Самостоятельная работа Тема Системы массового обслуживания

1.Решить задачу для СМО с отказами:

В вычислительный центр с m ЭВМ поступают заказы на вычислительные работы. Если работают все m ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается. Пусть среднее время работы с одним заказом составляет $T_{обс}^{ср}$ =3часов. Интенсивность потока заявок равна 0,25 (1/ч). Найти вероятность отказа Ротк и $m_з$ =3- среднее число занятых ЭВМ.

2.Решить задачу для СМО с ограниченной длиной очереди

На автозаправочной станции установлены m=3 колонок для выдачи бензина. Около станции находится площадка на *L=3* машин для их ожидания в очереди. На станцию прибывает в среднем 2 машин в минуту. Среднее время заправки одной машины $T_{обс}^{ср}$ =1мин. Требуется определить вероятность отказа Ротк и среднюю длину очереди *М*ож.

ФОРМУЛЫ Системы массового обслуживания

λ – входной поток. Будем брать Пуассоновский.
Время непрерывное, состояния дискретные.
Построение модели с целью повышения эффективности системы.
Связь с внешним миром осуществляется через поток заявок.
Входные характеристики системы: какова очередь, сколько времени ждет заявка, сколько она обслуживается.

1. Системы с отказами (может переработать ограниченное число заявок)
2. С очередями и без очередей
3. Очереди ограниченные и неограниченные
4. Однофазные и многофазные состояния
5. Открытые системы (поток извне) и закрытые (поток связан с самой системой)

Число каналов. Канал может обслуживать только 1 заявку.
μ – производительность канала (номинальная). Например, штук в час.
$1/\mu$ – среднее время обслуживания одной заявки. Например, средняя продолжительность разговора – 2 минуты. $1/\mu = 2$ минуты.
Производительность канала – 0.5 разговоров в минуту.
$\lambda = 1/\text{время}$
λ – на всю систему (реальное значение). Например, поток заявок 90 штук в час.

μ – на один канал (способность, номинальное значение).

(1) 1-канальная СМО без очереди (с отказами)

$n=1, \quad m=0, \quad \rho=\kappa=\lambda/\mu$

$$p_0=\frac{1}{1+\rho}, \quad p_1=\frac{\rho}{1+\rho}, \quad \mathrm{P_{ОТК}}=p_1, \quad q=p_0, \quad A=\lambda q=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \; r=A/\mu=\frac{\rho}{1+\rho}$$

$$L_q=0, \quad L=\frac{\rho}{1+\rho}, \quad W_q=q/\mu=\frac{1}{\lambda+\mu}$$

(2) 1-канальная СМО с ограниченной очередью

$n=1, \quad \rho=\lambda/\mu, \quad \kappa=\rho/n=\rho$

$$p_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \quad p_k=\rho^k p_0, \quad \mathrm{P_{ОТК}}=p_{m+1}=\rho^{m+1}p_0, \quad q=1-\rho^{m+1}p_0, \quad A=\lambda q$$

$$r=\rho q, \quad L_q=\rho^2 p_0\frac{1-(m+1)\rho^m+m\rho^{m+1}}{(1-\rho)^2}, \quad L=r+L_q, \quad W_q=L_q/\lambda, \quad W=L/\lambda$$

(3) 1-канальная СМО с неограниченной очередью

$n=1, \; m\to\infty, \; \rho=\kappa=\lambda/\mu$

$$p_0=1-\rho, \; p_k=\rho^k p_0 \; (k>0), \; \mathrm{P_{ОТК}}=0, \; q=1, \quad A=\lambda, \; L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}, \; r=\rho, \; L=\frac{\rho}{1-\rho},$$

$$W_q=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}, \; W=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

(4) Многоканальная СМО без очереди

$m=0, \; \rho=\lambda/\mu, \; \kappa=\rho/n$

$$p_0=\left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1}, \; p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0 \; (k=\overline{1,n}), \; \mathrm{P_{ОТК}}=p_n=p_0\frac{\rho^n}{n!}$$

$$q=1-\mathrm{P_{ОТК}}, \quad A=\lambda q, \quad L_q=0, \quad r=L=A/\mu, \quad W_q=0, \; W=L/\lambda=q/\mu,$$

$$V=\frac{r}{n}=q\kappa$$

(5) Многоканальная СМО с неограниченной очередью

$m\to\infty, \; \rho=\lambda/\mu, \; k=\rho/n<1$

$$p_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n\kappa}{n!(1-\kappa)}\right)^{-1}, \quad p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0 \; (k=\overline{1,n}), \quad p_{n+k}=\frac{\rho^{n+k}}{n^k n!}p_0 \; (k>0),$$

$$\mathrm{P_{ОТК}}=0, \quad q=1, \; A=\lambda, \quad r=\rho, \quad L_q=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!(1-\kappa)^2}, \quad L=r+L_q,$$

$$W_q=L_q/\lambda, \quad W=L/\lambda$$

Сводка формул для многоканальной СМО с очередью

$\rho = \lambda / \mu$, $\kappa = \rho / n$, n – число каналов, m – размер очереди

1) Вероятности состояний системы. p_k – вероятность того, что в системе ровно k заявок.

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \kappa \frac{1-\kappa^m}{1-\kappa} \right)^{-1}$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \ (k = \overline{0,n})$$

$$p_{n+k} = \frac{\rho^{n+k}}{n^k n!} p_0 \ (k = \overline{1,m})$$

2) Вероятность отказа (например, система в состоянии S_{n+m} – все места заняты):

$$\mathrm{P_{ОТК}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$$

3) Относительная пропускная способность (заявка не уйдет, когда-то будет обслужена):

$$q = 1 - \mathrm{P_{ОТК}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$$

4) Абсолютная пропускная способность (среднее число обслуживаемых в единицу времени заявок):

$A = \lambda q$, $A < \mu$

5) Среднее число занятых каналов (обслуживаемых заявок), например, среднее количество машин (каналов), обслуживающих заявки:

$r = A / \mu = q\rho$

6) Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди):

$$L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0 \frac{1-(m+1)\kappa^m + m\kappa^{m+1}}{(1-\kappa)^2}$$

7) Среднее число заявок в системе:

$L = r + L_q = q\rho + L_q$

8) Среднее время ожидания (пребывания в очереди) одной заявки:

$W_q = L_q / \lambda$

9) Среднее время пребывания заявки в системе:

$W = W_q + q\mu = L / \lambda$

Решить задачу для СМО с отказами:

В вычислительный центр с m ЭВМ поступают заказы на вычислительные работы. Если работают все m ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается. Пусть среднее время работы с одним заказом составляет $T_{обс}^{ср}$ часов. Интенсивность потока заявок равна λ (1/ч). Найти вероятность отказа $P_{отк}$ и $m_з$ – среднее число занятых ЭВМ.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	3	3	2	2	2	3	3	2	2	2
λ	0,25	0,2	0,2	0,15	0,1	0,25	0,2	0,2	0,15	0,1
$T_{обс}^{ср}$	3	3	3	2	2	3	3	3	2	2