3y - x3\cos 3y + y(-3\sin 3x) + \frac{-2}{x^3}$$

$$\left(-y'\cos(3x)\right) + \frac{2}{y^3}y' = -\sin 3y - x3\cos 3y - y(3\sin 3x) - \frac{2}{x^3}$$

Отсюда находим

$$\left(-y'(\cos(3x)\right) + \frac{2}{y^3})) = -\sin 3y - x3\cos 3y - y(3\sin 3x) - \frac{2}{x^3}$$

$$y' = \frac{-\sin 3y - x3\cos 3y - y(3\sin 3x) - \frac{2}{x^3}}{\left(-(\cos(3x)\right) + \frac{2}{y^3}}$$

е).

$$x = \arcsin t, \quad y = t^2$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(t^2\right)'_t}{\left(\arcsin t\right)'_t} = \frac{2t}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = 2t\sqrt{1-t^2}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3–2x^2$ на отрезке [–1; 3].

на отрезке [-1;3].

$$y' = \left(3 - 2x^2\right)' = 0 - 2 \cdot 2 \cdot x = -4 \cdot x$$

$$y' = 0$$

$$-4 \cdot x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 0 \in [-1;3]$$

$$y(0) = 3 - 2 \cdot 0^2 = 3$$

$$y(-1) = 3 - 2 \cdot (-1)^2 = 3 - 2 = 1$$

$$y(3) = 3 - 2 \cdot 3^2 = 3 - 18 = -15$$

Ответ : $y_{max} = y(0) = 3$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{2\sin x - 2x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0} (2x)^{3x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2\sin x - 2x} = \left|\frac{0^3}{2\sin 0 - 2\cdot 0} = \frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^3\right)'}{\left(2\sin x - 2x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\left(2\cos x - 2\right)} = \left|\frac{0}{0}\right|$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(3x^2\right)'}{\left(2\cos x - 2\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{(6x)}{\left(-2\sin x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{(6x)'}{\left(-2\sin x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{\left(-2\cos x\right)} = \frac{6}{\left(-2\cos 0\right)} = \frac{6}{-2\cdot 1} = -3$$

б) $\lim\limits_{x\to 0} (2x)^{3x}$

$(2*0)^{3*0} = 0^0$

$y = (2x)^{3x}$, При вычислении предела данной функции, прологарифмируем выражение:

$\ln y = \ln(2x)^{3x}$,

$\ln y = 3x\ln(2x)$,

Тогда

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} 3x\ln 2x = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln 2x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln 2x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2x}(2x)'}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-x\right) = -0 = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} (2x)^{3x} = 1$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y = x \cdot (\ln x + 1).$$

Решение

$y = x(\ln x + 1)$

Общая схема исследования:

1. Область определения
2. Точки пересечения с осями координат
3. Четность-нечетность, периодичность.
4. Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания функции.
5. Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости.
6. Асимптоты вертикальные и наклонные.
7. График.

1) Область определения

$x > 0$

Д(x)= $(0;+\infty)$

2) Точки пересечения с осями координат

С ось ox =>y=0

$x(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 _ или _ \ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ не входит в область определения

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$(\frac{1}{e};0)$ точки пересечения с осями координат

3) Четность-нечетность, периодичность

Д(x)= $(0;+\infty)$

Так как график несимметричен относительно оси oy и начала координат, нечетная и не нечетная

Функция не содержит тригонометрических выражений - не является периодической.

4)Точки экстремума, промежутки возрастания, убывания.

$y' = (x(\ln x + 1))' = (\ln x + 1) + \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln x + 2$

$y' = 0 _ или _ \ln x + 2 = 0$

$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$x = \frac{1}{e^2}$

$x \neq 0$

$y = \left(\frac{1}{e^2}(\ln \frac{1}{e^2} + 1)\right) = \frac{1}{e^2}(-2 + 1) = -\frac{1}{e^2}$

x	0	$(0, \frac{1}{e^2})$	$\frac{1}{e^2}$	$(\frac{1}{e^2};+\infty)$

y'	Не определена	-	0	+
y	Не определена	убывает	$-\frac{1}{e^2}$	возрастает

5)Точки перегиба, промежутки выпуклости, вогнутости

$$y'' = (\ln x + 2)' = \frac{1}{x}$$

x	0	$(0;+\infty)$
y''	Не определена	+
y	Не определена	вогнута

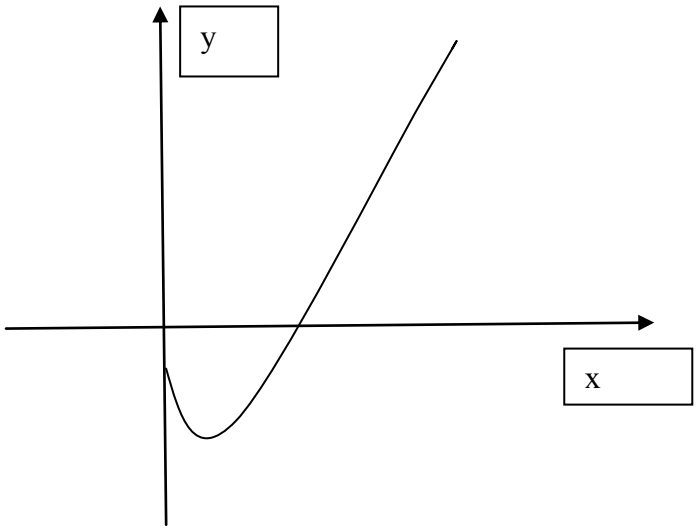
6) Асимптоты

У=кх+в

К= $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x(\ln x + 1)}{x} = \lim_{x\to\infty} (\ln x + 1) = \ln\infty + 1 = +\infty$$

Правой асимптоты нет



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z = e^{xy} + \operatorname{tg} x^3 + \sqrt[4]{y},$ **б)** $z = \dfrac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{x}},$ **в)** $z = (\sin y)^{x^2}.$

Решение:

а) $z = e^{xy} + \operatorname{tg}(x^3) + \sqrt[4]{y},$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{xy} + \operatorname{tg}(x^3) + \sqrt[4]{y}\right)'_x = e^{xy} \cdot (xy)'_x + \left(\frac{1}{\cos^2(x^3)}\right) \cdot (x^3)'_x + 0 = e^{xy} \cdot y + \left(\frac{1}{\cos^2(x^3)}\right) \cdot (3x^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{xy} + \operatorname{tg}(x^3) + \sqrt[4]{y}\right)'_y = e^{xy} \cdot (xy)'_y - 0 + \left(y^{\frac{1}{4}}\right)'_y = e^{xy} \cdot (x \cdot 1) + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(y^{-\frac{3}{4}}\right) =$$

$$= e^{xy} \cdot x + \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}$$

б) $z = \dfrac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{x}},$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{x}}\right)'_x = \frac{\ln(1+y^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x}\ln(1+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{x}}\right)'_y = \frac{\frac{1}{1+y^2}\left(1+y^2\right)'}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{1+y^2}2y}{\sqrt{x}} = \frac{2y}{\left(1+y^2\right)\sqrt{x}}$$

в) $z = (\sin y)^{x^2}.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left((\sin y)^{x^2}.\right)'_x = (\sin y)^{x^2} \ln\sin y \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left((\sin y)^{x^2}\right)'_y = x^2(\sin y)^{x^2-1}(\sin y)'_y = x^2(\sin y)^{x^2-1}(\cos y)$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

8. Дана функция $u=\cos y+(x-y)\sin y$. Показать, что $(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Решение

$u=\cos y+(y-x)\sin y$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(\cos y+(y-x)\sin y\right)'_x=0+(y-x)'_x\sin y=(0-1)'\sin y=-\sin y$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(-\sin y\right)'_y=-\cos y$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(\cos y+(y-x)\sin y\right)'_y=-\sin y+(y-x)'_y\sin y+(y-x)\left(\sin y\right)'_y=$

$=-\sin y+(1-0)\sin y+(y-x)\cos y=-\sin y+\sin y+(y-x)\cos y=(y-x)\cos y$

$(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$(x-y)\cdot(-\cos y)=(y-x)\cos y$

$(y-x)\cdot\cos y=(y-x)\cos y$

Что и требовалось доказать

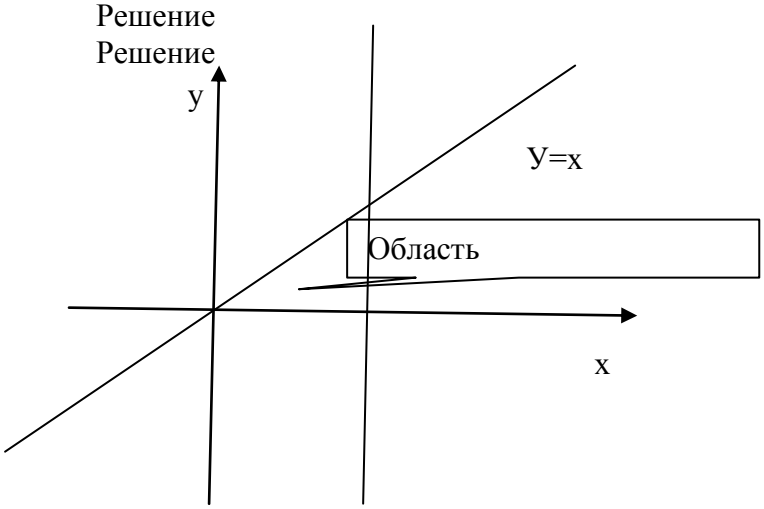
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ в замкнутой области D: $x \le 2,\ y \ge 0,\ y \le x$.

Решение

Решение



$z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$

$x \le 2$

$x = 2$ Прямая линия параллельно оси оу

$y \le x$

$y = x$ биссектриса первого и третьего координатных углов

$y \ge 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(3 - 2x^2 - xy - y^2\right)'_x = 0 - 4x - y - 0 = -4x - y \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(3 - 2x^2 - xy - y^2\right)'_y = 0 - 0 - x - 2y = -x - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -4x \\ -x - 2(-4x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -4x \\ 7x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

(0;0)- Стационарная точка первого порядка

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-4x - y\right)'_x = -4 \\ B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-4x - y\right)'_y = -1 \\ C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-x - 2y\right)'_y = -2 \end{cases}$$

$\Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-2) - (-1)^2 = 7$

$\Delta(0;0) = AC - B^2 = -4 \cdot (-2) - (-1)^2 = 7 > 0$

Есть экстремум в стационарной точке и так как A<0 то это максимум

$z_{\max} = z(0;0) = 3 - 2 \cdot 0^2 - 0 \cdot 0 - 0^2 = 3$

Найдем экстремумы на границах

$x = 2 \Rightarrow z = 3 - 2 \cdot 2^2 - 0 \cdot y - y^2 = -5 - 2y - y^2$

$z' = \left(-5 - 2y - y^2\right)' = 0 - 2 - 2y = -2 - 2y$

$z' = 0$

$-2 - 2y = 0$

У=-1 не принадлежит области,

Точек экстремума на x=2 нет

$y = 0 \Rightarrow z = 3 - 2 \cdot x^2 - x \cdot 0 - 0^2 = 3 - 2x^2$

$z' = \left(3 - 2x^2\right)' = -4x$

$z' = 0$

$-4x = 0$

X=0

$z(0;0) = 3 - 2 \cdot 0^2 - 0 \cdot 0 - 0^2 = 3$

Найдем значение функции в вершинах области

$z = z(2;0) = 3 - 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0 - 0^2 = -5$

$z = z(2;2) = 3 - 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 2^2 = -13$

$z_{\min} = z(2;2) = -13$

Ответ: $z_{\max} = z(0;0) = 3$ $z_{\min} = z(2;2) = -13$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

10. Дана функция $z = \arcsin\frac{x}{y^2}$, точка $A(2;1)$ и вектор $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Найдем частные производные данной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\arcsin\frac{x}{y^2})'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{y^2}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y^4}\right)}}\cdot\left(\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\arcsin\frac{x}{y^2})'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{y^2}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y^4}\right)}}\cdot\left(\frac{-2x}{y^3}\right) = \frac{-2x}{y\sqrt{y^4-x^2}}$$

Подставим координаты точки А в данные частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A = \frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}\Big|_{(2;1)} = \frac{1}{\sqrt{1^4-2^2}} = \frac{1}{\sqrt{-3}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A = \frac{-2x}{y\sqrt{y^4-x^2}}\Big|_{(2;1)} = \frac{-2\cdot 2}{1\sqrt{1^4-2^2}} = \frac{-4}{\sqrt{-3}}$$

$$\operatorname{grad} z_M = \frac{1}{\sqrt{-3}}\cdot i + \frac{-4}{\sqrt{-3}}\,j$$

Определим направляющие косинусы для вектора а

$$\bar{a} = 2i - 1j = (2;-1)$$

Для этого найдем длину вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Найдем производную по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial a}\Big|_F = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A \cdot cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A \cdot cos\beta$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\Big|_M = \frac{1}{\sqrt{-3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{-4}{\sqrt{-3}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{-15}}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2