**Тема Системы массового обслуживания**

Системы, предназначенные для многоразового решения однотипных задач, называются системами массового обслуживания(СМО).

Системы определяются количеством каналов и потоком заявок.

Количество каналов-это число обслуживающих единиц в системе.

Поток заявок- это число клиентов, которые обращаются к системе с целью возможности обслуживаться.

СМО делятся на СМО с отказами, СМО с ограниченной очередью и СМО с неограниченной очередью.

СМО с отказами одноканальная

Если канал обслуживания занят- то заявка покидает систему (отказано в обслуживании)

t -среднее время обслуживания одного клиента

$\mu = \frac{1}{t}$ интенсивность потока обслуживания

$\lambda$ -интенсивность потока заявок

$$p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$A = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}$ абсолютная пропускная способность системы

$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ относительная пропускная способность системы

$P_{отказа} = 1 - p_0$

Одноканальные СМО с очередью

$p = \frac{\lambda}{\mu}$ вероятность существования очереди

Если p>1, то очередь растет до бесконечности

Если 0<p<1, то существует вероятность, что вас обслужат.

$$p_0 = \left(1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + ... + p^n\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-p}\right)^{-1} = \left(\frac{1-p}{1}\right)^{+1} = 1 - p$$

$p_0 = 1 - p$ предельная вероятность одноканальной системы с неограниченной очередью

Пропускная способность системы определяется математическим ожиданием, то есть средним числом заявок в системе.

$$M(x) = L_{системы} = (1-p)\cdot p$$

Если p=3, k=1

$$L_{системы} = \frac{3}{1-3} = -1{,}5 < 0$$ Очередь неограниченна

Многоканальные СМО с очередью

$$p_0 = \left(1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \frac{p^4}{4!} + ... + \frac{p^n}{n!} + \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)}\right)^{-1}$$ предельная вероятность многоканальной системы с неограниченной очередью

Пропускная способность системы определяется математическим ожиданием, то есть средним числом заявок в системе.

$$M(x) = (1-p)\cdot \sum_{к=1}^{\infty} к \cdot p^{к}$$

К- общее число каналов

$\bar{к}$ - среднее число занятых каналов

$$L_{системы} = \frac{p}{1-p} \qquad p_{очереди} = \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)}\cdot p_0$$

$$L_{очереди} = \frac{p^{n+1}\cdot p_0}{n\cdot n!\cdot\left(1-\frac{p}{n}\right)^2}$$

Задание СМО с отказами одноканальная

$\lambda = 90 чел/час$

Т=2 мин/чел.

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1час}{2\frac{мин}{чел}} = \frac{60мин}{2\frac{мин}{чел}} = 30 чел/час$$ интенсивность потока обслуживания

$$A = \frac{\lambda\cdot\mu}{\lambda+\mu} = \frac{90\cdot 30}{90+30} = 22.5 \approx 23 чел/час$$ абсолютная пропускная способность системы

$$Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{30}{90+30} = 0.25$$ относительная пропускная способность системы

0.25*100%=25%Количество обслуженных клиентов

Вывод: Система работает неэффективно при одном канале

Задание СМО с отказами одноканальная

Дано: $\lambda = 0{,}95 \;\; \bar{t} = 1$

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}95}{0{,}95 + 1} \cdot 2{,}72^{-(0{,}95+1)1} + \frac{1}{0{,}95 + 1} = 0{,}577$$

$A = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}95 \cdot 1}{0{,}95 + 1} = 0{,}49$ абсолютная пропускная способность системы

$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1}{0{,}95 + 1} = 0{,}51$ относительная пропускная способность системы

$P_{отказа} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}577 = 0{,}423$

Задание СМО с отказами многоканальная

$\lambda = 90 чел / час$

T=2 мин/чел.

N=5 каналов обслуживания

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}}$$

$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1 час}{2 \frac{мин}{чел}} = \frac{60 мин}{2 \frac{мин}{чел}} = 30 чел / час$ интенсивность потока обслуживания для одного канала

Q=1-p=1-0,093=0,907относительная пропускная способность системы

0,907*100%=90,7% Количество обслуженных клиентов

$A = \lambda \cdot Q = 90 \cdot 0.903 = 81.62 \approx 82 чел / час$ абсолютная пропускная способность системы

Вывод: Система работает удовлетворительно при пяти каналах

## Системы массового обслуживания с ожиданием

В качестве показателей эффективности СМО с ожиданием, кроме показателей абсолютной A и относительной Q пропускной способности, вероятности отказа $P_{отк}$, среднего числа занятых каналов $\vec{k}$ (для многоканальной системы) будем рассматривать также следующие: $L_{сист}$ – среднее число заявок в системе; $T_{сист}$ – среднее время пребывания заявки в системе; $L_{оч}$ – среднее число заявок в очереди (длина очереди); $T_{оч}$

– среднее время пребывания заявки в очереди; $P_{зан}$ – вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

Многоканальные СМО с неограниченной очередью

Предельные вероятности

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0, \ldots, p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0$$

Для n-канальной СМО с неограниченной очередью можно найти:

вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-\rho) \cdot n!} \cdot p_0;$$

среднее число занятых каналов:

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho;$$

среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n! \cdot (1 - \frac{\rho}{n})^2};$$

среднее число заявок в системе:

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho;$$

относительная величина затрат, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди заявок может быть задана например следующим образом:

$$C_{отн} = \frac{1}{\lambda} \cdot n + 3T_{оч}$$

среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе вычисляются также по формулам Литтла.

Для систем с неограниченной очередью при $\rho<1$ любая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, т.е. вероятность отказа $P_{отк}=0$, относительная пропускная способность Q=1, а абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок, те. $A=\lambda$.

Задание Многоканальные СМО с очередью

Если p=0.8 k=3

$$p_0 = \left(1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \frac{p^4}{4!} + \ldots + \frac{p^n}{n!} + \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)}\right)^{-1}$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{0{,}8}{1!} + \frac{0{,}8^2}{2!} + \frac{0{,}8^3}{3!} + \frac{0{,}8^{3+1}}{3!(3-0{,}8)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{0{,}8}{1} + \frac{0{,}8^2}{1\cdot 2} + \frac{0{,}8^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{0{,}8^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2{,}2}\right)^{-1} =$$

$$= (1 + 0{,}8 + 0{,}32 + 0{,}085333 + 0{,}0310303)^{-1} = (2{,}23636)^{-1} = 0{,}44716$$

$$M(x) = (1-0{,}8)\cdot\sum_{\kappa=1}^{3}\kappa\cdot 0{,}8^{\kappa} = (1-0{,}8)\cdot(1\cdot 0{,}8^1 + 2\cdot 0{,}8^2 + 3\cdot 0{,}8^3) = 0{,}7232$$

$$L_{сист} = \frac{p}{1-p} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4$$

$$p_{очереди} = \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)}\cdot p_0 = \frac{0{,}8^{3+1}}{3!(3-0{,}8)}\cdot 0{,}44716 =$$

$$= 0{,}0310303\cdot 0{,}44717 = 0{,}0187536$$

Задание Многоканальные СМО с очередью

Если p=0.8 k=3

$$p_0 = \left(1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \frac{p^4}{4!} + \ldots + \frac{p^n}{n!} + \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)}\right)^{-1}$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{0{,}8}{1!} + \frac{0{,}8^2}{2!} + \frac{0{,}8^3}{3!} + \frac{0{,}8^{3+1}}{3!(3-0{,}8)}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{0{,}8}{1} + \frac{0{,}8^2}{1\cdot 2} + \frac{0{,}8^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{0{,}8^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2{,}2}\right)^{-1} =$$

$$= (1 + 0{,}8 + 0{,}32 + 0{,}085333 + 0{,}0310303)^{-1} = (2{,}23636)^{-1} = 0{,}44716$$

$$M(x) = (1-0{,}8)\cdot\sum_{\kappa=1}^{3}\kappa\cdot 0{,}8^{\kappa} = (1-0{,}8)\cdot(1\cdot 0{,}8^1 + 2\cdot 0{,}8^2 + 3\cdot 0{,}8^3) = 0{,}7232$$

$$L_{сист} = \frac{p}{1-p} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4$$

$$p_{очереди} = \frac{p^{n+1}}{n!(n-p)}\cdot p_0 = \frac{0{,}8^{3+1}}{3!(3-0{,}8)}\cdot 0{,}44716 =$$

$$= 0{,}0310303\cdot 0{,}44717 = 0{,}0187536$$

Задание

1. Решить задачу для СМО с отказами:

В вычислительный центр с m ЭВМ поступают заказы на вычислительные работы. Если работают все m ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается. Пусть среднее время работы с одним заказом составляет $T_{обс}^{ср}$ часов. Интенсивность потока заявок равна  (1/ч). Найти вероятность отказа Ротк  и $m_з$ - среднее число занятых ЭВМ.

Решение

n=4- Общее число каналов обслуживания

$\lambda = 96 чел/час$ Интенсивность потока  заявок

$\bar{t}$=2 мин/чел. Среднее время обслуживания одного клиента

$\mu = \frac{1}{\bar{t}}$ интенсивность потока обслуживания для одного канала

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1час}{2\frac{мин}{чел}} = \frac{60мин}{2\frac{мин}{чел}} = 30чел/час$$

$\rho = \lambda \cdot t = 0.2 * 3 = 0.6$ коэффициент загрузки системы или среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования.

$p_0 = \left(1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!}\right)^{-1}$ предельная вероятность того, что все обслуживающие каналы будут свободны.

$$p_0 = \left(1 + \frac{0.6}{1!} + \frac{0.6^2}{2!} + \frac{0.6^3}{3!}\right)^{-1} = 0.561$$

$p_1 = p * p_0 = 0.336$

$p_2 = \frac{p^2}{2!} * p_0 = 0.18 * 0.6 = 0.108$

$P_{отказа} = p_2 = 0.108$ Вероятность отказа системы в обслуживании, все ЭВМ заняты

$m_3 = p * (1 - p_{отказа}) = 0,6 * (1 - 0,108) = 0,535$ Среднее число занятых ЭВМ

$P_{отказа} = p_2 = 0.108$

Вывод: 10,8% заказов не будут приняты

Задание

1. Решить задачу для СМО с ограниченной длиной очереди:

На автозаправочной станции установлены m=2 колонок для выдачи бензина. Около станции находится площадка намашин для их ожидания в очереди. На станцию прибывает в среднем 4 машин в минуту. $\lambda = 3$Среднее время заправки одной машины $T_{обс}^{ср} = 0{,}6$мин. Требуется определить вероятность отказа Ротк и среднюю длину очереди *М*ож.

Решение

m =2 колонок всего Общее число каналов обслуживания

L= 4 машины в очереди

$\lambda = 3 машины / мин$ Интенсивность потока заявок

$\bar{t}$=0,6 мин/машину. Среднее время обслуживания одного клиента

$\mu = \frac{1}{\bar{t}}$ интенсивность потока обслуживания для одного канала

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1час}{0{,}6\frac{мин}{машину}} = 1{,}67 машин / минуту$$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{1{,}67} = 1{,}8$ коэффициент загрузки системы или среднее число каналов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени все поступающие требования.

$P_{отказа} = p_{m+l} = \frac{p^{m+l}}{m^l m!} \cdot p_0$ Вероятность отказа системы в обслуживании

$$p_0 = \left( 1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3\left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}{2 \cdot 2!\left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)\right)} \right)^{-1}$$ предельная вероятность того, что все обслуживающие каналы будут свободны.

$$p_0 = \left( 1 + \frac{1{,}8}{1!} + \frac{1{,}8^2}{2!} + \frac{1{,}8^4\left(1 - \left(\frac{1{,}8}{3}\right)^3\right)}{2 \cdot 2!\left(1 - \left(\frac{1{,}8}{3}\right)\right)} \right)^{-1} = 0.1905$$

$P_{отказа} = p_{m+l} = p_{3+3} = \frac{1{,}8^6}{2^4 2!} \cdot 0.1905 = 0.2024$ Вероятность отказа системы в обслуживании

$Q = 1 - P_{отк}$ Относительная пропускная способность системы

$Q = 1 - 0.2024 = 0.7976$

$M_{ож} = \frac{p_0 p^m}{m!} \sum n \left( \frac{p}{m} \right)^n = \frac{0.106 * 1.8^2}{2!} * (1 * 0.9 + 2 * 0.9^2 + 3 * 0.9^3 + 4 * 0.9^4) = 1.2589$

$m_3 = 0 * p0 + 1 * p1 + 2 * p2 = 0 + 1.8 * 0.106 + 2 * 1.8 * 0.106^2 = 0.2312$

Средняя длина очереди

$M = m_3 + M_{ож} = 0.2312 + 1.2589 = 1.4901$

Марковские процессы

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс. Случайным (вероятностным, стохастическим) процессом понимается процесс изменения закономерностями.

Процесс называется процессом дискретными состояниями, если его возможные состояния $S_1$, $S_2$, $S_3$,…можно заранее перечислить, а переход из одного состояния в другое переходит мгновенно (скачками).

Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты перехода из одного состояния в другой не фиксированы заранее, а являются случайными.

Случайный процесс называется марковским, если для любого момента времени, его характеристики в будущем зависят только от его состояния на данный момент и не зависят от того, как и когда системы пришла в данное состояние.

При анализе случайных состояний с дискретными характеристиками обычно пользуются геометрической схемой, так называемым графом состояний. На этой схеме состояние системы обозначают кружочками или прямоугольниками.

Вероятности перехода из одного состояния в другое указывают направленными отрезками или дугами.

Вероятность состояния перехода можно записать в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

Правило записи матрица: сумма всех чисел каждой строчки = 1.

Задание

Пусть дана матрица перехода системы в новые состояния за один шаг.

$\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ Найти матрицу перехода в новое состояние за 2 шага.

Решение

$$p^2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.77 \\ 0.22 & 0.78 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}09 + 0{,}14 = 0{,}23$

$a_{12} = 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}21 + 0{,}56 = 0{,}77$

$a_{21} = 0{,}2*0{,}3+0{,}8*0{,}2=0{,}22$

$a_{22} = 0{,}2*0{,}7+0{,}8*0{,}8=0{,}78$

Найти матрицу перехода в новое состояние за 3 шага.

$$p^3 = p \cdot p \cdot p = p^2 \cdot p = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}77 \\ 0{,}22 & 0{,}78 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.223 & 0.777 \\ 0.222 & 0.778 \end{pmatrix}$$

$b_{11} = 0{,}23 \cdot 0{,}3 + 0{,}77 \cdot 0{,}2 = 0{,}069 + 0{,}154 = 0{,}223$

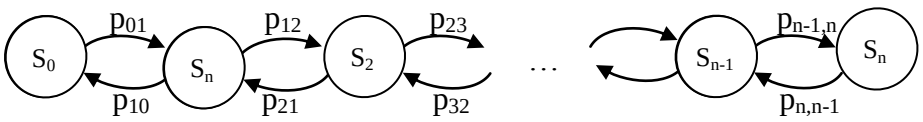
$b_{12} = 0{,}23 \cdot 0{,}7 + 0{,}77 \cdot 0{,}8 = 0{,}161 + 0{,}616 = 0{,}777$

$b_{21} = 0{,}22 \cdot 0{,}7 + 0{,}78 \cdot 0{,}2 = 0{,}066 + 0{,}156 = 0{,}222$

$b_{22} = 0{,}22 \cdot 0{,}7 + 0{,}78 \cdot 0{,}8 = 0{,}154 + 0{,}624 = 0{,}778$

Процесс гибели и размножения

Граф состояния процесса гибели и размножения имеет вид:



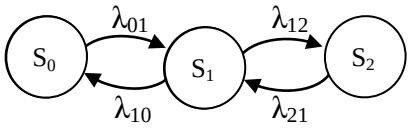

Особенности процесса гибели и размножения:

процесс гибели и размножения предполагает переход из одного состояния только с соседнее состояние, предыдущее и последовательное.

процесс гибели и размножения может описываться не только вероятностями перехода из одного состояния в другое, но и интенсивностью потоков событий (заявок).

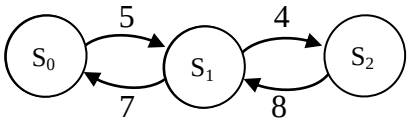
Предельные вероятности перехода из одного состояния в другое

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\cdot\lambda_{01}}{\lambda_{21}\cdot\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{23}\cdot\lambda_{12}\cdot\lambda_{01}}{\lambda_{32}\cdot\lambda_{21}\cdot\lambda_{10}}\right)^{-1}$$




$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}\cdot p_0 \qquad p_2 = \frac{\lambda_{12}\cdot\lambda_{01}}{\lambda_{21}\cdot\lambda_{10}}\cdot p_0 \qquad p_3 = \frac{\lambda_{23}\cdot\lambda_{12}\cdot\lambda_{01}}{\lambda_{32}\cdot\lambda_{21}\cdot\lambda_{10}}\cdot p_0$$

Задание




$\lambda_{01} = 5$; $\lambda_{12} = 4$; $\lambda_{21} = 8$; $\lambda_{10} = 7$.

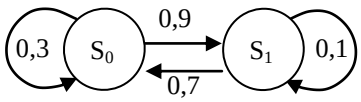
$$p_0 = \left(1 + \frac{5}{7} + \frac{4\cdot5}{8\cdot7}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{14}\right)^{-1} = \left(\frac{14+10+5}{14}\right)^{-1} = \left(\frac{29}{14}\right)^{-1} = \frac{14}{29} \approx 0{,}48$$

$$p_1 = \frac{5}{7}\cdot\frac{14}{29} = \frac{10}{29} \approx 0{,}34 \qquad p_2 = \frac{4\cdot5}{8\cdot7}\cdot\frac{14}{29} = \frac{5}{29} \approx 0{,}17$$

1) $$p_0 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot5}{3\cdot2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right)^{-1} = \frac{18+6+15}{18} = \frac{39}{18} = \frac{18}{39}\cdot\frac{6}{13} = 0{,}46$$

$$p_1 = \frac{1\cdot6}{3\cdot13} = \frac{2}{13} = 0{,}15 \qquad p_2 = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{13} = \frac{5}{13} = 0{,}38$$

Задание




Если система остается в том же самом состоянии, то переход осуществляется сам в себя и изображается в виде петли.

Сумма входящих значений = 1.

$p_{00} = 0{,}3$ $p_{01} = 0{,}9$ $p_{11} = 0{,}1$ $p_{10} = 0{,}7$

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$