Вариант 3

Пример 1. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) (***a***+2***b***)(***b***–3***a***), **б)** |(***a***+2***b***)×(***b***–3***a***)|,

где |***a***|=2, |***b***|=3, ***a***^***b***=π/4.

а) (***a***+2***b***)(***b***–3***a***),

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-3\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}^{2}+2\vec{b}^{2}-6\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}^{2}+2\vec{b}^{2}-6\vec{a}\cdot\vec{b}=-3\vec{a}^{2}+2\vec{b}^{2}-5\vec{a}\cdot\vec{b}=$$

$$=-3\left|\vec{a}\right|^{2}+2\left|\vec{b}\right|^{2}-5\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\vec{b}\right)=-3*2^{2}+2*3^{2}-5*2*3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-12+18-30*\frac{\sqrt{2}}{2}=6-15\sqrt{2}$$

б) |(***a***–3***b***)×(2***a***+***b***)|

$$\left[\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}-3\vec{a}\right)\right]=\left|\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{b}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{a}\right|=\left\|\vec{a}\times\vec{b}-3\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\sin 0+2\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin 0+6\vec{a}\times\vec{b}\right\|=$$

,

$$=\left\|-0+0+7\vec{a}\times\vec{b}\right\|=7\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a}\vec{b}\right)=7*2*3*\sin\frac{\pi}{4}=42*\sqrt{2}/2=21\sqrt{2}$$

Пример 2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти: **а)** объем пирамиды, **б)** площадь грани *ABC*, **в)** косинус угла между ребрами *AB* и *AC*, **г)** уравнение прямой *AB*, **д)** уравнение плоскости *ABC*, если *A*(2;–1;1), *B*(5;5;4), *C*(3;2;–1), *D*(4;1;3).

$$\overrightarrow{AB}=\left(\overline{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1}\right)=(5-2;5-(-1);4-1)=(3;6;3)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(\overline{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1}\right)=(3-2;2-(-1);-1-1)=(1;3;-2)$$

$$\overrightarrow{AД}=\left(\overline{x_4-x_1;y_4-y_1;z_4-z_1}\right)=(4-2;1-(-1);3-1)=(2;2;2)$$

А)Объем пирамиды

$$V_{ABCД}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3&6&3\\1&3&-2\\2&2&2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot(3\cdot3\cdot2+6\cdot(-2)\cdot2+1\cdot2\cdot3-2\cdot3\cdot3-2\cdot(-2)\cdot3-1\cdot6\cdot2)=$$

$$=\frac{1}{6}\left|(18-24+6-18+12-18)\right|=\frac{\left|-24\right|}{6}=4$$

Б)Площадь грани находится по формуле:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[AB\times AC\right]\right|$$

$$\left[AB\times AC\right]=\begin{vmatrix}i&j&k\\3&6&3\\1&3&-2\end{vmatrix}=-21\quad i\quad+9j+3k=(-21;9;3)$$

$$\left|\left[AB\times AC\right]\right|=\sqrt{(-21)^{2}+(9)^{2}+(3)^{2}}=\sqrt{441+81+9}=\sqrt{531}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[AB\times AC\right]\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{531}\text{ кв.ед.}$$

в) косинус угла между ребрами *AB* и *AC*

$$\cos\left(\overline{AB}\ \hat{}\ \overline{AC}\right)=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=3*1+6*3+3*(-2)=3+18-6=15$$

$$|AB|=\sqrt{(3)^2+(6)^2+(3)^2}=\sqrt{9+36+9}=\sqrt{54}$$

$$|AC|=\sqrt{(1)^2+(3)^2+(-2)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

$$\cos\left(\overline{AB}\ \hat{}\ \overline{AC}\right)=\frac{15}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{14}}=\frac{5}{2\sqrt{21}}$$

г) уравнение прямой AB,

$\overrightarrow{AB}=(3;6;3)\quad A(2;-1;1)$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-(-1)}{6}=\frac{z-1}{3}$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$$

д) уравнение плоскости ABC,

$[AB\times AC]=(-21;9;3)\quad A(2;-1;1)$

$$-21(x-2)+9*(y-(-1))+3*(z-1)=0$$

$$-21x+42+9y+9+3z-3=0$$

$$-21x+9y+3z+48=0$$

$$-7x+3y+1z+16=0$$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

С/Р ПРИМЕР 1. Вычислить выражения, используя определения и свойства скалярного и векторного произведений:

а) $(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, **б)** $|(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$,

где $|\boldsymbol{a}|=4$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\boldsymbol{a}\hat{}\boldsymbol{b}=2\pi/3$.

С/Р ПРИМЕР 2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти: **а)** объем пирамиды, **б)** площадь грани *ABC*, **в)** косинус угла между ребрами *AB* и *AC*, **г)** уравнение прямой *AB*, **д)** уравнение плоскости *ABC*, если *A*(3;2;1), *B*(1;–2;3), *C*(0;–1;4), *D*(2;1;0).