Правила выполнения контрольных работ студентами.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами синего или черного цвета, оставляя поля для замечаний рецензента.

1. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер(шифр0, номер контрольной работы, название дисциплины. Здесь же следует указать дату отсылки работы в институт и адрес студента.
2. В работу должны быть включены все задания, соответствующие своему варианту.
3. Контрольные работы, содержащие задания не из своего варианта , не засчитываются.
4. Номер варианта определяется последней цифрой шифра, указанного в зачетной книжке студента. Если последняя цифра 0, то студент выполняет 10 вариант.
5. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.
6. Перед решением каждой задачи нужно выписать ее условие.
7. Если задание является общим для нескольких вариантов, следует переписать условие задачи, заменяя общие данные на данные своего варианта.
8. Решение задач записывают подробно и аккуратно, делая необходимые пояснения и чертежи.
9. После получения проверенной работы студент должен исправить замеченные ошибки и недочеты или выполнить рекомендации в работе над ошибками, которую выполняют после проверенной работы. Исправления в самой работе не допускаются.
10. Без выполненной и зачтенной контрольной работы студент до экзамена не допускается.
11. Студентам, не выполнившим контрольную работу вовремя, может быть предложена преподавателем аудиторная контрольная работа.

Программа

Часть 1 Математическое программирование

1. **Линейное программирование**
2. **Целочисленное программирование**
3. **Графический метод и симплекс-метод решения задач ЛП**
   1) Геометрическая интерпретация и графическое решение задач линейного программирования с двумя переменными.
   2) Область допустимых решений задач линейного программирования
   3) Схема графического решения стандартной задачи линейного программирования с двумя переменными
   4) Геометрическая интерпретация задач линейного программирования с n переменными
   5) Графическое решение канонической задачи линейного программирования с числом свободных переменных n-r=2
   6) Базисные и опорные решения системы линейных уравнений – ограничений канонической задачи линейного программирования, их геометрическая интерпретация.
   7) Выпуклость множества планов ЗЛП
   8) Основная теорема линейного программирования о существовании экстремального значения целевой функции.
   9) Сущность симплексного метода, геометрическая и алгебраическая интерпретация.
   10) Построение опорного плана канонической задачи линейного программирования с помощью симплексных преобразований.
   11) Свойство симплексных преобразований.
   12) Оценки свободных переменных.
   13) Признак оптимальности опорного плана задач линейного программирования.
   14) Переход к улучшенному опорному решению в симплексных таблицах.
   15) Альтернативный оптимум (признак бесконечного множества оптимальных планов). Его геометрическое истолкование и практическая значимость.
   16) Признак неограниченности целевой функции для задачи (максимизации) минимизации целевой функции.
   17) Понятие о вырожденной ЗЛП.
   18) Монотонность и конечность симплексного метода.
   19) Зацикливание и способы его устранения.
4. **Динамическое программирование**
5. **Рекуррентные соотношения Беллмана**
6. **Математическая теория оптимального управления**

Часть 2 Матричные игры

1) Игра. Игровые методы и игровые модели. Основные понятия.
2) Игры с нулевой суммой, платежная матрица.
3) Игровые задачи.
4) Модели и методы решения игровых задач.
5) Принцип минимакса и максимина в игровых задачах.
6) Нахождение решения игровых задач в чистых и смешанных стратегиях.
7) Вероятности стратегий
8) Платежная функция
9) Оптимальные смешанные стратегии
10) Геометрический метод решения игровых задач.
11) Метод линейного программирования.
12) Игровые модели в условиях коммерческого риска.
13) Игровые модели в условиях полной коммерческой неопределенности.
14) Игровые модели конфликтов.
15) Деловые игры. Постановка деловой игры. Деловая игра «Коммерсант».
16) Оценка согласованности мнений игроков в деловой игре.
17) Игры с природой.
18) Кооперативные игры
19) Игры с природой

Часть 3. Сети и графы

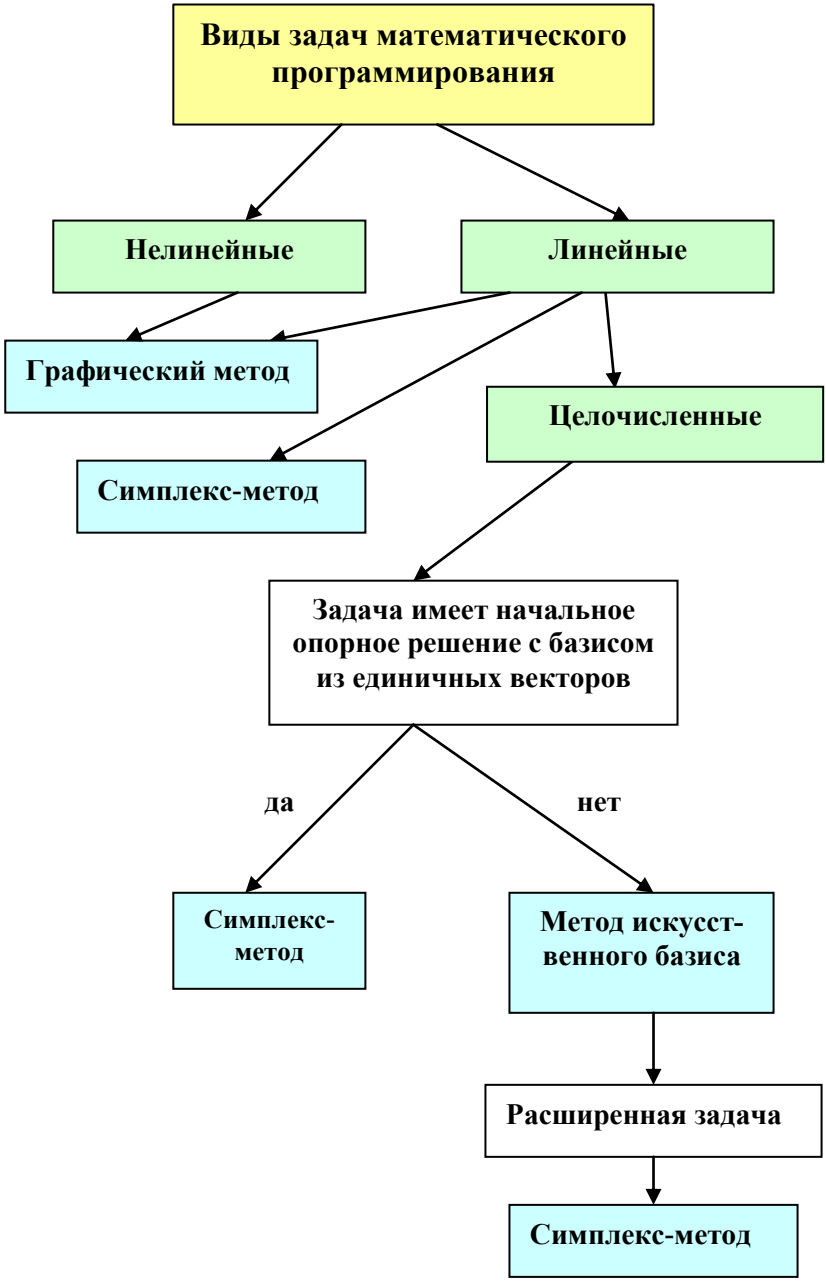
1) Плоские графы
2) Эйлеровы графы
3) Гамильтоновы графы
4) Орграфы
5) Сетевые графики
6) Сети Петри
7) Марковские процессы
8) Задачи анализа замкнутых и разомкнутых систем массового обслуживания

Часть 1. Математическое программирование

Поиск оптимального решения или оптимизация поведения объекта в той или иной ситуации с помощью построения математических моделей и дальнейшего их изменения являются задачами математического программирования.

- **Математическое программирование** – это раздел высшей математики, в котором изучаются методы нахождения условных экстремумов функций нескольких переменных.
- **Задачами математического программирования** называются задачи, в которых ищется экстремум (максимум или минимум) функции нескольких переменных, при этом на переменные накладываются ограничения (уравнения или неравенства).
- Если все переменные в функции f и в ограничениях стоят в первой степени, то функция считается линейной, а ограничения являются линейными уравнениями и неравенствами, получаем соответствующую **задачу линейного программирования.**
- **Задачи целочисленного программирования** являются разновидностью задач линейного программирования, где все переменные являются целыми числами.

Сначала решаем задачу линейного программирования, затем преобразуем полученные решения и получаем задачу целочисленного программирования.


Виды задач математического программирования
Нелинейные
Линейные
Графический метод
Симплекс-метод
Целочисленные
Задача имеет начальное опорное решение с базисом из единичных векторов
да
нет
Симплекс-метод
Метод искусственного базиса
Расширенная задача
Симплекс-метод

Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Моделирование - это процесс или прием, при котором из реальной задачи выделяются некоторые существенные черты, а затем делаются упрощающие предположения.

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей.

Чем ближе **модель** к действительности, тем она сложнее и тем точнее прогнозы или предсказания, которые можно с помощью ее делать.

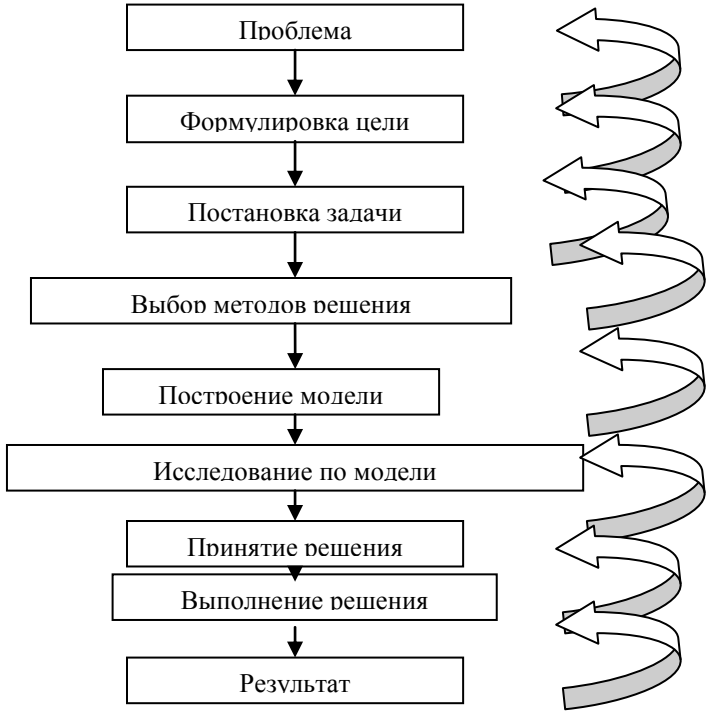
Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Моделирование включает три элемента:

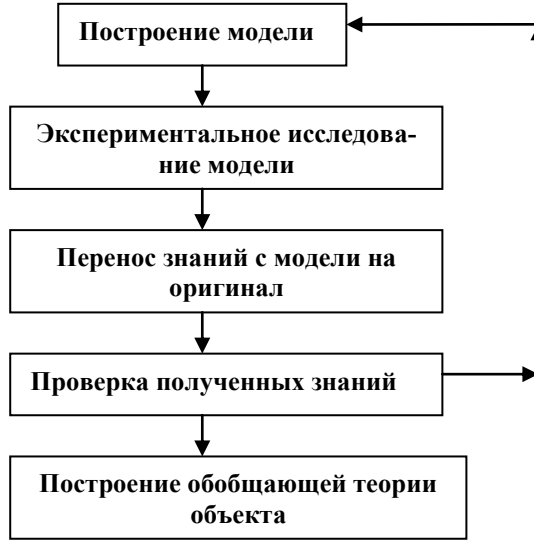
1) субъект (исследователь),

2) объект исследования,

3) модель, связывающую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.


Проблема
Формулировка цели
Постановка задачи
Выбор методов решения
Построение модели
Исследование по модели
Принятие решения
Выполнение решения
Результат

Процесс моделирования можно представить следующим образом



Любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько "специализированных" моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

На втором этапе процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования.

На третьем этапе осуществляется перенос знаний с модели на оригинал - формирование множества знаний S об объекте. Этот процесс переноса знаний проводится по определенным правилам.
Четвертый этап - практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им .

Моделирование - циклический процесс. Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым

знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах.

Большинство объектов, изучаемых экономической наукой, может быть охарактеризовано понятием *сложная система*.

Наиболее распространено понимание *системы* как совокупности элементов, находящихся во взаимодействии и образующих некоторую целостность, единство. Важным качеством любой системы является *эмерджентность* - наличие таких свойств, которые не присущи ни одному из элементов, входящих в систему. Поэтому при изучении систем недостаточно пользоваться методом их расчленения на элементы с последующим изучением этих элементов в отдельности. Одна из трудностей экономических исследований - в том, что почти не существует экономических объектов, которые можно было бы рассматривать как отдельные (внесистемные) элементы.

Классификация экономико-математических моделей

Математические модели экономических процессов и явлений более кратко можно назвать экономико-математическими моделями. Для классификации этих моделей используются разные основания.

По целевому назначению экономико-математические модели делятся на ***теоретико-аналитические***, используемые в исследованиях общих свойств и закономерностей экономических процессов, и ***прикладные***, применяемые в решении конкретных экономических задач (модели экономического анализа, прогнозирования, управления).

Математические модели в экономике могут использоваться для исследования различных сторон промышленности (в частности, его производственно-технологической, социальной, территориальной структур) и его отдельных частей. При классификации моделей по **исследуемым экономическим процессам и содержательной проблематике** можно выделить модели ***промышленности*** в целом и его подсистем - отраслей, регионов и т.д., комплексы моделей производства, потребления, формирования и распределения доходов, трудовых ресурсов, ценообразования, финансовых связей и т.д.

Остановимся более подробно на характеристике таких классов экономико-математических моделей, с которыми связаны наибольшие особенности методологии и техники моделирования.

В соответствии с общей классификацией математических моделей они подразделяются на ***функциональные*** **и** ***структурные***, а также включают промежуточные формы (***структурно-функциональные***). В исследованиях в промышленности чаще имеет смысл применять структурные модели, поскольку для планирования и управления большое значение имеют взаимосвязи подсистем. Типичными структурными моделями являются модели межотраслевых связей. Функциональные модели широко применяются в экономическом регулировании, когда на поведение объекта ("выход") воздействуют путем изменения "входа". Примером может служить модель поведения потребителей в условиях товарно-денежных отношений. Один и тот же объект может описываться одновременно и структурой, и функциональной моделью. Так, например, для планирования отдельной отраслевой системы используется структурная модель, а в промышленности каждая отрасль может быть представлена функциональной моделью.

Различают ***дескриптивные*** **и** ***нормативные модели***. Дескриптивные модели отвечают на вопрос: как это происходит? или как это вероятнее всего может дальше развиваться? То есть, они только объясняют наблюдаемые факты или дают вероятный прогноз. Нормативные модели отвечают на вопрос: «как это должно быть?», т.е. предполагают целенаправленную деятельность. Типичным примером нормативных моделей являются модели оптимального планирования, формализующие тем или иным способом цели экономического развития, возможности и средства их достижения.

Применение *дескриптивного* подхода в моделировании экономики объясняется необходимостью эмпирического выявления различных зависимостей в экономике, установления статистических закономерностей экономического поведения социальных групп, изучения вероятных путей развития каких-либо процессов при неизменяющихся условиях или протекающих без внешних воздействий. Примерами дескриптивных моделей являются производственные функции и функции покупательского спроса, построенные на основе обработки статистических данных.

Является ли экономико-математическая модель дескриптивной или нормативной, зависит не только от ее математической структуры, но от характера использования этой модели. Например, многофакторная модель межотраслевого баланса дескриптивна, если она используется для анализа пропорций прошлого периода. Но эта же математическая модель становится нормативной, когда она применяется для расчетов сбалансированных вариантов развития промышленного сектора, удовлетворяющих конечные потребности общества при плановых нормативах производственных затрат.

Многие экономико-математические модели сочетают признаки дескриптивных и нормативных моделей. Типична ситуация, когда нормативная модель сложной структуры объединяет отдельные блоки, которые являются частными дескриптивными моделями. Например, межотраслевая модель может включать функции покупательского спроса, описывающие поведение потребителей при изменении доходов. Подобные примеры характеризуют тенденцию эффективного сочетания дескриптивного и нормативного подходов к моделированию экономических процессов. Дескриптивный подход широко применяется в имитационном моделировании.

По характеру отражения причинно-следственных связей различают модели жестко *детерминистские* и модели, учитывающие *случайность* и неопределенность. Необходимо различать неопределенность, описываемую вероятностными законами, и неопределенность, для описания которой законы теории вероятностей неприменимы. Второй тип неопределенности гораздо более сложен для моделирования.

По способам отражения фактора времени экономико-математические модели делятся на *статические* и *динамические*. В статических моделях все зависимости относятся к одному моменту или периоду времени. Динамические модели характеризуют изменения экономических процессов во времени. По длительности рассматриваемого периода времени различаются модели краткосрочного (до года), среднесрочного (до 5 лет), долгосрочного (10-15 и более лет) прогнозирования и планирования. Само время в экономико-математических моделях может изменяться либо непрерывно, либо дискретно.

Модели *экономических процессов* чрезвычайно разнообразны по форме математических зависимостей. Особенно важно выделить класс линейных моделей, наиболее удобных для анализа и вычислений и получивших вследствие этого большое распространение. Различия между *линейными* и *нелинейными* моделями

Нелинейный характер может проявляться при расчете эффективности использования ресурсов при увеличении производства, изменении спроса и потребления населения при увеличении производства, изменении спроса и потребления населения при росте доходов и т.п.

Теория "линейной экономики" существенно отличается от теории "нелинейной экономики". От того, предполагаются ли множества производственных возможностей подсистем (отраслей, предприятий) выпуклыми или же невыпуклыми, существенно зависят выводы о возможности сочетания централизованного планирования и хозяйственной самостоятельности экономических подсистем.

По соотношению экзогенных и эндогенных переменных, включаемых в модель

1. *открытые*

Полностью открытых моделей не существует; модель должна содержать хотя бы одну эндогенную переменную.

2. *закрытые*.

Полностью закрытые экономико-математические модели, т.е. не включающие экзогенных переменных, исключительно редки; их построение требует полного абстрагирования от "среды", т.е. серьезного огрубления реальных экономических систем, всегда имеющих внешние связи.

3. Подавляющее большинство экономико-математических моделей занимает промежуточное положение и различаются по степени открытости (закрытости)[45].

модели промышленного уровня

1) *агрегированные*

2) *детализированные*

В зависимости от того, включают ли **модели пространственные факторы и условия** или не включают, различают **модели пространственные и точечные.**

Этапы математического моделирования

Основные этапы процесса моделирования уже рассматривались выше. В различных отраслях знаний, в том числе и в экономике, они приобретают свои специфические черты. Проанализируем последовательность и содержание этапов одного цикла экономико-математического моделирования.

1. Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ. Главное здесь - четко сформулировать сущность проблемы, принимаемые допущения и те вопросы, на которые требуется получить ответы. На этом этапе выделяются важнейшие черты и свойства моделируемого объекта и абстрагируются от второстепенных; изучаются структуры объекта и основных зависимостей, связывающих его элементы; формулирование гипотез (хотя бы предварительных), объясняющих поведение и развитие объекта.

2. Построение математической модели. Это - этап формализации экономической проблемы, выражения ее в виде конкретных математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств и т.д.). Обычно сначала определяется основная конструкция (тип) математической модели, а затем уточняются детали этой конструкции (конкретный перечень переменных и параметров, форма связей). Таким образом, построение модели подразделяется в свою очередь на несколько стадий.

Неправильно полагать, что чем больше фактов учитывает модель, тем она лучше "работает" и дает лучшие результаты. То же можно сказать о таких характеристиках сложности модели, как используемые формы математических зависимостей (линейные и нелинейные), учет факторов случайности и неопределенности и т.д. Излишняя сложность и громоздкость модели затрудняют процесс исследования. Нужно учитывать не только реальные возможности информационного и математического обеспечения, но и сопоставлять затраты на моделиро-

вание с получаемым эффектом (при возрастании сложности модели прирост затрат может превысить прирост эффекта).

Одна из важных особенностей математических моделей - потенциальная возможность их использования для решения разнокачественных проблем. Поэтому, даже сталкиваясь с новой экономической задачей, не нужно стремиться "изобретать" модель; вначале необходимо попытаться применить для решения этой задачи уже известные модели.

В процессе построения модели осуществляется взаимосопоставление двух систем научных знаний - экономических и математических. Естественно стремиться к тому, чтобы получить модель, принадлежащую хорошо изученному классу математических задач. Часто это удается сделать путем некоторого упрощения исходных предпосылок модели, не искажающих существенных черт моделируемого объекта. Однако возможна и такая ситуация, когда формализация экономической проблемы приводит к неизвестной ранее математической структуре. Потребности экономической науки и практики в середине XX в. способствовали развитию математического программирования, теории игр, функционального анализа, вычислительной математики. Вполне вероятно, что в будущем развитие экономической науки станет важным стимулом для создания новых разделов математики.

3. Математический анализ модели. Целью этого этапа является выяснение общих свойств модели. Здесь применяются чисто математические приемы исследования. Наиболее важный момент - доказательство существования решений в сформулированной модели (теорема существования). Если удастся доказать, что математическая задача не имеет решения, то необходимость в последующей работе по первоначальному варианту модели отпадает; следует скорректировать либо постановку экономической задачи, либо способы ее математической формализации. При аналитическом исследовании модели выясняются такие вопросы, как, например, единственно ли решение, какие переменные (неизвестные) могут входить в решение, каковы будут соотношения между ними, в каких пределах и в зависимости от каких исходных условий они изменяются, каковы тенденции их изменения и т.д. Аналитической исследование модели по сравнению с эмпирическим (численным) имеет то преимущество, что получаемые выводы сохраняют

свою силу при различных конкретных значениях внешних и внутренних параметров модели.

Знание общих свойств модели имеет столь же важное значение, часто ради доказательства подобных свойств исследователи сознательно идут на идеализацию первоначальной модели. И все же модели сложных экономических объектов с большим трудом поддаются аналитическому исследованию. В тех случаях, когда аналитическими методами не удается выяснить общих свойств модели, а упрощения модели приводят к недопустимым результатам, переходят к численным методам исследования.

4. Подготовка исходной информации. Моделирование предъявляет жесткие требования к системе информации. В то же время реальные возможности получения информации ограничивают выбор моделей, предназначаемых для практического использования. При этом принимается во внимание не только принципиальная возможность подготовки информации (за определенные сроки), но и затраты на подготовку соответствующих информационных массивов. Эти затраты не должны превышать эффект от использования дополнительной информации.

В процессе подготовки информации широко используются методы теории вероятностей, теоретической и математической статистики. При системном экономико-математическом моделировании исходная информация, используемая в одних моделях, является результатом функционирования других моделей.

5. Численное решение. Этот этап включает разработку алгоритмов для численного решения задачи, составления программ на ЭВМ и непосредственное проведение расчетов. Трудности этого этапа обусловлены, прежде всего, большой размерностью экономических задач, необходимостью обработки значительных массивов информации.

Обычно расчеты по экономико-математической модели носят многовариантный характер. Благодаря высокому быстродействию современных ЭВМ удается проводить многочисленные "модельные" эксперименты, изучая "поведение" модели при различных изменениях некоторых условий. Исследование, проводимое численными методами, может существенно дополнить результаты аналитического иссле-

дования, а для многих моделей оно является единственно осуществимым. Класс экономических задач, которые можно решать численными методами, значительно шире, чем класс задач, доступных аналитическому исследованию.

6. Анализ численных результатов и их применение. На этом заключительном этапе цикла встает вопрос о правильности и полноте результатов моделирования, о степени практической применимости последних.

Математические методы проверки могут выявлять некорректные построения модели и тем самым сужать класс потенциально правильных моделей. Неформальный анализ теоретических выводов и численных результатов, получаемых посредством модели, сопоставление их с имеющимися знаниями и фактами действительности также позволяют обнаруживать недостатки постановки экономической задачи, сконструированной математической модели, ее информационного и математического обеспечения.

Уже на этапе построения модели может выясниться, что постановка задачи противоречива или приводит к слишком сложной математической модели. В соответствии с этим исходная постановка задачи корректируется. Далее математический анализ модели (этап 3) может показать, что небольшая модификация постановки задачи или ее формализации дает интересный аналитический результат.

Наиболее часто необходимость возврата к предшествующим этапам моделирования возникает при подготовке исходной информации (этап 4). Может обнаружиться, что необходимая информация отсутствует или же затраты на ее подготовку слишком велики. Тогда приходится возвращаться к постановке задачи и ее формализации, изменяя их так, чтобы приспособиться к имеющейся информации.

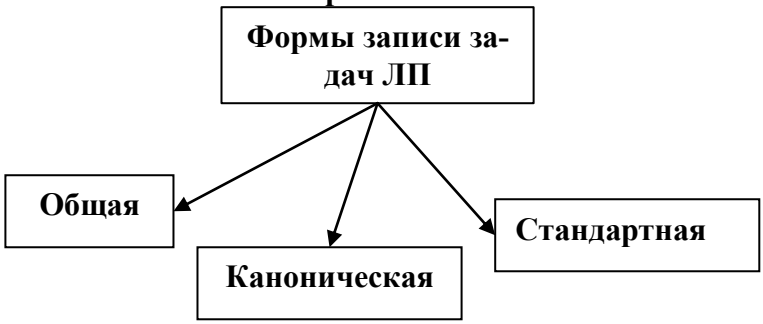
Задачи линейного программирования	
1. Количество продукции вида П	**1. Задача об использовании сырья для изготовления продукции нескольких видов с целью получения наибольшей прибыли**
2. Время работы предприятия по	**2. Задача о выборе оптимальных**

	технологическому способу Tj		**технологий работы предприятия**
3.	Количество вещества Mj в составе смеси	**3.**	**Задача о выборе наиболее экономичной смеси ингредиентов (руды, нефти, пищевых продуктов) при учете ограничений на физический или химический состав смеси и на наличие необходимых материалов**
4.	Количество материала , раскраиваемого по способу Sj	**4.**	**Задача о раскрое длинномерных материалов.**
5.	Количество груза Xij, перевозимого из пункта Ai в пункт Bj	**5.**	**Транспортная задача**

1.	**<u>Задача об использовании сырья для изготовления продукции нескольких видов с целью получения наибольшей прибыли.</u>** ☞ На предприятии производится продукция нескольких видов. ☞ Используется сырье ☞ Запасы сырья ограничены величинами ☞ Известны нормы расхода каждого вида сырья ☞ Известна прибыль от реализации единицы продукции ◈ **Нужно определить, сколько продукции каждого вида требуется произвести из имеющегося в наличии сырья, чтобы получить наибольшую прибыль.**

2.	**Задача о выборе оптимальных технологий работы предприятия** ☞ Предприятие производит продукцию по нескольким технологическим способам. ☞ Известны количество продукции, выпущенной предприятием за единицу времени работы по технологическому способу (в денежных или натуральных единицах) ☞ В производстве используются ресурсы (сырье, электроэнергия, машинный парк, время, ..) ☞ Запас каждого ресурса ограничен ☞ Заданы числа-расходы ресурсов за единицу времени работы предприятия с применением технологии ⍰ **Требуется определить, сколько времени должно работать предприятие по каждой технологии, чтобы объем выпущенной продукции в стоимостном выражении или в натуральных единицах за время работы предприятия по всем технологиям был наибольшим**
3.	**Задача о выборе наиболее экономичной смеси ингредиентов** ☞ **Химический состав содержит ограничения** ☞ **Физический состав содержит ограничения** ☞ **Запасы сырья не превышают определенных значений** **Требуется выбрать наиболее экономичную смесь ингредиентов**
4.	**Задача о раскрое длинномерных материалов.** ☞ Одинаковые заготовки (доски, отрезы ткани, отливки и т.д.) раскраиваются несколькими способами (вариантами раскроя) с целью получения деталей определенных размеров (определенной длины). ⍰ **Требуется произвести необходимое количество деталей, чтобы отходы производства были наименьшими.**
5.	**Транспортная задача** ☞ В пунктах имеется однородный груз в количестве, который необходимо перевезти в пункты с потребностями в грузе ☞ Известны тарифы на перевозку единицы груза из одного пункта в другой (транспортные расходы) ☞ Известно время перевозки груза из одного пункта в другой ⍰ **Требуется найти такой план перевозки всего груза, чтобы транспортные расходы или время перевозки были наименьшими**

Формы записи математических задач линейного программирования



Формы записи математических задач

Общая форма

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \to max(min)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = в_i, \quad i = 1,\ldots, m_1; \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \geq в_i, \quad i = m_1 + 1,\ldots, m_2; \\ a_{i1}x_i + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \leq в_i, \quad i = m_2 + 1,\ldots, m; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0. \end{cases}$$

Каноническая форма

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \to max(min)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = в_i, \quad i = 1,\ldots, m; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0 \end{cases}$$

Стандартная форма

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \to max(min)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \geq в_i, \quad i = 1,\ldots, m_1, \\ a_{i1}x_i + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n \leq в_i, \quad i = m_1 + 1,\ldots, m, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0. \end{cases}$$

1) **Задача об использовании сырья для изготовления продукции нескольких видов с целью получения наибольшей прибыли.**

	A	B	C	Запасы
Сырье 1	2	4	3	850
Сырье 2	4	2	1	650
Сырье 3	2	4	3	450

производительность	16	10	12	
затраты	1	3	4	

Составим математическую модель задачи

Пусть X1 ед продукции вида A,

X2 ед .продукции вида B,

X3 ед .продукции вида C,

тогда расход сырья не должен превышать запасов на складе

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 850 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 650 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 450 \end{cases}$$

$$Z = (16 - 1)x_1 + (10 - 3)x_2 + (12 - 4)x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 850 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 650 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 450 \end{cases}$$

$$Z = 15x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \max$$

Приведем задачу к каноническому виду. Для этого перейдем от неравенств к уравнениям. Введем дополнительные переменные, экономический смысл которых - неиспользованное сырье каждого вида.

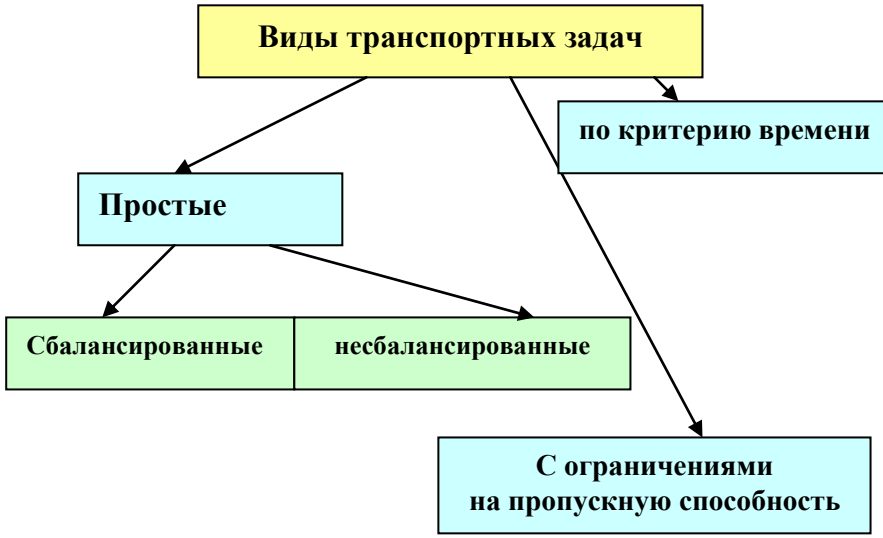
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 850 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 650 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 450 \end{cases}$$

$$Z = 15x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max$$

Составляем таблицу, из которой находим путем преобразований решение задачи

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	b	Bi/ai
X4	2	4	3	1	0	0	850	
X5	4	2	1	0	1	0	650	
X6	2	4	3	0	0	1	450	
F	-15	-7	-8	0	0	0	0	

2. Транспортная задача.



Цель: найти такой план перевозки грузов от поставщиков к потребителям, чтобы общие затраты на перевозку были минимальными.
Матрица перевозок имеет вид:
Таблица 1.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	6	5	4	1	8	150
A2	6	3	7	2	4	200
A3	6	2	8	9	1	200
Потребности	100	180	40	120	110	

В левом верхнем углу внутренних клеток пишем тарифы на перевозку грузов от поставщиков к потребителям.
Значения тарифов берутся из матрицы С, которая обычно дается в условии задачи.

Тариф C_{ij} **-** это величина, равная или пропорциональная **стоимости перевозки единицы** груза из пункта отправления A_i в пункт получения B_j.

Поставка X_{ij} **-**это величина, обозначающая **количество груза,** которое перевозится из пункта отправления A_i в пункт получения B_j.

Клетки матрицы перевозок, где $X_{ij} \geq 0$ **,** называются **базисными,** а остальные, где $X_{ij} = 0$ **, свободными.**

В матрице имеется (m+n-1) базисных клеток.

Значение $X_{ij} = 0$ в свободной клетке не пишется явно, а вместо этого в ней ставится точка.

!!! Все поставки $X_{ij} \geq 0$ **!!!**

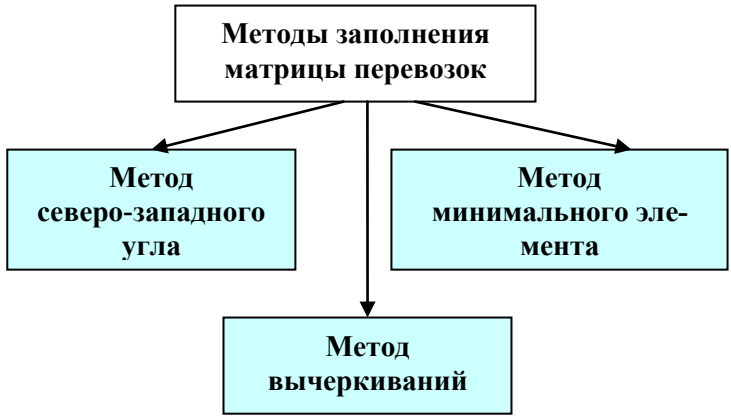
Общая стоимость всех перевозок равна сумме произведений поставок X_{ij} на тарифы C_{ij}:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} C_{ij}$$

План перевозок - это совокупность всех поставок X_{ij} **.**

Оптимальный план перевозок- это такой план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} C_{ij}$ минимальна**.**

Заполнить матрицу перевозок можно разными методами.



Метод северо – западного угла

- Поставки вписываются в клетки матрицы перевозок, начиная с левого верхнего угла в правый нижний угол.
- Фактически это означает, что товар вывозится по порядку от каждого поставщика: сначала вывозится груз от первого поставщика до тех пор, пока у первого поставщика не кончатся запасы, затем от второго поставщика, затем от третьего и т.д.
- Потребители также получают товар в порядке очередности: сначала первый потребитель получает поставки до тех пор, пока его потребности не будут удовлетворены, затем второй, за ним третий и т.д.
- Процесс продолжается до тех пор, пока не будут вывезены все запасы или не удовлетворены все потребности

Таблица 2.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	6 100	5 50	4	1	8	150
A2	6	3 130	7 40	2 30	4	200
A3	6	2	8	9 90	1 110	200
Потребности	100	180	40	120	110	

$$Z_{с/з} = 100 \cdot 6 + 50 \cdot 5 + 130 \cdot 3 + 40 \cdot 7 + 30 \cdot 2 + 90 \cdot 9 + 110 \cdot 1 = 2400$$

При нахождении начального плана перевозок возможен случай вырождения, когда в результате вычислений значения X_{ij} получается, что потребности в пункте B_j удовлетворены , а запасы в пункте A_i исчерпаны. Тогда одновременно из рассмотрения выбывают строка и столбец. В этом случае рекомендуется поставить в одну из клеток выбывающих строки и столбца (лучше в клетку с наименьшей стоимостью) так называемый **базисный нуль.** Клетка с базисным нулем считается базисной (в ней пишется 0), а общее число базисных клеток остается равным (m+n-1).

Метод минимального элемента.

- ☞ Здесь принцип заполнения клеток заключается не в руководстве очередностью поставщиков и потребителей, а в стоимости перевозок.
- ☞ Сначала выбираются и заполняются клетки с минимальными тарифами на перевозку, а затем с более высокими тарифами. Размеры тарифов идут по возрастанию.
- ☞ Стараемся в клетки с минимальными тарифами вписать максимально возможные поставки.

Таблица 3.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	6	5	4 30	1 120	8	150
A2	6 100	3 90	7 10	2	4	200
A3	6	2 90	8	9	1 110	200
Потребности	100	180	40	120	110	

$$Z_{м/э} = 30 \cdot 4 + 120 \cdot 1 + 100 \cdot 6 + 90 \cdot 3 + 10 \cdot 7 + 90 \cdot 2 + 110 \cdot 1 = 1470$$

Выгоднее перевозить грузы по схеме, заполненной методом минимального элемента

Если сумма всех запасов равна сумме всех потребностей, то **модель** задачи линейного программирования называется моделью **закрытого типа.**

Если сумма всех запасов не равна сумме всех потребностей, то **модель** задачи линейного программирования называется **открытого типа.**

Таблица 4.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	6 100	5 50	4	1	8	**150**
A2	6	3 130	7 40	2 30	4	**200**
A3	6	2	8	9 90	1 110	**200**
Потребности	**100**	**180**	**40**	**120**	**110**	**550 550**

☞ *Если получили модель открытого типа, то ее обязательно нужно привести к модели закрытого типа с помощью введения фиктивного поставщика или потребителя с недостающим объемом грузов и нулевыми тарифами на перевозку!!!*

Подсчитываем количество базисных клеток.

☞ Если количество базисных клеток равно **m+n-1,** то план перевозок называется **невырожденным**.

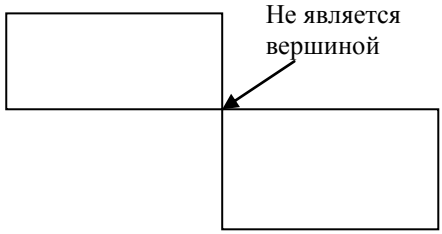
☞ Если количество базисных клеток **не** равно **m+n-1,** то план перевозок называется **вырожденным.**

Если количество клеток меньше, чем m+n-1, нужно дописать нулевые поставки в свободные ацикличные клетки, чтобы количество клеток стало равным m+n-1.

☞ Клетка называется **ацикличной**, если она не образует с другими клетками замкнутый цикл.

Циклом называется многоугольник, у которого:

1. Все стороны расположены в строках и столбцах матрицы.
2. Все угла многоугольника прямые.
3. Все вершины расположены в базисных клетках, за исключением, может быть одной.
4. Стороны многоугольника могут пересекаться, но точка пересечения может не быть вершиной цикла:



☞ Число вершин в цикле должно быть четно!!!

Означенным циклом называется цикл, в котором некоторой вершине приписан знак «+», а затем при обходе цикла в каком-либо направлении знаки чередуются.

Проверяем полученный план перевозок на оптимальность с помощью **метода потенциалов.**

Для базисных клеток составляем уравнения $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$

$\alpha_1 + \beta_3 = 4$ $\quad 0 + \beta_3 = 4 \Rightarrow \beta_3 = 4$

$\alpha_1 + \beta_4 = 1$ $\quad 0 + \beta_4 = 1 \Rightarrow \beta_4 = 1$

$\alpha_2 + \beta_1 = 6$ $\quad \alpha_2 + \beta_1 = 6$

$\alpha_2 + \beta_2 = 3$ пусть $\alpha_1 = 0$, тогда $\alpha_2 + \beta_2 = 3$

$\alpha_2 + \beta_3 = 7$ $\quad \alpha_2 + \beta_3 = 7$

$\alpha_3 + \beta_2 = 2$ $\quad \alpha_3 + \beta_2 = 2$

$\alpha_3 + \beta_5 = 1$ $\quad \alpha_3 + \beta_5 = 1$

$\beta_3 = 4$ $\beta_3 = 4$

$\beta_4 = 1$ $\beta_4 = 1$

$\alpha_2 + \beta_1 = 6$ $3 + \beta_1 = 6 \Rightarrow \beta_1 = 3$

$\alpha_2 + \beta_2 = 3$ $3 + \beta_2 = 3 \Rightarrow \beta_2 = 0$

$\alpha_2 + 4 = 7 \Rightarrow \alpha_2 = 3$ $\alpha_2 = 3$

$\alpha_3 + \beta_2 = 2$ $\alpha_3 + \beta_2 = 2$

$\alpha_3 + \beta_5 = 1$ $\alpha_3 + \beta_5 = 1$

$\beta_3 = 4$	$\beta_3 = 4$	$\beta_3 = 4$
$\beta_4 = 1$	$\beta_4 = 1$	$\beta_4 = 1$
$\beta_1 = 3$	$\beta_1 = 3$	$\beta_1 = 3$
$\beta_2 = 0$	$\beta_2 = 0$	$\beta_2 = 0$
$\alpha_2 = 3$	$\alpha_2 = 3$	$\alpha_2 = 3$
$\alpha_3 + 0 = 2 \Rightarrow \alpha_3 = 2$	$\alpha_3 = 2$	$\alpha_3 = 2$
$\alpha_3 + \beta_5 = 1$	$2 + \beta_5 = 1$	$\beta_5 = -1$

Подставим полученные значения в неравенства, соответствующие пустым клеткам. Для свободных клеток вычисляем относительные оценки

$\Delta_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$

Если все относительные оценки неотрицательные, то задача решена.
Если среди этих оценок есть отрицательные, найти среди них наименьшую отрицательную оценку и пометить, например знаком $\otimes$.

$c_{11} - (\alpha_1 + \beta_1) = 3$; $c_{25} - (\alpha_2 + \beta_5) = 2$;

$c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 5$; $c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 1$;

$c_{15} - (\alpha_1 + \beta_5) = 9$; $c_{33} - (\alpha_3 + \beta_3) = 2$;

$c_{24} - (\alpha_2 + \beta_4) = -2$;$\otimes$ $c_{34} - (\alpha_3 + \beta_4) = 6$.

Для свободной клетки (i,j) с выбранной оценкой Δ_{ij} , помеченной $\otimes$, построить означенный цикл (свободная клетка берется со знаком «+»)

Таблица 5.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	6	5	4 30 +	1 120 -	8	150
A2	6 100	3 90	7 10 -	2 +	4	200
A3	6	2 90	8	9	1 110	200
Потребности	100	180	40	120	110	550 550

Выполнить сдвиг по построенному циклу на величину Θ, равную наименьшему из чисел, стоящих в отрицательных вершинах (Θ =10). При этом числа, стоящие в положительных вершинах, увеличить на Θ, а числа, стоящие в отрицательных вершинах, уменьшить на Θ.

Если наименьшее значение Θ достигается в нескольких отрицательных вершинах цикла, то при сдвиге следует поставить базисный нуль во всех таких вершинах, кроме одной. Тогда число базисных клеток сохранится и будет равно (m+n-1), что необходимо проверять при расчетах.

Элементы матрицы, не входящие в цикл, остаются без изменений.

Далее для измененной матрицы вновь перейти к следующей итерации, которая начинается с построения уравнений вида $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$.

Таблица 6.

	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	6	5	4 40	1 110	8	150
A2	6 100	3 90	7	2 10	4	200
A3	6	2 90	8	9	1 110	200
Потребности	100	180	40	120	110	550 550

Для базисных клеток $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$

$\alpha_1 + \beta_3 = 4$ $\quad 0 + \beta_3 = 4 \Rightarrow \beta_3 = 4$

$\alpha_1 + \beta_4 = 1$ $\quad 0 + \beta_4 = 1 \Rightarrow \beta_4 = 1$

$\alpha_2 + \beta_1 = 6$ $\quad \alpha_2 + \beta_1 = 6$

$\alpha_2 + \beta_2 = 3$ пусть $\alpha_1 = 0$, тогда $\alpha_2 + \beta_2 = 3$

$\alpha_2 + \beta_4 = 2$ $\quad \alpha_2 + \beta_4 = 2$

$\alpha_3 + \beta_2 = 2$ $\quad \alpha_3 + \beta_2 = 2$

$\alpha_3 + \beta_5 = 1$ $\quad \alpha_3 + \beta_5 = 1$

$\beta_3 = 4$ $\quad \beta_3 = 4$

$\beta_4 = 1$ $\quad \beta_4 = 1$

$\alpha_2 + \beta_1 = 6$ $\quad 1 + \beta_1 = 6 \Rightarrow \beta_1 = 5$

$\alpha_2 + \beta_2 = 3$ $\quad 1 + \beta_2 = 3 \Rightarrow \beta_2 = 2$

$\alpha_2 + 1 = 2 \Rightarrow \alpha_2 = 1$ $\quad \alpha_2 = 1$

$\alpha_3 + \beta_2 = 2$ $\quad \alpha_3 + \beta_2 = 2$

$\alpha_3 + \beta_5 = 1$ $\quad \alpha_3 + \beta_5 = 1$

$\beta_3 = 4$ $\quad \beta_3 = 4$ $\quad \beta_3 = 4$

$\beta_4 = 1$ $\quad \beta_4 = 1$ $\quad \beta_4 = 1$

$\beta_1 = 5$ $\quad \beta_1 = 5$ $\quad \beta_1 = 5$

$\beta_2 = 2$ $\quad \beta_2 = 2$ $\quad \beta_2 = 2$

$\alpha_2 = 1$ $\quad \alpha_2 = 1$ $\quad \alpha_2 = 1$

$\alpha_3 + 2 = 2 \Rightarrow \alpha_3 = 0$ $\quad \alpha_3 = 0$ $\quad \alpha_3 = 0$

$\alpha_3 + \beta_5 = 1$ $\quad 0 + \beta_5 = 1$ $\quad \beta_5 = 1$

Подставим полученные значения в неравенства, соответствующие пустым клеткам.

$c_{11} - (\alpha_1 + \beta_1) = 1$ $\quad c_{12} - (\alpha_1 + \beta_2) = 3$

$c_{15} - (\alpha_1 + \beta_5) = 7$ $\quad c_{23} - (\alpha_2 + \beta_3) = 2$

$c_{25} - (\alpha_2 + \beta_5) = 2$ $\quad$ $c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 1$

$c_{33} - (\alpha_3 + \beta_3) = 4$ $\quad$ $c_{34} - (\alpha_3 + \beta_4) = 8$

Все клетки оптимальны. План оптимален.

$$Z_{опт} = 40 \cdot 4 + 110 \cdot 1 + 100 \cdot 6 + 90 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 90 \cdot 2 + 110 \cdot 1 = 1450$$

Симплекс – метод решения задач ЛП.

Основная идея применения симплексного метода заключается в последовательном улучшении опорных планов задач линейного программирования.

Симплексный метод позволяет получить оптимальное решение за конечное число шагов.

Каждый шаг (итерация) позволяет переходить от одного опорного плана к другому опорному плану, которому соответствует большее значение целевой функции (в случае максимизации целевой функции).

Этапы решения задачи симплекс-методом

Симплекс-метод
Задача ЛП приводится к каноническому виду
Начальное опорное решение
Отсутствует
Есть
Задача не имеет решений, так как система ограничений несовместна
Переходим от одного опорного решения к другому
Если целевая функция неограничена, то решений нет
Признак единственности выполняется
Да
Нет
Конец
Путем простого перебора находим все оптимальные решения

Пусть мы имеем задачу ЛП в канонической форме. Матрица ограничений имеет вид:

$\overline{A}_1 x_1 + \ldots + \overline{A}_n x_n + \overline{e}_1 x_{n+1} + \ldots + \overline{e}_m x_{n+m} = \overline{A}_0$, где

$\overline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\overline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; $\ldots$; $\overline{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ - единичный базис. Элементы $a_{i0} \geq 0$ для всех i=1,2,…,m.

Применим метод полного исключения к расширенной матрице ограничений. Выбираем направляющий элемент a_{ij} на данной итерации. В результате преобразований Гаусса получим новые значения коэффициентов.

Преобразование Гаусса называют симплексным преобразованием, когда направляющий элемент определяют по следующим правилам:

а) направляющий столбец выбирают из условия, что в нем имеется хотя бы один положительный элемент;

б) направляющую строку выбирают так, чтобы отношение $\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$ было минимальным при условии, что $a_{ij} > 0$;

Задачи ЛП, решаемые с помощью симплекс-метода, основываются на представлении решения в табличной форме.

Пусть имеется линейная форма $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to max$ и ограничения

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq a_{10} \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leq a_{20} \\ \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq a_{m0} \end{cases}$$

Приведем эту матрицу к каноническому виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + \ldots + 0x_{n+m} = a_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + \ldots + 1x_{n+m} = a_{m0} \end{cases}$$

Составим следующую таблицу

C			c_1	c_2	c_3	…	c_j	…	c_n	0	…	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	…	A_j	…	A_n	A_{n+1}	…	A_{n+m}
c_{n+1}	x_{n+1}	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{ij}	…	a_{in}	1	…	0
c_{n+2}	x_{n+2}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_{n+i}	x_{n+i}	a_{i0}	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	…	a_{ij}	…	a_{in}	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_{n+m}	x_{n+m}	a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	0	…	1
		a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	…	a_{0j}	…	a_{0n}	$a_{0,n+1}$	…	$a_{0,n+m}$

Нижняя строка элементов a_{0k}, $k = \overline{0, m+n}$ называют **индексной**. Элементы индексной строки вычисляются следующим образом: $a_{0k} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i} - c_k$, $i = \overline{1,m}$. Здесь i означает номер соответствующей строки. Поскольку на первом шаге заполнения таблицы все $c_{n+i} = 0$, то элементам индексной строки присваиваются значения соответствующих элементов данного столбца, взятые с обратным знаком, т.е. $a_{0k} = -c_k$. Последняя строка таблицы служит для определения направляющего столбца.

Элемент $a_{00} = \sum_{k=1}^{m} c_{n+k}a_{k0}$, где k – номер базисной переменной (индексация идет по строкам таблицы)

В столбце B_x записываются базисные переменные, на первом шаге в качестве базисных выбирают фиктивные переменные $\{x_{n+k}\}$, $k = \overline{1,m}$. В дальнейшем их нужно вывести из базиса.

В столбец C записывают коэффициенты при x_{n+k}. На первом шаге значения этих коэффициентов равны 0.

Для перехода от базиса фиктивных переменных к базису реальных переменных применяют следующие правила:

а) в качестве направляющего столбца выбирают A_j для которого выполняется условие $a_{0j} = min\{a_{0l}\}, \quad l = \overline{1, n+m}$ при $a_{0l} < 0;$

б) выбирают направляющую строку, для чего каждый элемент столбца свободных членов делится на соответствующий элемент направляющего столбца, элемент столбца свободных членов находится в одной строке с элементом направляющего столбца $\frac{a_{i0}}{a_{ij}}$. Из всех возможных соотношений выбирается минимальное $\frac{a_{i0}}{a_{ij}} = min\left\{\frac{a_{r0}}{a_{rj}}\right\}$ при условии, что $a_{rj} > 0, \ 1 \le r \le m$

Применяя эти правила, определяем направляющий элемент.

Далее выполняется шаг симплексных преобразований. Переменная, которая соответствует направляющему столбцу, вводится в базис, а переменная, соответствующая направляющей строке, выводится из базиса. При этом для переменной, вводимой в базис, изменяется соответствующее значение коэффициента целевой функции.

Если направляющий элемент a_{ij}, то переход от данной таблицы к следующей осуществляется с использованием следующих правил:

а) для всех элементов направляющей строки

$a_{il}^{(k+1)} = \frac{a_{il}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}}$, где k – номер шага (k=1,2,…),

i – номер направляющей строки,

j – номер направляющего столбца,

$l = \overline{0, m+n}$, т.е. все элементы направляющей строки делим на направляющий элемент, в итоге направляющий элемент стал равным 1; $a_{ij}^{(k+1)} = 1;$

б) в направляющем столбце нужно получить $a_{rj}^{(k+1)} = 0$ для всех $r = \overline{1,m}$, $r \neq i$, при $a_{ij}^{(k+1)} = 1$, т.е. в направляющем столбце должны быть все нули кроме направляющего элемента, который равен 1.

Для всех остальных элементов, включая индексную строку, проводим вычисления $a_{rl}^{(k+1)} = a_{rl}^{(k)} - \dfrac{a_{il}^{(k)} a_{rj}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}}$, $l \neq j, r \neq i$.

Симплексные преобразования повторяют до тех пор, пока не реализуется один из двух возможных исходов:

а) все $a_{0l} \geq 0$ - это условие оптимальности базиса последней таблицы;

б) найдется такой элемент $a_{0j} < 0$ при котором все элементы столбца $a_{rj} \leq 0$ - это признак неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений.

Пример. Найти максимум линейной формы $4x_1 + 3x_2$ при ограничениях $x_1 \leq 4000$, $x_2 \leq 6000$, $x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 6000$, $x_1, x_2 \geq 0$

Каноническая форма:

$$4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4000, \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 6000, \\ 1x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 6000, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Исходная симплекс – таблица

c_i			4	3	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	4000	1	0	1	0	0
0	x_4	6000	0	1	0	1	0
0	x_5	6000	1	$2/3$	0	0	1
		0	- 4	- 3	0	0	0

Поскольку - 4 < - 3 < 0, то направляющим является первый столбец. Составив отношение вида $\left\{ \frac{a_{i0}}{a_{i1}} \right\}$, определяем направляющую строку. Для этого находим минимальное отношение $min \left\{ \frac{4000}{1}, \frac{6000}{0}, \frac{6000}{1} \right\} = 4000$. Отсюда следует, что направляющей является первая строка, а направляющим элементом - $a_{11} = 1$. Применив первый шаг, получим

c_i			4	3	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_1	4000	1	0	1	0	0
0	x_4	6000	0	1	0	1	0
0	x_5	2000	0	$2/3$	- 1	0	1
		16000	0	- 3	4	0	0

В качестве направляющего столбца выбираем второй, направляющая строка – третья, т.к. $\frac{2000}{2/3} < \frac{6000}{1} < \frac{4000}{0}$.

c_i			4	3	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_1	4000	1	0	1	0	0
0	x_4	3000	0	0	$3/2$	1	$-3/2$
0	$x2$	3000	0	1	$-3/2$	0	$3/2$
		25000	0	0	$-1/2$	0	$9/2$

Т.к. $a_{03} = -\frac{1}{2} < 0$, то направляющий столбец A_3, направляющая строка – вторая, направляющий элемент - $a_{23} = \frac{3}{2}$.

c_i			4	3	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_1	2000	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	1
0	x_3	2000	0	0	1	$\frac{2}{3}$	- 1
0	x_2	6000	0	1	0	1	0
		26000	0	0	0	$\frac{1}{3}$	4

Поскольку в индексной строке все элементы неотрицательные, это означает, что решение найдено, оно оптимально и имеет вид $x_{10} = 2000$, $x_{20} = 6000$, $x_{30} = 2000$. Искомое значение целевой функции равно $4x_1 + 3x_2 = 26000$.

Двойственные задачи

Каждой задаче ЛП можно определенным образом поставить в соответствие другую задачу, тоже ЛП, которую называют **двойственной** по отношению к данной (исходной) задаче. Исходная и двойственная задачи тесно связаны между собой и образуют **единую пару** двойственных задач.

Часто бывает так, что задача в исходной формулировке сложна для решения – проще перейти к двойственной задаче, решить ее и затем пересчитать и исследовать решение исходной задачи.

В зависимости от структуры модели исходной задачи различают **симметричные**

Целочисленное программирование

Задача целочисленного программирования формулируется так:

Целевая функция стремится к максимуму или к минимуму

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + ... + c_n x_n \rightarrow \max(\min)$$

Система линейных ограничений- неравенств записывается в каноническом виде

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + ... + a_{1n} x_n = в_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + ... + a_{2n} x_n = в_2 \\ \quad ..... \quad ..... \quad ..... \\ a_{1m} x_1 + a_{2m} x_2 + a_{3m} x_3 + ... + a_{mn} x_n = в_m \end{cases}$$

Метод Гомори

1. Задача решается симплекс- методом без учета целочосленности переменных.
2. Если оптимальное решение оказывается целочисленным, то решение задачи заканчивается.
3. Если оптимальное решение не целочисленное, то из системы ограничений выбирают уравнение, для которого дробная часть координаты оптимального решения имеет наибольшее значение, и на его основе составляется дополнитнельное ограничение.
4. Дополнительное ограничение отсекает от области допустимых решений нецелочисленное оптимальное решение,

но при этом сохраняет целочисленные вершины этой области.

Теория игр

Конфликт-это ситуация, в которой участвуют стороны, интересы которых полностью или частично противоположны

Игра- это упрощенная модель конфликтной ситуации.

Игра- это действительный или формальный конфликт, в котором имеется хотя бы два игрока(участника), каждый из которых стремится к достижению собственных целей.

Игроки- множество заинтересованных сторон, которые называются участниками, лицами, сторонами.

Стратегии (Ходы)- возможные действия каждой из сторон

Чистая стратегия- это стратегия, ориентированная на определенное поведение игрока- противника.

Смешанная стратегия-это стратегия, ориентированная на несколько возможных стратегий поведения игрока-противника.

Платеж - числовая характеристика, выражающая интересы сторон.
Платеж – количественная оценка результатов игры

Функции выигрыша - интересы сторон
Участник игры – человек – называется лицом, принимающим управленческое решение (ЛПР).
Пример: ЛПР- руководитель предприятия, менеджер, экономист, владелец фирмы.
Человек – это сознательный игрок, отвечающий за выбор тех или иных решений.

Классификация игр

1) **По количеству игроков**- игры с двумя, тремя и более числом игроков.
2) **По количеству стратегий**- различают конечные и бесконечные игры.
3) **По свойствам функций выиграша** (платежных функций)

    a) **Игры с нулевой суммой (антагонистические)**- это игры, в которых есть прямой конфликт и выигрыш одного участника равен проигрышу второго.
    b) **Игры с постоянной разностью** - это игры, в которых игроки выигрывают и проигрывают одновременно
4) **По возможности предварительных переговоров**
    a) **кооперативные игры**- это игры, в которых до начала игры игроки образуют коалиции принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях.
    b) **некооперативные игры** - игры, в которых совместные взаимные обязательства между игроками не принимаются и игроки не координируют свои совместные действия.
5) **Позиционные игры**- игры, в которых задается последовательность принятия решений игроками.
6) **Игры с природой (Статистические игры)**- это специальный класс матричных игр между двумя участниками - человеком с одной стороны и природой с другой стороны. **Статистические игры** представляют собой основную модель теории принятия решений в условиях частичной или полной неопределенности.

Этапы решения игровых ситуаций

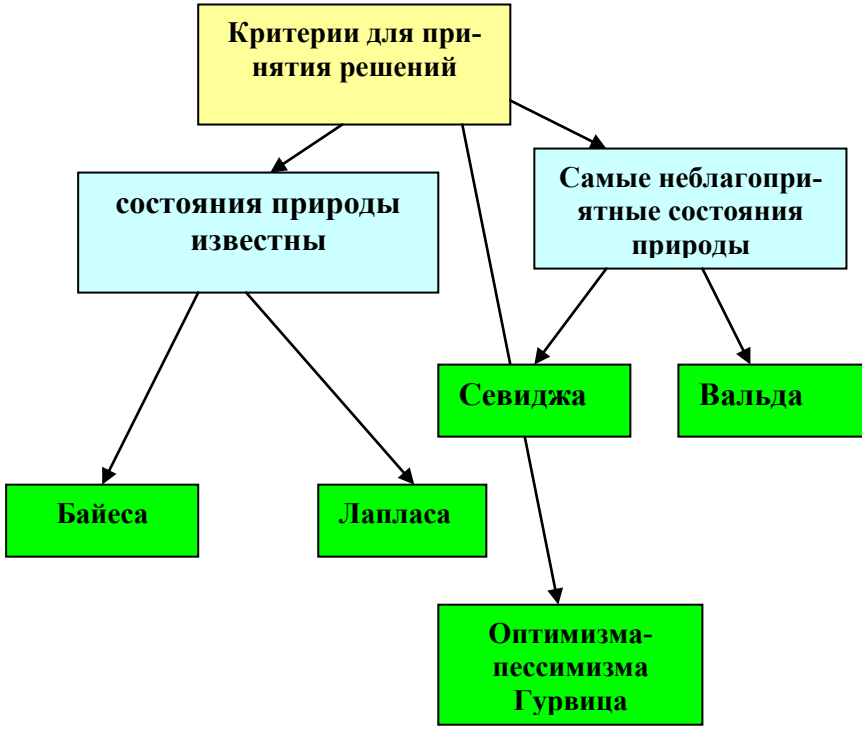
этапы	
1	**определение участников игры(игроков)**
2	**определение стратегий игроков**
3	**определение выигрышей игроков при использова-**

	нии каждой стратегии
4	**представление матрицы выигрышей(платежей) в нормальной форме**

Прием уменьшения размерности игры за счет определения доминирующих строк и столбцов в платежной матрице

Доминирующей строкой называется строка, в которой все числа больше или равны соответствующим числам другой строки.

Доминирующим столбцом называется столбец , все элементы которого меньше элементов других столбцов.

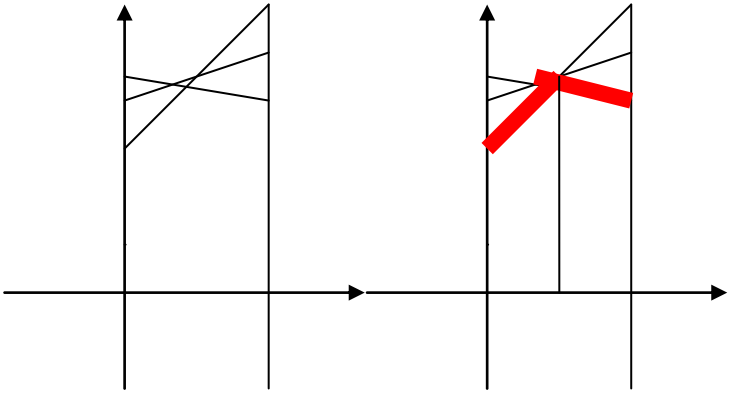


Геометрический способ решения задачи размерности $2 \times n$ **и** 2×2

1. Строят прямые, соответствующие стратегиям первого или второго игрока
2. Определяют нижнюю или верхнюю границы выигрыша
3. Находят две стратегии первого или второго игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с максимальной или минимальной ординатой
4. Определяют цену игры и оптимальные стратегии

Примеры геометрического решения игры размерности $2 \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$



Критерии	Состояния природы	Показатель оптимальности	Выбор оптимальной стратегии	Запись критерия
Байеса	известны	величина среднего выигрыша	Средний выигрыш наибольший	$\overline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} q_j$ $a = \max_i \overline{a}_i$
		величина среднего риска	Средний риск наименьший	$\overline{r}_i = \sum_{i=1}^{n} r_{ij} q_j$ $r = \min_i \overline{r}_i$
Лапласа	Правдоподобны и равновозможны			$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_r$
Вальда				
Севиджа				
Гурвица		$R = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$		

Пусть даны состояния природы

стратегии	B1	B2	α
A1	5	3	3
A2	1	2	1
β	5	3	3\3

Игра с седловой точкой.
V=α=β=3

Риском называется число, равное разности между своим максимально возможным выигрышем, который мог бы получить игрок, если бы достоверно знал стратегии своего противника

Задача 1

Обувная фабрика планирует выпуск двух моделей обуви А1 и А2. Спрос на эти модели предполагает два состояния Б1 и Б2. В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей А.

Найти **оптимальное соотношение** между объемами каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется прибыль при любом состоянии спроса.

Прибыль, которую предприятие получает при данном объеме выпуска модели и соответствующим состоянием спроса, определяется матрицей:

	B1	B2
A1	1	4
A2	3	5

Определяем стратегию для получения максимальной прибыли при минимальных затратах.

A 1=мин(1,4)=1

A 2=мин(3,5)=3

A =мах (a1 , a2)=мах (1,3)=3

B1=мах (1,3)=3

B2=мах (4,5)= 5
B= мин(3,5)=3
Так как A=B=3, то данная игра с седловой точкой, поэтому для игрока А выгодна стратегия А1, а для игрока В выгодна стратегия В1.

Оформляем решение задачи в виде таблицы

	B1	B2	a
A1	1	4	1
A2	3	5	3
	3	5	3\3

Для определения наиболее выгодных стратегий применяем различные критерии.

Критерий Вальда.

α =max min$\{\alpha\}$=max$(1,3) = 3$

По критерию Вальда наиболее выгодна стратегия А2

Критерий Севиджа.

Критерий Гурвица

Даны вероятности, с которыми выбирается объем выпуска продукции

$p_1 = 0,3 \quad p_2 = 0,7 \quad \lambda = 0,6$

	B1	B2	min a_{ij}	λ min a_{ij}	max a_{ij}	$(1-\lambda)$ max a_{ij}	γ
A1	1	4	1	$0,6 \cdot 1 = 0,6$	4	$0,4 \cdot 4 = 2,4$	$0,6 + 2,4 = 3$
A2	3	5	3	$0,6 \cdot 3 = 1,8$	5	$0,4 \cdot 5 = 2,0$	$1,8 + 2 = 3,8$

По критерию Гурвица наиболее выгодной является стратегия

Критерий Лапласа

N=2состояния спроса.

Критерий Севиджа:

Определяется с помощью матрицы рисков:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = 3 \quad \beta_2 = 5$

Соответствующая матрица рисков будет равна

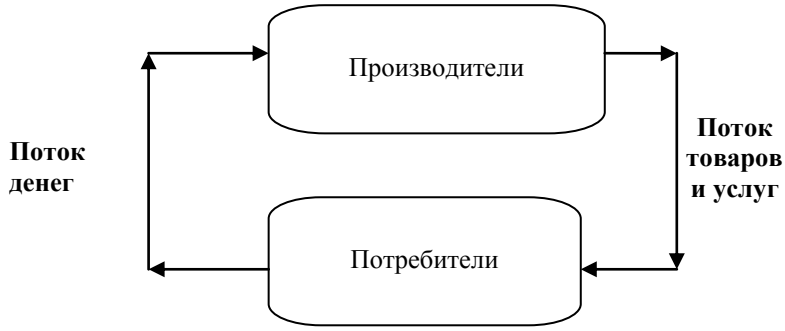
$$R = \begin{pmatrix} \beta_1 - a_{11} & \beta_2 - a_{21} \\ \beta_1 - a_{12} & \beta_2 - a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 5-4 \\ 3-3 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По критерию Байеса:

Матричные модели равновесия между потреблением и доходами

- Матричные модели равновесия между потреблением и доходами отображают соотношения между затратами на производство и его результатами.
- Для решения подобных задач широко используются возможности программного обеспечения компьютеров.
- Макроэкономические модели бывают простые и сложные.

В простой макроэкономической модели используют всего два сектора экономики: производители и потребители.



Товары и услуги измеряются как в физических объемах, так и в текущих рыночных ценах

Все потоки измеряются в денежных единицах

Модель Леонтьева в матричном виде

📖 **X=Ax+У**

X=(x_1; x_2; x_3; ….; x_n)

Y=(y_1; y_2; y_3; ….; y_n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ матрица третьего порядка

📖 Единичная матрица – это такая матрица, у которой все элементы главной диагонали единицы, а все остальные нули.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

📖 **Матрица коэффициентов полных материальных затрат**

$$B_{il} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \dots & b_{3n} \end{pmatrix}$$

📖 **Коэффициенты полных материальных затрат отражают связи между отраслями, учитывают косвенные материальные затраты.**

📖 Матрица коэффициентов полных материальных затрат находится как обратная матрица для матрицы (Е-А)

Применение математического моделирования для решения экономических задач

Эконометрика- наука, изучающая экономические явления с количественной точки зрения.

Эконометрика устанавливает и исследует количественные закономерности в экономике на основе методов теории вероятностей и математической статистики, которые адаптированы к обработке экономических данных.

Сети и графы

Граф- это фигура, состоящая из точек и соединяющих данные точки линий.

Точки называются **вершинами** графа.

Линии, соединяющие точки, называются **ребрами** графа.

Маршрут (путь) – последовательность ребер графа, в которой каждые два ребра имеют общую концевую точку.

В частном случае- это ломаная линия, соединяющая две точки.

Граф называется **связным,** если любые его две вершины связаны между собой каким-либо путем.

Цепь-это маршрут, в котором каждое ребро графа встречается только один раз.

Вершины в цепи могут встречаться несколько раз.

Цикл- это цепь , начальная и конечная вершины которой совпадают.

Четные вершины- это вершины, в которых сходится четное число ребер.

Нечетные вершины- это вершины, в которых сходится нечетное число ребер.

Степень вершины (порядок) –это число ребер, сходящихся в ней.

Эйлеровый граф – это граф, у которого все **вершины четны.**

Эйлеровый цикл- это цикл, в котором **каждое ребро** участвует только **один раз.**

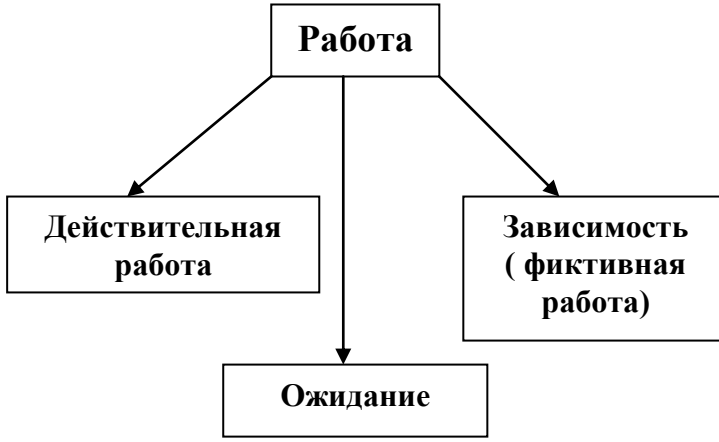
Гамильтонов цикл- это цикл, в котором **каждая вершина** участвует только **один раз.**

Графы применяются для решения многих практических задач.

При решении прикладных задач графы называют сетями, вершины графов называют узлами.

Сетевая модель- план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети.

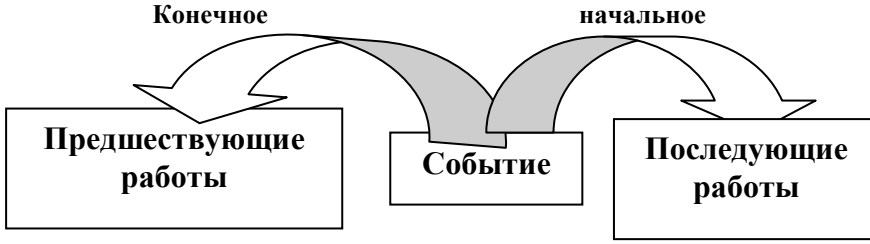
Сетевой график - графическое изображение сетевой модели
Сетевуая модель четко определяет все временные взаимосвязи предстоящих работ.
Главные элементы сетевой модели – **события и работы.**



Событие- это момент завершения какого – либо процесса, отражающий определенный этап выполнения проекта.
Событие может быть:

1. частным результатом отдельной работы
2. суммарным результатом нескольких работ.

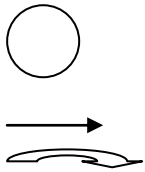
Событие может свершиться только тогда, когда закончатся все работы, ему предшествующие.
Последующие работы могут начаться только тогда, когда **закончатся** все работы, ему **предшествующие.**
Последующие работы могут начаться только тогда, когда событие свершится.



Среди всех событий сетевой модели выделяют исходное и завершающее событие.

Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, представленных в данной модели комплекса работ.
Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.
Сетевые графики называют **графами.**

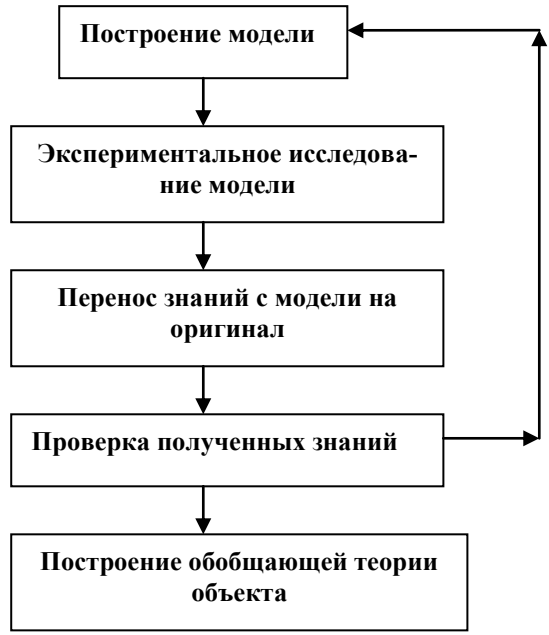
Условные изображения на сетевом графике.



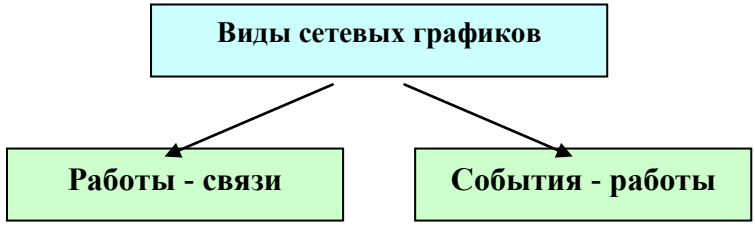
События (круги -вершины графа)

Работы (стрелки – ориентированные дуги)

Этапы решения задачи сетевого планирования



Сеть называется **структурной,** если в ней нет числовых оценок.



Вид сетевого графика	Преимущества	Недостатки
Работы - связи	**Не содержит фиктивных работ Имеет более простую технику построения и перестройки Понятие работа привычно исполнителям**	**Громоздкость построения, сложность сети высока и такая сеть менее эффективна с точки управления комплексом.**
События - работы		

Показатель сложности сети находится как отношение числа работ к числу событий.

Порядок построения сетевых графиков.

Назначение: на начальном этапе планирования**.**

1. Планируемый процесс разбивается на отдельные работы.
2. Составляется перечень работ и событий.
3. Продумываются логические связи между работами и событиями.
4. Определяется последовательность работ.
5. Закрепляются конкретные работы за определенными исполнителями.
6. С помощью исполнителей оценивается длительность каждой работы.
7. Составляется сетевой график.
8. Сетевой график упорядочивается.
9. Рассчитываются параметры событий и работ.

10. Определяется критический путь.
11. Определяются резервы времени.

Правила построения сетевых графиков.

1. В сетевой модели не должно быть тупиковых событий, то есть событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.
2. В сетевом графике не должно быть хвостовых событий, то есть событий, которым не предшествует ни одна работа, за исключением исходного события.
3. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, то есть путей, соединяющих некоторые события с ними самими же.
4. Любые два события связаны непосредственно не более чем одной работой- стрелкой.
5. В сети желательно иметь только одно исходное и только одно завершающее событие.

Если эти правила не все выполняются, то вводим фиктивные события и фиктивные работы.

Упорядочение сетевого графика заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием.

Путь – любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

Полный путь – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец совпадает с завершающим событием сети.

Критическим называется наиболее продолжительный полный путь.

Критическими называются **работы и события,** расположенные на **критическом пути.**

Временные параметры сетевых графиков.

Элемент сети	
Событие	Ранний срок совершения события Поздний срок совершения события Резерв времени события
Работа	Продолжительность работы Ранний срок начала работы

	Ранний срок окончания работы Поздний срок начала работы Поздний срок окончания работы Полный резерв времени работы Частный резерв времени работы первого вида Частный резерв времени работы второго вида Свободный резерв времени Независимый резерв времени
Путь	Продолжительность пути Продолжительность критического пути Резерв времени пути

Задание 3

Задача о длинномерных материалах.

Мы имеем доски длиной 3,4 метра. Нужно из них получить заготовки вида А длиной 1,0 метра и заготовки вида В длиной 1,2 метра. Заготовок вида А требуется не менее 69, вида В не менее 58. Составьте такой план распила досок, чтобы необходимое число заготовок было получено из минимального количества досок.

Решите задачу методом отсечений.

Решение:

Мы переберем все способы раскроя доски на заготовки.

L=3,4 м № способа	L1=1,0	L2=1,2	остатки
1	**3**	0	0,4
2	2	1	0,2
3	1	2	0
4	0	2	1,0

Пусть X1 досок раскроено 1 способом,
X2 досок раскроено вторым способом,
X3 досок раскроено третьим способом,
X4 досок раскроено четвертым способом.
Составим математическую модель задачи.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 \geq 69 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 58 \end{cases}$$

$$F = 1x_1 + 1x_2 \rightarrow \min$$

$$Остатки = 0,4x_1 + 0,2x_2 + 0x_3 + 1,0x_4 \rightarrow \min$$

Продукции вида А выпускает предприятие

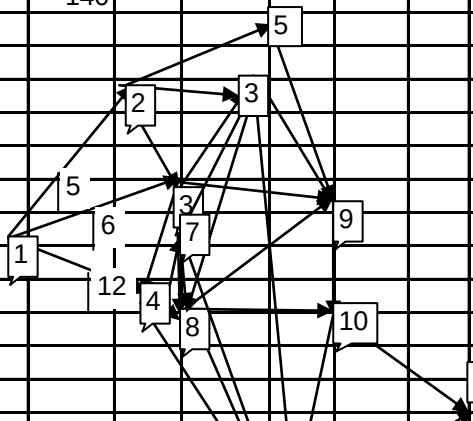
Л=20 м № способа	Пододеяльник 4м	Простынь 2м	Наволочка 1,5м	остатки
Выбираем самое большое количество пододеяльников, которое мы можем произвести				
1	**5**	0	0	0
Затем уменьшаем количество пододеяльников на одну штуку и смотрим , сколько простыней и наволочек мы можем при этом произвести. Просчитываем все варианты производства				
2	4	2	0	0
3	4	1	1	0.5
4	4	0	2	1
5	3	4	0	0
6	3	3	1	0.5
7	3	2	2	1
8	3	1	4	0
9	3	0	5	0.5
10	2	6	0	0
11	1	9	0	0
Мы рассмотрели все способы, при которых количество пододеяльников не равнялось нулю. А теперь мы записываем способы раскроя, при которых постоянно уменьшается количество произведенных простыней соответственно увеличивается количество наволочек.				
12	0	10	0	0
13	0	9	1	0.5

14	0	8	2	1
15	0	7	4	0
16	0	6	5	0.5
17	0	5	6	1
18	0	4	8	0
19	0	3	9	0.5
20	0	2	10	1
21	0	1	12	0
22	0	0	13	0.5

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

Продолжительность работ				Резерв					
				Полный		Свободный		независимый	
начало	конец	продолж.							
1	2	5	140	0					
1	3	6	135	5					
1	4	12	129	11					
2	3	3	117	23					
2	5	2	114	26					
2	6	2	112	28					
3	4	3	110	30					
3	6	9	107	33					
3	8	5	98	42					
3	9	11	93	47					
4	7	4	82	58					
4	8	6	78	62					
4	11	1	72	68					
5	9	4	71	69					
6	7	3	67	73					
6	8	20	64	76					
6	9	3	44	96					
7	8	2	41	99					
7	11	3	39	101					
8	9	2	36	104					
8	10	4	34	106					
8	11	4	30	110					
9	10	5	26	114					
10	11	9	21	119					
10	12	5	12	128					
11	12	7	7	133					
	140								



Задания для самостоятельного решения

Задание 1.

Найдите оптимальное решение по критерию Вальда, Севиджа и Гурвица

Вариант 1

	B1	B2
A1	1	4
A2	3	5

P1=0.8, P2=0.2 , Л=0.8

Вариант 2

	B1	B2
A1	2	1
A2	6	7

P1=0.3, P2=0.7 , Л=0.9

Вариант 3

	B1	B2
A1	8	1
A2	2	3

P1=0.4, P2=0.6 , Л=0.7

Вариант 4

	B1	B2
A1	4	5
A2	3	9

P1=0.2, P2=0.8 , Л=0.8

Вариант 5

	B1	B2
A1	4	1
A2	5	2

P1=0.7, P2=0.3, Л=0.8

Вариант 6

	B1	B2
A1	8	1
A2	4	2

P1=0.4, P2=0.6 , Л=0.7

Вариант 7

	B1	B2
A1	2	1
A2	6	7

P1=0.8, P2=0.1 , Л=0.9

Вариант 8

	B1	B2
A1	2	8
A2	3	1

P1=0.2, P2=0.5 , Л=0.5

Вариант 9

	B1	B2
A1	1	4
A2	3	5

P1=0.8, P2=0.2 , Л=0.8

Вариант 10

	B1	B2
A1	4	1
A2	5	2

P1=0.8, P2=0.2 , Л=0.8

Задание 2

Найдите оптимальное решение задачи 1 по критерию минимакса, в смешанных стратегиях, графически.

Задание 3МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Предприятие выпускает два вида продукции : столы и стулья
На изготовление изделий расходуются три вида материалов: древесина, клей и болты.
На каждый стол расходуется A1 дм2 древесины,
B1 мл клея
C1 болтов
На каждый стул расходуется A2 дм2 древесины,
B2 мл клея
C2 болтов
Запасы материалов на складе составляют P1 древесины
P2 клея
P3 болтов
Прибыль от продажи одного стола составляет M1 рублей
Прибыль от продажи одного стула составляет M2 рублей
Предприятие должно получить максимальную прибыль
Решить задачу графически и симплекс-методом

	Столы	Стулья	Запасы
Древесина	A1	A2	P1
Клей	B1	B2	P2
Болты	C1	C2	P3
Прибыль	M1	M2	

Вариант1 A1=3 A2=4 P1=12 B1=5 B2=3 P2=15 C1=3 C2=6 P3=12 M1=4 M2=1	Вариант6 A1=2 A2=4 P1=16 B1=3 B2=3 P2=9 C1=8 C2=2 P3=24 M1=3 M2=4
Вариант2 A1=6 A2=2 P1=12 B1=1 B2=4 P2=8 C1=7 C2=2 P3=14 M1=1 M2=7	Вариант7 A1=9 A2=1 P1=18 B1=3 B2=3 P2=9 C1=7 C2=1 P3=14 M1=2 M2=7

Вариант3 A1=4 A2=4 P1=8 B1=6 B2=3 P2=24 C1=3 C2=6 P3=12 M1=7 M2=6	Вариант 8 A1=6 A2=6 P1=12 B1=3 B2=5 P2=30 C1=7 C2=2 P3=28 M1=9 M2=5
Вариант4 A1=5 A2=7 P1=35 B1=5 B2=10 P2=20 C1=3 C2=3 P3=6 M1=2 M2=5	Вариант 9 A1=3 A2=7 P1=42 B1=7 B2=6 P2=42 C1=5 C2=4 P3=20 M1=11 M2=9
Вариант5 A1=6 A2=4 P1=12 B1=7 B2=3 P2=21 C1=9 C2=2 P3=12 M1=5 M2=5	Вариант10 A1=6 A2=5 P1=30 B1=3 B2=1 P2=12 C1=4 C2=6 P3=24 M1=6 M2=7

Задание 4

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Имеем три продовольственных базы a1,a2,a3 ,на складах которых находятся мешки с сахаром , которые нужно перевести в пять магазинов в1, в2, в3, в4, в5 для реализации . Объем продукции на складе и объем потребностей магазинов указаны в таблице перевозок в правом крайнем столбце и нижней строке .

Тарифы на перевозку указаны в левых верхних углах клеток таблицы. Проверить сбалансированность данных задачи

Заполнить таблицу методом северо-западного угла и минимального элемента.

Вариант1	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	3	9	18	19	5	120
A2	1	2	7	15	16	200
A3	4	6	12	6	16	180

Потребности	80	140	90	100	90	

Вариант2	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	3	15	4	17	3	150
A2	14	2	18	5	13	230
A3	11	9	11	15	4	120
Потребности	110	130	180	80	100	

Вариант 3	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	1	2	5	12	19	260
A2	20	16	9	8	13	100
A3	11	18	8	15	2	140
Потребности	130	120	150	60	140	

Вариант 4	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	7	14	20	8	5	170
A2	12	19	2	7	9	230
A3	16	19	14	12	7	100
Потребности	150	130	170	70	80	

Вариант 5	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	11	18	5	1	8	110

A2	15	20	9	17	14	150
A3	13	2	11	18	3	240

Потребности	130	70	80	120	100	
Вариант 6	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	8	16	10	17	12	160
A2	18	6	20	7	15	140
A3	9	3	15	4	11	200
Потребности	100	110	60	130	100	

Вариант 7	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	2	11	5	14	16	150
A2	8	2	18	6	3	250
A3	14	7	15	9	13	100
Потребности	130	70	150	80	70	

Вариант 8	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	12	16	7	11	17	140
A2	4	16	15	9	12	200
A3	13	15	9	8	10	160
Потребности	130	100	80	90	100	

Вариант 9	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	12	1	16	8	9	130
A2	2	11	3	7	6	150
A3	6	12	8	9	11	120
Потребности	80	120	130	100	70	

Вариант 10	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы на складе
A1	6	11	13	9	8	190
A2	5	13	7	12	9	110
A3	8	11	4	16	7	200
Потребности	150	50	120	80	100	

При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	Корм 1	Корм 2
Белки	3	1
Углеводы	1	2
протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида – 4 д.е., второго – 6 д.е. Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа – 3т., проволоки – 18т. На один трансформатор первого вида расходуются 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида – 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 д.е., второго – 4 д.е.
Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Заводы № 1, 2, 3 производят однородную продукцию в количестве соответственно 500, 400 и 500 единиц. Продукция отправляется в пункты A, B, C, потребности которых равны 350, 450 и 600 единицам. Стоимости перевозок 1 ед. продукции заданы матрицей

$$C = \begin{matrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{matrix}$$

Составьте оптимальный план перевозок.

Найти оптимальное распределение трех видов механизмов, имеющихся в количестве 45, 20 и 35, между четырьмя участками работ, потребности которых соответственно равны 10, 20, 30 и 40 при следующей матрице производительности:

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Построить двойственную задачу линейного программирования к данной.

$3x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_5 \text{ ---min}$

$x_1 - 2x_2 - 10x_4 + 3x_5 = 12;$
$2x_1 - 3x_2 - 15x_3 - 10x_4 + 6x_5 = 28;$

2x1 – x2 + 8x3 – 6x4 + 10x5 >= 40;
x1, x4>=0.

Построить чертеж сетевого графика и рассчитать сеть.

(1,2) – 8	(3,4) – 14	(4,11) – 3	(7,11) – 12	(10,12) –9
(1,3) – 7	(3,6) – 7	(5,9) – 5	(8,9) – 8	(11,12) –2
(1,4) – 3	(3,8) – 10	(6,7) – 7	(8,10) – 10	
(2,3) – 15	(3,9) – 8	(6,8) – 2	(8,11) – 7	
(2,5) – 6	(4,7) – 8	(6,9) – 11	(9,10) - 4	
(2,6) – 2	(4,8) – 6	(7,8) – 15	(10,11) - 3	

Построить чертеж сетевого графика и рассчитать сеть.

(1,2) – 8	(3,4) – 14	(4,11) – 3	(7,11) – 8	(10,12) –8
(1,3) – 7	(3,6) – 10	(5,9) – 21	(8,9) – 3	(11,12) –7
(1,4) – 12	(3,8) – 5	(6,7) – 5	(8,10) – 6	
(2,3) – 3	(3,9) – 1	(6,8) – 18	(8,11) – 3	
(2,5) – 7	(4,7) – 5	(6,9) – 5	(9,10) – 8	
(2,6) – 14	(4,8) – 3	(7,8) – 5	(10,11) – 2	

Предприятие выпускает два вида скоропортящихся продуктов А и В. Себестоимость единицы А составляет 8 руб., а отпускная цена – 12 руб. Себестоимость единицы В равна 5 руб., отпускная цена – 8 руб. Если продукция не реализуется в день выпуска, то ее качество резко снижается и она продается на следующий день по цене в четыре раза ниже отпускной. Реализация продукции зависит от погоды: в хорошую погоду реализуется 2500 ед. продукции А и 15000 ед. продукции В, а в плохую – 10000 ед. продукции А и 3000 ед. продукции В. На реализацию всей продукции в день расходуется 5000 руб. Определить ежедневное производство продукции каждого вида с целью получения наибольшей прибыли.

Имеется три пункта отправления груза (А1, А2, А3) и пять пунктов назначения (В1, В2, В3, В4, В5). Найти решение транспортной задачи.

	B1	B2	B3	B4	B5	Наличие

A1	2	4	5	7	9	300
A2	1	1	3	5	4	400
A3	6	3	2	1	10	900
Потреб-ность	250	300	350	500	200	1600

Имеется три пункта отправления груза (A1, A2, A3) и пять пунктов назначения (B1, B2, B3, B4, B5). Найти решение транспортной задачи.

	B1	B2	B3	B4	B5	Наличие
A1	7	4	15	9	14	120
A2	11	2	7	3	9	150
A3	4	5	12	8	17	100
Потреб-ность	65	90	60	70	85	370

Вопросы для контроля знаний.

основные принципы математического
моделирования экономических систем.
дать понятие модели.
привести принципы построения экономико-математической модели. основные задачи линейного программирования.
дать определение и разъяснить экономический смысл целевой функции,
системы ограничений и решений в линейной модели производства.

описать экономическую ситуацию, приводящую к транспортной задаче.

перечислить трудности, возникающие при построении экономико-математических моделей двойственность в линейном программировании.

дать определение и разъяснить экономический смысл целевой функции, системы ограничений и решений двойственной

задачи линейного программирования.. основные элементы межотраслевых таблиц

и ежотраслевого анализа. обобщенная модель леонтьева.

1. Дайте определение следующим понятиям: игра, конфликт, игроки, стратеги.
2. Классифицируйте игры по числу стратегий. Дайте определение игр в чистых и смешанных стратегиях.
3. Классифицируйте игры по числу игроков. Дайте определение платежа, платежных функций, приведите пример.
4. Дайте определение игр с нулевой суммой, приведите пример.
5. Приведите пример упрощения платежной матрицы с помощью вычеркивания строк или столбцов.
6. Дайте определение игр с не нулевой суммой, приведите пример.
7. Принцип минимакса, приведите пример.
8. Геометрический метод. Пример.
9. Метод линейного программирования.
10. Игровые модели в условиях коммерческого риска.
11. Дайте определение игровые задачи, приведите пример.
12. Найдите оптимальное решение геометрически.
13. Игровые модели в условиях полной коммерческой неопределенности.
14. Игровые модели конфликтов.
15. Деловые игры.
16. Найдите оптимальное решение по критерию Гурвица.
17. Деловые игры. Постановка деловой игры. Деловая игра «Коммерсант»

18. Оценка согласованности мнений игроков в деловой игре.
19. Решение игр в смешанных стратегиях.

Литература

1. Акулич И.Л. « Математическое программирование в примерах и задачах»: Учебное пособие для студентов экономических специальностей ВУЗов.- М.: Высшая школа , 1993 336 с.
2. Ашманов С.А. Линейное программирование. М., 1981.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. «Высшая математика в упражнениях и задачах».-М: Высшая школа,1999.-ч.1и 2.
4. Данциг Дж. Линейное программирование. М.: Прогресс, 1966.
5. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для ВУЗов / под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Банки и биржи ЮНИТИ 1997. -407 с.
6. Карасев А.И.,Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. «Математические методы и модели в планировании: учебное пособие для экономических вузов». М.: Экономика 1987. 240 с.
7. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. «Математическое программирование»М. 1980.- 300 с.
8. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1980;
9. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М., 1973.
10. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1979.

Содержание

1. **Правила выполнения контрольных работ.**
2. **Программа курса.**

3. **Методические указания к решению задач**
4. **Задачи линейного программирования**

5. **Задача об использовании сырья для изготовления продукции нескольких видов с целью получения наибольшей прибыли**
6. **Задача о выборе оптимальных технологий работы предприятия**
7. **Задача о раскрое длинномерных материалов.**
8. **Транспортная задача**
9. **Задачи целочисленного программирования**

10. **Теория игр**
11. **Сети и графы**
12. **Контрольные задания.**
13. **Вопросы для контроля знаний.**
14. **Словарь терминов**
15. **Рекомендуемая литература.**