КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Семестр 1

Вариант 1

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+2}{2x^2-7x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+2x+1}-5x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+3x-5}$,

г) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{2x+7}-5}$, **д)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\mathrm{tg}^2(x/3)}{\cos 2x\sin^3(2x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x-2}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & \text{если } x<1,\\ 2x-5, & \text{если } 1\le x\le 4,\\ (x-5)^2, & \text{если } 4<x<7,\\ 1, & \text{если } x=7,\\ 2^{9-x}, & \text{если } x>7.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=2\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$, **б)** $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$, **в)** $y=\log_5\left(3^{-x}-\mathrm{tg}\sqrt{1-x^2}\right)$

г) $y=(2+\ln x)^{\sin x}$, **д)** $\mathrm{tg}(x/y)=3x^2+4y^2+6xy.$ **е)** $x=\cos(t^2),\quad y=\sin(t^2)$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2+\dfrac{x}{2}$ на отрезке [–3;3].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\sin x-6x+x^3}{x^5}$, **б)** $\lim\limits_{x\to1}x^{2/(1-x)}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{1-2x}{x^2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=2xy-\mathrm{tg}\,x+\sqrt{y}$, **б)** $z=\dfrac{\cos(2x)}{1+y^2}$, **в)** $z=(1+\mathrm{ctg}\,y)^{\sqrt{x}}$.

8. Дана функция $z=\dfrac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$. Показать, что $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+y^2-9xy+27$ в замкнутой области *D*: $0\le x\le3$, $0\le y\le3$.

10. Дана функция $z=x^2+xy+y^2$, точка *A*(1; 1) и вектор $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$. Найти: а) grad *z* в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 2

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+8x+5}{5x^2+4x+10}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{36x^2+8x+9}-6x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{\sqrt{4x+21}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2(x/4)}{\operatorname{tg}(2x^2)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{4x-5}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x+2|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-1)^2, & \text{если } 0<x<3,\\ 1, & \text{если } x=3,\\ 3+\log_3 x, & \text{если } 3<x\le 9,\\ 1/(x-9), & \text{если } x>9.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=(\sqrt[3]{x^2}+1)\sqrt{x^3+4}$, **б)** $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$, **в)** $y=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}$,

г) $y=(\operatorname{ctg} x)^{3x-1}$, **д)** $\sin(xy)=x^2+\operatorname{arctg} y$, **е)** $x=\operatorname{ctg} t,\quad y=1/\cos^2 t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4+8x^2-9$ на отрезке $[0;3]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\sqrt{x}}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{2x}{4x^2-1}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\dfrac{x^3}{6}-\operatorname{ctg}(xy)+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, **б)** $z=\dfrac{\sin(y^3)}{x^4}$, **в)** $z=(\cos x)^{\ln y}$.

8. Дана функция $z=\dfrac{y^2}{3x}-\arcsin(xy)$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-2y^2-1$ в замкнутой области D: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 3$.

10. Дана функция $z=2x^2+3xy+y^2$, точка $A(2;\ 1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 3

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-6x-7}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-8x})$, **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+2x-2)(3x-2)}{2x^3+3x^2-2x+1}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x/2)\cdot \operatorname{tg} 3x}{\arcsin 6x\cdot\sin 5x}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-2}{9x+1}\right)^{2x+5}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln|2+x|, & \text{если } x<-2,\\ 2x+3, & \text{если } -2\le x\le 1,\\ (x-1)^2-1, & \text{если } 1<x<4,\\ 1, & \text{если } x=4,\\ 2^{7-x}, & \text{если } x>4.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{1-x}$, **б)** $y=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}$, **в)** $y=\log_2\operatorname{tg}\log_3(x-\cos x)$,

г) $y=(2-\sqrt{x})^{\cos x}$, **д)** $xe^{3y}+ye^{-4x}=\ln(x^2+y^2)$, **е)** $x=\operatorname{tg} t,\quad y=1/\sin^2 t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x+\dfrac{4}{x}$ на отрезке [1;4].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{\pi(x-1)}$, **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+2n}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{(x+1)^2}{x^2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\dfrac{x^3}{6}-\operatorname{ctg}(xy)+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, **б)** $z=\dfrac{\sin(y^3)}{x^4}$, **в)** $z=(\cos x)^{\ln y}$.

8. Дана функция $z=\ln(x^2+y^2+2x+1)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=3-2x^2-xy-y^2$ в замкнутой области D: $x\ge 1,\ y\ge 0,\ y\le x$.

10. Дана функция $z=\ln(5x^2+3y^2)$, точка $A(1;\ 1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 4

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{1-\sqrt{9-2x}}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2+3x+16}-7x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+3x-1}{3x^2+2x-1}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+7)(3x^2+3x+1)}{2x^3+4x+5}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(2x)\cdot \operatorname{tg}(x/2)}{x^2\sin(x/3)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-7}{3x+2}\right)^{4x+3}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x-2|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-1)^2+2, & \text{если } 0<x<3,\\ 1, & \text{если } x=3,\\ 5+\log_3 x, & \text{если } 3<x\le 9,\\ 1/(x-9), & \text{если } x>9.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$, **б)** $y=\sin 3x-x\cos 2x$, **в)** $y=\sqrt{2+\ln(1-\operatorname{ctg}2x)}$,

г) $y=(1-\ln x)^{\sqrt{x}}$, **д)** $\cos(xy)=y^3+\arcsin x$, **е)** $x=1-\cos t,\quad y=t-\sin^2 t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^4/2+x^3-x^2+2$ на отрезке $[-3;1]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x\cos x-\sin 2x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln 5x)^{1/\ln 2x)}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=e^{-x^2+8x-14}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\operatorname{ctg}(xy)-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+e^{-2y^2}$, **б)** $z=\dfrac{x^4}{\cos 3y}$, **в)** $z=(1-3^y)^{\ln x}$.

8. Дана функция $z=e^{xy}$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-3y^2-x-y$ в замкнутой области D: $x\ge 1$, $y\ge -1$, $x+y\le 1$.

10. Дана функция $z=\ln(5x^2+4y^2)$, точка $A(1;\,1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 5

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+6x+9}{7x^2+6x+1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{81x^2+4x+9}-9x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2+x-10}$,

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{\sqrt{7-2x}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}(x/3)}{\operatorname{tg}^2(x/4)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^{5x-2}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{если } x<0,\\ -1, & \text{если } x=0,\\ x^2+2, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 3^{x-4}, & \text{если } 2<x\le 4.\\ \lg(x-4), & \text{если } x>4.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}}$, **б)** $y=\sin^2 x(2+3\cos^2 x)$, **в)** $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\operatorname{tg}e^{\sin x}\right)$,

г) $y=(1+\sin x)^{\ln x}$, **д)** $1+x^3+y^3=e^{x^2+y^2}$, **е)** $x=2^{-t}$, $y=2^{3t}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$ на отрезке [–6;–1].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)^2}{1-\sin(\pi x/2)}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(3x)^{\sin 2x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=xe^{-x^2/2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=x^7-\cos(2xy)+\sqrt{y^3}$, **б)** $z=\dfrac{e^{1/x}}{y^2}$, **в)** $z=(\cos x)^{\operatorname{ctg} y}$.

8. Дана функция $z=\ln(x+e^{-y})$. Показать, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-2xy+2y^2$ в замкнутой области *D*: $-1\le x\le 1,\ 0\le y\ge 2$.

10. Дана функция $z=5x^2+6xy$, точка *A*(2; 1) и вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$. Найти: а) grad *z* в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 6

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+18}{8x^2+5x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2+3x+4}-7x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{2x^2-5x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{2x+3}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cdot\sin(x/4)}{\operatorname{tg}^2(3x^2)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-5}\right)^{4x+5}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}(x+3)^2-4, & \text{если } x<0,\\ 2, & \text{если } x=0,\\ 5-2x, & \text{если } 0<x\le 3,\\ 4^{(x-3)/4}, & \text{если } 3<x\le 7,\\ -\ln(x-7), & \text{если } x>7.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^5}}$, **б)** $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$, **в)** $y=\operatorname{ctg}\sqrt{x+\ln\cos x}$,

г) $y=(1+\sqrt{x})^{\operatorname{tg}x}$, **д)** $e^{x/y}=x^5-y^5$, **е)** $x=\operatorname{arctg}t,\quad y=t^2$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=x^3-3x^2-9x+1$$

на отрезке $[-1;2]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-\sin 3x}{(6x-\pi)^3}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{2/x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=(1+x)e^{x+2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=e^{xy}+\operatorname{tg}x^3+\sqrt[4]{y}$, **б)** $z=\dfrac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{x}}$, **в)** $z=(\sin y)^{x^2}$.

8. Дана функция $z=yx$. Показать, что $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=5x^2-3xy+y^2+4$ в замкнутой области D: $x\ge -1,\ y\ge -1,\ x+y\le 1$.

10. Дана функция $z=\operatorname{arctg}\left(xy^2\right)$, точка $A(2;3)$ и вектор $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 7

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x+4}-1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{64x^2+7x+4}-8x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+5x+2)(2x+1)}{4+8x^2-5x^3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot \operatorname{tg}^2(x/2)}{x\cdot\sin^2(2x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+9}{4x+1}\right)^{9x-5}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}1/(1-x)^2, & \text{если } x<1,\\ 2x-7, & \text{если } 1\le x<4,\\ -1, & \text{если } x=4\\ (x-5)^2, & \text{если } 4<x<7,\\ \lg(x-6), & \text{если } x\ge 7.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{1-x^2}$, **б)** $y=\sin(x^2)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, **в)** $y=10^{x^2+\ln\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$,

г) $y=(\operatorname{tg}x)^{1/x}$ **д)** $x^2\ln y=\cos(x^3+y^3)$, **е)** $x=\log_2 t,\quad y=t^3$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{x^2+4}{x}$ на отрезке [1;4].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin 2x-2x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+8x)^{1/x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\dfrac{6}{x^3}-\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{y^5}}$, **б)** $z=\dfrac{\sin\sqrt{y}}{1+x}$, **в)** $z=(\cos 2x)^{1/y}$.

8. Дана функция $z=x^y$. Показать, что $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+y\ln x\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=10+2xy-x^2$ в замкнутой области *D*: $0\le y\le 4-x^2$.

10. Дана функция $z=\arcsin\left(x^2/y\right)$, точка *A*(1; 2) и вектор $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 8

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{13-x}-4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+2x})$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^2-5x+6}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2-2x+3)(2x+1)}{2x^3+7x^2+6x+4}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}^2(x/5)}{\arcsin^3(2x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-2}{6x+5}\right)^{4x+3}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2, & \text{если } x<1,\\ 2, & \text{если } x=1,\\ 5-2x, & \text{если } 1<x\le 3,\\ 2^{x-4}, & \text{если } 3<x\le 6,\\ \ln(x-6), & \text{если } x>6.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{3\sqrt[3]{x^3+5x^4-5}}{x}$, **б)** $y=(1+\sin 2x)\arccos x$, **в)** $y=\sqrt{1+\ln(1+\operatorname{tg}3x)}$,

г) $y=(1+\ln x)^{x^2}$ **д)** $xe^{3y}-ye^{-4x}=x^2+y^2$, **е)** $x=1/t,\quad y=e^t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=x-2\sqrt{x}$$

на отрезке [0;4].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{1/\ln(2x-2)}$..

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\operatorname{tg}(4xy)-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+e^{\frac{-y^2}{4}}$, **б)** $z=\dfrac{1+x^3}{\cos 6y}$, **в)** $z=(\ln x)^{\sin y}$.

8. Дана функция $z=x\cdot e^{xy}$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-2xy-y^2+4x$ в замкнутой области D: $x\le 0,\ y\le 0,\ x+y+2\le 0$.

10. Дана функция $z=\ln\left(3x^2+4y^2\right)$, точка $A(1;3)$ и вектор $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 9

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x+12}{4x^2+2x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+4x+25}-3x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-x-15}$,

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{5x+1}-4}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2(3x)\sin(x/2)}{x^2\cdot\sin(2x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+3}{8x+2}\right)^{5x-2}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(3-x), & \text{если } x<3,\\ 2x-5, & \text{если } 3\le x\le 5,\\ (x-7)^2, & \text{если } 5<x<8,\\ 0, & \text{если } x=8,\\ 3^{x-8}, & \text{если } x>8.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{5\sqrt[5]{x^2-x+3}}{x}$, **б)** $y=2^x e^{-3x}$, **в)** $y=\log_7\left(2^x-\operatorname{ctg}\sqrt{1+x}\right)$,

г) $y=(\ln x)^{\cos x}$ **д)** $\arcsin y=\ln(1+xy)-x$, **е)** $x=\cos(t/2),\quad y=t-\sin t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ на отрезке [–1;1].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-5^3}{x^4-5^4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=x^2-\frac{2}{x}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=xy^2-\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}+\sqrt{y^7}$, **б)** $z=\dfrac{\sin(4x)}{y^2-4}$, **в)** $z=(\operatorname{ctg}x)^{\sqrt{y}}$.

8. Дана функция $z=\sin(x+ay)$. Показать, что $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+xy-2$ в замкнутой области *D*: $4x^2-4\le y\le 0$.

10. Дана функция $z=3x^4+2x^2y^3$, точка *A*(–1;2) и вектор $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$. Найти: а) grad *z* в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 10

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+9x+2}{4x^2+3x+1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+9x+4}-2x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2+x-10}$,

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{\sqrt{7x-2}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg}(x/3)}{\operatorname{tg}^2(x/4)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{8x+1}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x-3|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-2)^2, & \text{если } 0<x<4,\\ 1, & \text{если } x=4,\\ 2+\log_2 x, & \text{если } 4<x\le 8,\\ 1/(x-8), & \text{если } x>8.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, **б)** $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}\cos 4x$, **в)** $y=\log_3\log_5\operatorname{ctg}\left(x+\sqrt{\sin x}\right)$,

г) $y=(1+\sqrt{x})^{\cos x}$, **д)** $\sin(x/y)=x^2-y^3$, **е)** $x=1/\sin^2 t,\quad y=\operatorname{tg} t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=(x^2-2x)^2$ на отрезке $[0;3]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{\operatorname{tg} x}$, **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n+9n^2}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=x\cdot(\ln x+1).$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\sin(xy)+\dfrac{1}{x^5}+\lg y$, **б)** $z=\dfrac{\operatorname{ctg}(x^5)}{\sqrt[3]{y^2}}$, **в)** $z=(1+\ln x)^{1/y}$.

8. Дана функция $z=\cos y+(y-x)\sin y$. Показать, что $(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+xy$ в замкнутой области D: $-1\le x\le 1,\quad 0\le y\le 3$.

10. Дана функция $z=3x^2y^2+5y^2x$, точка $A(1;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 11

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-6x+2}{10x^2-3x+4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{100x^2+8x+1}-10x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2+3x-2}{3x^2+5x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{4x-7}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2(x/3)}{1-\cos^2(5x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-7}{5x+2}\right)^{2x-9}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(2-x), & \text{если } x<2,\\ 2x-3, & \text{если } 2\le x\le 4,\\ (x-6)^2, & \text{если } 4<x<7,\\ 5, & \text{если } x=7,\\ 3^{x-7}, & \text{если } x>7.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[4]{x^3}}$, **б)** $y=\arcsin\sqrt{x}\cos(1/x)$, **в)** $y=\lg\left(\operatorname{ctg}5^{8x^2}\right)$,

г) $y=(3-\ln x)^{\sin 2x}$, **д)** $e^{x^2+y^3}=\dfrac{x}{y}+\sin(xy)$, **е)** $x=7^{2t}$, $y=7^{-3t}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=(x-1)^2(x+2)$ на отрезке [–3;2].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(4x-\pi)^3}$, **б)** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+8x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=x^2\ln x.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\dfrac{y^5}{10}+\operatorname{ctg}(xy)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, **б)** $z=\dfrac{\sin(x^4)}{y^3}$, **в)** $z=(\cos y)^{\ln x}$.

8. Дана функция $z=e^{xy}$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-2xy-y^2-4x$ в замкнутой области D: $x\le3$, $y\ge0$, $x-y+1\ge0$.

10. Дана функция $z=x^2-2xy-3y^2$, точка $A(1;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 12

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+9x+7}{7x^2+3x+7}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+6x+6}-5x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-5x-6}{3x^2-7x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{\sqrt{4x+5}-5}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3(x/3)}{\sin(2x^2)\arcsin(x/5)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+4}\right)^{4x+9}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x+3|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-2)^2, & \text{если } 0<x<4,\\ -1, & \text{если } x=4,\\ 6-\log_2 x, & \text{если } 4<x\le 8,\\ 1/(x-8), & \text{если } x>8.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{x^2+1}}$, **б)** $y=(x-\sin 3x)\cos 4x$, **в)** $y=8^{\sqrt{2x-\ln(x^2+\ln x)}}$,

г) $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$, **д)** $x\sin 5y+y\cos 5x=x^2-y^2$, **е)** $x=t^3+8t,\quad y=t^5+2t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^4-2x^2+5$ на отрезке $[-1;2]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2\sin x-2x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(2x)^{3x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\ln(x+4)-x.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\operatorname{tg}(xy)-\dfrac{1}{\sqrt{y}}+e^{-x^3}$, **б)** $z=\dfrac{y^5}{\cos 5x}$, **в)** $z=(1+\ln x)^{\ln y}$.

8. Дана функция $u=\sin^2(x-at)$. Показать, что $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-2xy-y^2+\dfrac{5}{2}y^2-2x$ в замкнутой области D: $0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 2$.

10. Дана функция $z=2x^2-2xy+y^2$, точка $A(2;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 13

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2-5x-1}{3x^2-5x+2}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x})$, **в)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{7-x}}{x^2+6x+8}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+4x+3)(5x+4)}{3x^3+4x^2+2x+1}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2/4)}{\operatorname{arctg}7x\cdot\operatorname{tg}5x}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+7}{6x+4}\right)^{5x-3}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln|3+x|, & \text{если } x<-3,\\ 2x-3, & \text{если } -3\le x\le 2,\\ (x-2)^2-3, & \text{если } 2<x<5,\\ 1, & \text{если } x=5,\\ 5+2^{5-x}, & \text{если } x>5.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x^2+4}}$, **б)** $y=\sin 3x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, **в)** $y=\log_2\operatorname{tg}\log_3(x-\cos x)$,

г) $y=(2-\sqrt{x})^{\cos x}$, **д)** $xe^{3y}+ye^{-4x}=\ln(x^2+y^2)$, **е)** $x=3\cos^2 t,\quad y=2\sin^3 t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-12x+7$ на отрезке $[0;3]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x+10}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x^2}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{x^4}{x^3-1}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=y^9-\cos(4xy)+\sqrt{x^3}$, **б)** $z=\dfrac{e^{-1/y}}{x^2}$, **в)** $z=(\cos y)^{\operatorname{tg}x}$.

8. Дана функция $u=\dfrac{xy}{x-y}$. Показать, что $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+2xy-10$ в замкнутой области D: $y\le 0,\quad x^2-y-4\le 0$.

10. Дана функция $z=\ln(5x^2+3y^2)$, точка $A(1;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 14

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{4-\sqrt{6-5x}}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{36x^2-9x+7}-6x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{3x^2-13x-10}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+5)(2x^2+4x+3)}{3x^3+8x+2}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\,\mathrm{tg}(x/2)}{1-\cos 3x}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{7x+3}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x+3|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-2)^2+1, & \text{если } 0<x<4,\\ 1, & \text{если } x=4,\\ 3+\log_2 x, & \text{если } 4<x\le 8,\\ 1/(x-8), & \text{если } x>8.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{3\sqrt[3]{x^5+5x^4-5}}{x}$, **б)** $y=\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x\arcsin 4x$, **в)** $y=\sqrt{2+\ln(1-\mathrm{ctg}\,2x)}$,

г) $y=(1-\ln x)^{\sqrt{x}}$, **д)** $\cos(x^3+y^4)=x^2/y$, **е)** $x=t+\ln\cos t,\quad y=t+\ln\sin t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^5-(5/3)x^3+2$ на отрезке $[0;2]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln 4x)^{1/\ln 3x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{(x+1)^2}{x-2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=e^{xy}+\mathrm{tg}\,x^4+\sqrt[5]{y}$, **б)** $z=\dfrac{\ln(1+x^3)}{\sqrt{y}}$, **в)** $z=(\sin x)^{y^2}$.

8. Дана функция $u=e^{-\cos(x+at)}$. Показать, что $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y$ в замкнутой области D: $x\le 2$, $y\ge 0$, $x-y+2\ge 0$.

10. Дана функция $z=\ln(x^2-4y^2)$, точка $A(1;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\mathrm{grad}\,z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 15

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x+3}{5x^2+4x+1}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{81x^2+3x+4}-9x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-6}{5x^2-11x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x\cdot \operatorname{arctg}(x/7)}{\operatorname{tg}^2(x/3)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{6x-7}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & \text{если } x<-1,\\ -3, & \text{если } x=-1,\\ x^2+1, & \text{если } -1<x\le 2,\\ 3^{x-2}, & \text{если } 2<x\le 4,\\ \ln(x-4), & \text{если } x>4.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^4+x^2+16}}{x^3-1}$, **б)** $y=(x+\arcsin 2x)3^x$, **в)** $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\operatorname{tg}e^{\sin x}\right)$,

г) $y=(1+\sin x)^{\ln x}$, **д)** $x^2y+\sqrt{y^3}=e^{x^2+y^2}$, **е)** $x=\arcsin t,\quad y=\ln t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=(\sqrt{3}/2)x+\cos x$ на отрезке $[0;\pi/2]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{1/\ln(2x-2)}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{x}{(x+1)^2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\dfrac{2}{x^4}-\operatorname{ctg}\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{\sqrt{y^7}}$, **б)** $z=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{1+y}$, **в)** $z=(\cos 2y)^{1/x}$.

8. Дана функция $u=\ln\left[x^2+(y-1)^2\right]$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$ в замкнутой области D: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$.

10. Дана функция $z=5x^2+6xy$, точка $A(1;2)$ и вектор $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 16

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+5x+12}{9x^2+5x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{49x^2+5x+4}-7x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-x-4}{2x^2-3x-5}$,

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-12}{\sqrt{7x-5}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x\,\mathrm{tg}(x^2/3)}{\sin^2(5x^2)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{6x-7}\right)^{2x+9}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2-4, & \text{если } x<0,\\ 3, & \text{если } x=0,\\ 4+2x, & \text{если } 0<x\le 3,\\ 4^{(x-3)/3}, & \text{если } 3<x\le 6,\\ -\ln(x-6), & \text{если } x>6.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{5\sqrt[5]{x^2}}{x^4+1}$, **б)** $y=2^x e^{1/x}$, **в)** $y=\mathrm{ctg}\sqrt{x+\ln\cos x}$,

г) $y=(1+\sqrt{x})^{\mathrm{tg}x}$, **д)** $x\sin 7y+y\cos 7x=\mathrm{arctg}(x+y)$, **е)** $x=\dfrac{1}{t}$, $y=e^{t^2}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4–16x^3+2$ на отрезке [–3–1].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=10xe^{2x}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\mathrm{tg}(xy)-\dfrac{1}{\sqrt{y^3}}+e^{\frac{-x^2}{2}}$, **б)** $z=\dfrac{1-x^4}{\cos 4y}$, **в)** $z=(\ln y)^{\sin x}$.

8. Дана функция $u=y^{3/2}x^{1/2}$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-2xy-y^2+4x+1$ в замкнутой области *D*: $x\ge-3$, $y\ge0$, $x+y+1\le0$.

10. Дана функция $z=\mathrm{arctg}(x^2y)$, точка *A*(3;2) и вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$. Найти: а) grad *z* в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 17

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{3x+4}-4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{64x^2+9x+14}-8x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{4x^2+13x+3}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2+6x+3)(2x+1)}{3+7x^2+5x^3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x\sin^3(x/2)}{\arcsin^2(5x^2)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+5}{8x+3}\right)^{3x-5}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}1/(1+x)^2, & \text{если } x<-1,\\ 2x+3, & \text{если } -1\le x<4,\\ -1, & \text{если } x=4,\\ (x-6)^2+7, & \text{если } 4<x<7,\\ \lg(x-6), & \text{если } x\ge 7.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{6\sqrt[6]{x^3+x+1}}{x}$, **б)** $y=\arcsin\sqrt{x}\cos\dfrac{x}{3}$, **в)** $y=10^{x^2+\ln\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$,

г) $y=(\operatorname{tg}x)^{1/x}$, **д)** $x^2y+2\sqrt{x^3}=2^{x^2+y^2}$, **е)** $x=\sin(t^2),\quad y=\cos(t^2)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x+1$ на отрезке $[1/2;\ 2]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-(x^2/\pi^2)}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=(3x+5)e^{-3x-2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=2xy-\operatorname{tg}x+\sqrt{y}$, **б)** $z=\dfrac{\cos(2x)}{1+y^2}$, **в)** $z=(1+\operatorname{ctg}y)^{\sqrt{x}}$.

8. Дана функция $u=\dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$. Показать, что $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{y^2}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+xy-2$ в замкнутой области *D*: $4x^2-4\le y\le 0$.

10. Дана функция $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, точка $A(1;2)$ и вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad}z$ в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 18

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{13-2x}-3}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{x^2-2x})$, **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2+3x+3)(4x+1)}{5x^3+9x^2+4x+1}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\,\mathrm{tg}^2(x/4)}{\mathrm{arctg}^3(3x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-5}{6x+4}\right)^{5x+3}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}3-x^2, & \text{если } x<1,\\ -4, & \text{если } x=1,\\ 5-3x, & \text{если } 1<x\le 4,\\ 1-2^{x-4}, & \text{если } 4<x\le 7,\\ \ln(x-7), & \text{если } x>7.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{6\sqrt[3]{x^3+8}}{x^2+1}$, **б)** $y=\left(\dfrac{1}{\sin x}+1\right)\mathrm{arctg}\sqrt{x}$, **в)** $y=\sqrt{1+\ln(1+\mathrm{tg}\,3x)}$,

г) $y=(1+\ln x)^{x^2}$, **д)** $xe^{y^2}+ye^{x^2}=\cos(x^2+y^2)$, **е)** $x=\mathrm{ctg}\,t,\quad y=\cos^2 t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3–3x+1$ на отрезке $[1/2;\ 2]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\,\mathrm{tg}\,4x-12\,\mathrm{tg}\,x}{3\sin 4x-13\sin x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=x^2e^{-x}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\sin(xy)-\dfrac{1}{x^3}+\ln y$, **б)** $z=\dfrac{\mathrm{ctg}(x^4)}{\sqrt[3]{y}}$, **в)** $z=(1+2^x)^{\sqrt{y}}$.

8. Дана функция $u=x^y$. Показать, что $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=2x^2+2xy-\dfrac{1}{2}y^2-4x$ в замкнутой области D: $x\ge 0,\ y\le 2,\ 2x-y\le 0$.

10. Дана функция $z=\ln(x^2+2y^2)$, точка $A(1;3)$ и вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\mathrm{grad}\,z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 19

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+12}{4x^2+3x+4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+7x+36}-3x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4x^2-19x+12}{2x^2-7x-4}$,

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{1-5x}-4}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2(x/3)\sin 5x}{\arcsin(x^3/4)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+5}{7x+4}\right)^{3x-2}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(2-x), & \text{если } x<2,\\ 2x-3, & \text{если } 2\le x\le 5,\\ (x-6)^2, & \text{если } 5<x<8,\\ 0, & \text{если } x=8,\\ 2^{x-6}, & \text{если } x>8.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^8+x^4+1}}{\sqrt{x}}$, **б)** $y=\sin\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg}2x$, **в)** $y=\log_7\left(2^x-\operatorname{ctg}\sqrt{1+x}\right)$,

г) $y=(\ln x)^{\cos x}$, **д)** $3^{xy}=4x^2+\log_2 y$, **е)** $x=\cos(2t),\quad y=t\sin(2t)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $=x^4+4x$ на отрезке [–2; 2].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln 2x}{\sqrt{x^3}}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{2x+1}{x^2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\dfrac{x^3}{6}-\operatorname{ctg}(xy)+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, **б)** $z=\dfrac{\sin(y^3)}{x^4}$, **в)** $z=(\cos x)^{\ln y}$.

8. Дана функция $u=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=5x^2-3xy+y^2+4$ в замкнутой области *D*: $-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$.

10. Дана функция $z=2x^4+x^2y^3$, точка *A*(2;–1) и вектор $\boldsymbol{a}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$. Найти: а) grad *z* в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 20

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+9x+8}{3x^2+3x+4}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+5x+64}-2x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-11x+2}{2x^2-3x-2}$,

г) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{16-3x}-2}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x\,\mathrm{tg}(x/3)}{\sin^2(x/4)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+4}\right)^{7x+1}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x+3|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-2)^2, & \text{если } 0<x<3,\\ -2, & \text{если } x=3,\\ \log_3 x, & \text{если } 3<x\le 9,\\ 1/(x-9), & \text{если } x>9.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt[3]{x^3+1}}$, **б)** $y=e^{1/x}\arcsin(3x^2)$, **в)** $y=\log_3\log_5\mathrm{ctg}\left(x+\sqrt{\sin x}\right)$,

г) $y=(1+\sqrt{x})^{\cos x}$, **д)** $\sin(1+xy)=x+\log_3(x+y)$, **е)** $x=1-\sin t,\quad y=t-\cos t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 81x–x^4$ на отрезке [–1; 4].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)^2}{1-\sin(\pi x/2)}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(3x)^{\sin 2x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{x^3+16}{x}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\mathrm{ctg}(xy)-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+e^{-2y^2}$, **б)** $z=\dfrac{x^4}{\cos 3y}$, **в)** $z=(1-3^y)^{\ln x}$.

8. Дана функция $u=\sin(x+at)$. Показать, что $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+2xy+4x-y^2$ в замкнутой области D: $x\le 0,\ y\le 0,\ x+y+2\ge 0$.

10. Дана функция $z=2x^2y^2+xy^2$, точка $A(1;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$. Найти: а) grad z в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 21

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+2}{3x^2+8x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+6x+121}-5x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+8x-3}{2x^2+9x+9}$,

г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{\sqrt{2x+19}-5}$, **д)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x\,\mathrm{tg}^2(x/4)}{\sin(5x^2)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{3x-7}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln(-x), & \text{если } x<0,\\ 2x-5, & \text{если } 0\le x\le 3,\\ (x-5)^2, & \text{если } 3<x<7,\\ 1, & \text{если } x=7,\\ 3+4^{7-x}, & \text{если } x>7.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{6\sqrt{x^3}}{x+\sqrt[3]{x}}$ **б)** $y=\log_6 x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, **в)** $y=\log_5\left(3^{-x}-\operatorname{tg}\sqrt{1-x^2}\right)$,

г) $y=(2+\ln x)^{\sin x}$, **д)** $\cos(1+xy)=e^{x^3+y^3}$, **е)** $x=3^{-4t}$, $y=9^t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=(\sqrt{3}/2)x-\sin x$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(4x-\pi)^3}$, **б)** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+8x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{2-x^3}{2x}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=x^7-\cos(2xy)+\sqrt{y^3}$, **б)** $z=\dfrac{e^{1/x}}{y^2}$, **в)** $z=(\cos x)^{\operatorname{ctg} y}$.

8. Дана функция $u=\ln(x^2+y^2+2x+1)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+y^2-9xy+27$ в замкнутой области D: $0\le x\le 3,\ 0\le y\le 3$.

10. Дана функция $z=\operatorname{arctg}(xy)$, точка $A(2;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 22

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x+2}{3x^2+5x+6}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{25x^2+8x+16}-5x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{6x^2-7x+1}$,

г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{5-2x}-3}$, **д)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}4x\cdot\operatorname{tg}^2(x/5)}{\sin^3(3x)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+7}\right)^{3x-4}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x+3|, & \text{если } x\le 0,\\ (x-2)^2, & \text{если } 0<x<3,\\ -5, & \text{если } x=3,\\ \log_3 x, & \text{если } 3<x\le 9,\\ 1/(9-x), & \text{если } x>9.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{4\sqrt{x^5}}{(1+\sqrt[3]{x})^3}$, **б)** $y=\lg(1+x)\arcsin\dfrac{1}{x}$, **в)** $y=9^{\sqrt{x+\ln(x+\ln x)}}$,

г) $y=(\operatorname{ctg}x)^{3x-1}$, **д)** $x\sin3y-y\cos3x=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$, **е)** $x=\arcsin t,\quad y=t^2$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3–2x^2$ на отрезке $[–1; 3]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2\sin x-2x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to0}(2x)^{3x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=x\cdot(\ln x+1).$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=e^{xy}+\operatorname{tg}x^3+\sqrt[4]{y}$, **б)** $z=\dfrac{\ln(1+y^2)}{\sqrt{x}}$, **в)** $z=(\sin y)^{x^2}$.

8. Дана функция $u=\cos y+(x-y)\sin y$. Показать, что $(x-y)\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=3-2x^2-xy-y^2$ в замкнутой области D: $x\le2$, $y\ge0$, $y\le x$.

10. Дана функция $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$, точка $A(2;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad}z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 23

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{2x+7}}{x^2+6x-7}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-8x})$, **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-7x+3}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+5x+4)(3x+4)}{3x^3+4x^2+2x+1}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\arcsin 4x\cdot\sin 3x}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-5}{9x+2}\right)^{2x+3}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}\ln|3+x|, & \text{если } x<-3,\\ 2x+5, & \text{если } -3\le x\le 1,\\ (x-2)^2-1, & \text{если } 1<x<4,\\ 1, & \text{если } x=4,\\ 2^{6-x}-1, & \text{если } x>4.\end{cases}$$

3. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^4+4x^2+1}}{\sqrt{x^3}}$, **б)** $y=\operatorname{tg}(1+3x)\arcsin 5x$, **в)** $y=\log_2\operatorname{tg}\log_3(x-\cos x)$,

г) $y=(2-\sqrt{x})^{\cos x}$, **д)** $xe^{4y}+ye^{4x}=\sin x+\cos y$, **е)** $x=\log_3 t,\quad y=3^{-5t}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$ на отрезке [–1; 3].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x+10}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{x^2}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\ln(x+4)-x.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\dfrac{6}{x^3}-\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{y^5}}$, **б)** $z=\dfrac{\sin\sqrt{y}}{1+x}$, **в)** $z=(\cos 2x)^{1/y}$.

8. Дана функция $u=e^{xy}$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xyu=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2-2xy-2y^2$ в замкнутой области D: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2$.

10. Дана функция $z=\ln(4x^2+3y^2)$, точка $A(3;1)$ и вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$. Найти: а) $\operatorname{grad} z$ в точке A; б) производную в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 24

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{3-\sqrt{2x+1}}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{36x^2+7x+49}-6x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+x-3}{3x^2+5x+2}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+7)(5x^2+3x+1)}{4x^3+5x+6}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(4x)\,\mathrm{tg}(x/2)}{1-\cos 9x}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-8}{3x+5}\right)^{4x+7}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}|x+2|, & \text{если } x\le 1,\\ (x-3)^2+2, & \text{если } 1<x<4,\\ 1, & \text{если } x=4,\\ 5-\log_2 x, & \text{если } 4<x\le 8,\\ 1/(8-x), & \text{если } x>8.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^6+1}}{1+2\sqrt{x}}$, **б)** $y=\log_4(x^2+1)\,\mathrm{arcctg}\,x$, **в)** $y=\sqrt{2+\ln(1-\mathrm{ctg}\,2x)}$,

г) $y=(1-\ln x)^{\sqrt{x}}$, **д)** $\cos(x^4+y^4)=e^{1/x}+e^{1/y}$, **е)** $x=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $y=e^{\sqrt{t}}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3–12x+7$ на отрезке [–3; 3].

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln 4x)^{1/\ln 3x}$.

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=(x+1)\cdot\ln(x+1).$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=\mathrm{tg}(4xy)-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+e^{\frac{-y^2}{4}}$, **б)** $z=\dfrac{1+x^3}{\cos 6y}$, **в)** $z=(\ln x)^{\sin y}$.

8. Дана функция $u=e^{-\cos(x-at)}$. Показать, что $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=10+2xy-x^2$ в замкнутой области *D*: $0\le y\le 9-x^2$.

10. Дана функция $z=6x^4+x^2y^3$, точка *A*(1;1) и вектор $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$. Найти: а) grad *z* в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

Вариант 25

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+12x+9}{5x^2+6x+9}$, **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{81x^2+7x+81}-9x)$, **в)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x-4}{2x^2+x-10}$,

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{\sqrt{5x+9}-2}$, **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot \operatorname{tg}(x/4)}{\operatorname{arctg}^2(x/3)}$, **е)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-7}{3x+2}\right)^{5x-3}$.

2. Построить график и определить характер точек разрыва:

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & \text{если } x<-1,\\ 3, & \text{если } x=-1,\\ (x-1)^2-1, & \text{если } -1<x\le 2,\\ 3^{x-2}, & \text{если } 2<x\le 4.\\ \ln(x-4), & \text{если } x>4.\end{cases}$$

3. Найти производные *dy*/*dx* данных функций:

а) $y=\dfrac{10\sqrt[5]{x^3+x}}{1-\sqrt{x}}$, **б)** $y=\log_9(x^2+x)\arccos x$, **в)** $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\operatorname{tg}e^{\sin x}\right)$,

г) $y=(1+\sin x)^{\ln x}$, **д)** $x^2y^2+e^{2x}+e^{2y}=\cos(3x+3y)$, **е)** $x=\cos 2t,\quad y=t+\sin t$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x–\sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

5. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$, **б)** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{1/\ln(2x-2)}$..

6. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, построить ее график:

$$y=\frac{1-2x}{x^2}.$$

7. Найти все частные производные 1-го порядка:

а) $z=xy^2-\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}+\sqrt{y^7}$, **б)** $z=\dfrac{\sin(4x)}{y^2-4}$, **в)** $z=(\operatorname{ctg}x)^{\sqrt{y}}$.

8. Дана функция $u=\ln\left(x+e^{-y}\right)$. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=x^2+2xy-10$ в замкнутой области *D*: $y\le 0,\ x^2-y-1\le 0$.

10. Дана функция $z=x^2y^2+3xy^2$, точка *A*(1;2) и вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$. Найти: а) grad *z* в точке *A*; б) производную в точке *A* по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.