Теория игр.

Игра – упрощенная модель конфликтной ситуации.

Конфликт – это ситуация, в которой участвуют стороны интересы, которых полностью или частично противоположны.

Игра – это действительный или формальный конфликт, в которой имеются хотя бы 2 игрока (участника), каждый из которых стремится к достижению собственных целей.

Игроки – это множество заинтересованных сторон, которых можно назвать участниками, лицами и т.д.

Стратегии (ходы) – это возможные действии каждых из сторон.

Чистая стратегия – это стратегия, ориентированная на определенное поведение игрока-противника.

Смешанная стратегия – это стратегия, ориентированная на несколько возможных стратегий поведений игрока-противника.

Платеж – это числовая характеристика, выражающая интересы сторон.

Платеж – это количественная оценка результатов игры.

Функция выигрыша – это интересы сторон.

Участник игры – это человек, являющийся сознательным игроком, отвечающий за выбор того или ли иного решения.

- это лицо принимающее решение (ЛПР)

Правила игры устанавливают выбор образа действий игрока на каждом этапе игры, а так же информацию, которой обладает игрок при осуществлении выбора.

Плату для каждого игрока определяется после завершения любого этапа игры.

Игру можно определить следующим образом.

1. имеется n конфликтных сторон, интересы которых не совпадают.
2. сформулированы правила допустимой стратегии известные игрокам.
3. определяется набор возможных конечных состояний игры (выигрыш, ничье, проигрыш и т.д.)
4. всем участникам игры заранее известны платежи соответственно каждому возможному конечный результат.

Платежи обычно создаются в виде матрицы – называется платежная матрица или матричная игра.

Пример:

Имеются L игрока которые могут выбирать разные стратегию

План матрицы: $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 6\end{pmatrix}$

Для 1-ого игрока платежи записываются в строчках матрицы.

Для 2-ого игрока в столбцах матрицы.

Игра с участием двух игроков называется панной игрой.

1-ый игрок имеет m=2 стратегии (потому что две строки в матрице).

2-ой игрок имеет n=3стратегии (потому что три столбца в матрице).

Платежная матрица имеет размерность (m x n).

Стратегии каждого игрока определяется результаты или платежи в игре.

Если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, то такая игра называется игрой с «нулевой» суммой.

Решение игры состоит в определенной наилучшей стратегии каждым игроком.

Классификация игр:

1. по количеству игроков игры делятся на игры с 2, 3 и более чисел игроков.

2. по количеству стратегий (конечные и бесконечные игры)

3. по свойствам функций выигрыша (платежной функции)

- игры с нулевой суммой (антопонистические), т.е. игры в которой есть прямой конфликт.

- игры с постоянной разностью – эти игры в которой игроки проигрывает и выигрывает одновременно.

4. по возможности проведения предварительных переговоров различают.

- кооперативная – это игры в которой до начала игры игроки создают коалиции и принимают взаимооб. соглашаясь о своих стратегиях.

- некооперативные игры – это игры которые совсем взаимные общат. не принимаются и игроки не координируют свои возможные действия.

5. Позиционные игры – игры где задаются последовательность принятия решений игрокам.

6. Игры с природой (статистические) – это специальный класс матричной игры между двумя участниками; человек с одной стороны и природой с другой.

Статистические игры представлены основной моделью теории принятия решений в условиях частичной или полной неопределенности.

Этапы решений игровых ситуация.

1. Определить участников игр.

2. Определить стратегии игроков.

3. Определить выигрыш игроков при нескольких каждой стратегии.

4. представление матричных выигрышей (платежи) в нормальных форм.

покупатели

продавец $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Основная цель продавцов максимальная прибыль.

Основная цель покупателей минимум расходов.

Способы выбора оптимальной стратегий игроков .

Пример: определим стратегии по критерию Вальда.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\alpha_1=min\ (1,3,5,4)=1$

$\alpha_2=min\ (7,6,2,9)=2$

$\alpha_3=min\ (4,3,5,6)=3$

$\alpha=max\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=max(1,2,3)=3$

Нижняя цена игры - α_3

$\beta_1=max(1,7,4)=1$

$\beta_2=max(3,6,3)=6$

$\beta_3=max(5,2,5)=5$

$\beta_4=max(4,9,6)=9$

$\beta=min(7,6,5,9)=5$

β_3 – верхняя цена игры

υ - цена игры

$\alpha \le \upsilon \le \beta$

$3 \le \upsilon \le 5$

α – это нижняя цена игры или гарантированный выигрыш игрока *A* при любой стратегии игрока *B*.

α – так же называется максимином.

$\alpha=max\ (min\ \{\alpha_{ij}\}$

β – это верхняя цена игры или гарантированный проигрыш игрока *B*.

β – называется минимаксом.

$\beta=min(max\ \{\alpha_{ij}\})$

Если нижняя и верхняя цена игры различна, то игра называется игрой в смешанных стратегиях.

Если нижняя и верхняя цена игры совпадают, то игра называется игрой в чистых стратегиях.

$\upsilon \le \alpha \le \beta$ – чистая цена игры

Пример: решения игры в чистых стратегиях

$$\begin{matrix} & \text{II} \\ \text{I} & \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\alpha_1 = min\ (5,6,8) = 5$

$\alpha_2 = min\ (9,7,8) = 7$

$\alpha_3 = min\ (7,6,6) = 6$

$\alpha = max(5,7,6) = 7$

$\beta_1 = max(5,9,7) = 9$

$\beta_2 = max(6,7,6) = 7$

$\beta_3 = max(8,8,6) = 8$

$\beta = min(9,7,8) = 7$

$\upsilon = \alpha = \beta = 7$

Для I-ого игрока выгодна стратегия А-2

Для II-ого игрока выгодна стратегия В-2

Пару чистых стратегий. A_p и B_∂ соответствуют значений α и β называется седловыми стратегиями матричной игры.

Элемент A_{pq} – называется седловым элементом платежной матрицы.

$A_{pq} = 7$

Тройку $(A_p; B_q; \upsilon)$ – решение игры

Способы упрощения платежных матриц.

1. Сравниваем элементы 2-х строк попарно.

Если все элементы какой -то строки $\le$ соответствующих элементов другой строки то строчку с меньшими элементами вычеркиванием.

2. Сравниваем элементы 2-х столбцов.

Если все элементы какого-либо столбца $\ge$ элементов другого столбца то столбец с большими числами вычеркиваем.

Пример1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 \le 3 \\ -2 \le 7 \\ -1 \le 5 \\ 0 \le 4 \end{vmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{vmatrix} 3 \le 7 \\ 3 \le 6 \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{vmatrix} 3 \le 5 \\ 3 \le 3 \end{vmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{vmatrix} 3 \le 4 \\ 3 \le 5 \end{vmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \approx |3 \le 3| \approx 3$$

$v = 3$ Цена игры=3

Пример 2:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 1 & 4 & 3\\ 8 & 2 & 4 & 9 & 3\\ 5 & 1 & 3 & 8 & 4\\ 6 & 2 & 1 & 7 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}4\geq 3\\ 9\geq 3\\ 8\geq 4\\ 7\geq 2\end{vmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}5 & 6 & 1 & 3\\ 8 & 2 & 4 & 3\\ 5 & 1 & 3 & 4\\ 6 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}5\geq 3\\ 8\geq 3\\ 5\geq 4\\ 6\geq 2\end{vmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}6\geq 2\\ 1\geq 1\\ 3\geq 2\end{vmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Дальше матрицу упростить нельзя

Пример 3:

$$M=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5 & 1\\ 7 & 4 & 6 & 9\\ 8 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1\leq 1\\ 4\leq 9\\ 2\leq 2\end{vmatrix}$$ вычеркиваем столбец с большими членами$\rightarrow\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 7 & 4 & 6\\ 8 & 2 & 4\end{pmatrix}\rightarrow$

$\begin{vmatrix}1\leq 5\\ 4\leq 6\\ 2\leq 4\end{vmatrix}$ вычеркиваем столбец с большими членами$\rightarrow\begin{pmatrix}3 & 1\\ 7 & 4\\ 8 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}3\leq 7\\ 1\leq 4\end{vmatrix}$выч еркиваем строку с меньшими членами$\rightarrow\begin{pmatrix}7 & 4\\ 8 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}7\geq 4\\ 8\geq 2\end{vmatrix}$ вычеркиваем столбец с большими членами$\rightarrow$

$\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}\rightarrow|4\geq 2|$вычеркиваем строку с меньшими членами$\rightarrow 4$

V=4

Решение игр в смешанных стратегиях

Основная теорема теории игр (теорема Неймона)

Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение возможное среди смешанных стратегий.

$S_A=(p_1^*; p_2^*; p_3^*;\dots p_m^*;)$

$S_B=(q_1^*; q_2^*; q_3^*;\dots q_m^*;)$

p и q – это вероятности

p – это вероятность выбора соответствующих стратегий игрокам А.

q – это вероятность выбора соответствующих стратегий игроков В.

$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \qquad \sum_{j=1}^{m} = 1$

Простейшим случаем является парная игра (размерности 2×2)

$$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = min\ (1,7)=1$

$\alpha_2 = min\ (3,2)=2$

$\alpha_3 = min\ (1,2) = 1$

$\beta_1 = max(1,3) = 3$

$\beta_2 = max(7,2) = 7$

$\beta = min(3,7) = 3$

$2 = \upsilon = 3$

$\upsilon \neq \beta$

Игра в смешанной стратегии где цена игры между 2и 3.

$$\begin{matrix} & q_1 & q_2 \\ I & \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \\ II & & \end{matrix}$$

1 система

$$\begin{cases} 1p_1 + 3p_2 = \upsilon \\ 7p_1 + 2p_2 = \upsilon \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

2 система

$$\begin{cases} 1q_1 + 7q_2 = \upsilon \\ 3q_1 + 2q_2 = \upsilon \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

Решение 1 системы:

$$\begin{cases} 1p_1 + 3p_2 = 7p_1 + 2p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1p_1 - 7p_1 = 2p_2 - 3p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6p_1 = -p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{6}p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{6}p_2 \\ \frac{1}{6}p_2 + p_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{6}p_2 \\ \frac{7}{6}p_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{6}p_2 \\ p_2 = \frac{6}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{6}\frac{6}{7} \\ p_2 = \frac{6}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{7} \\ p_2 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$S_A = (\frac{1}{7};\ \frac{6}{7})$

$\upsilon = 1p_1 + 3p_2 = 1 \times \frac{1}{7} + 3 \times \frac{6}{7} = \frac{19}{7}$ - цена игры

Решение 2 системы:

$$\begin{cases} 1q_1 + 7q_2 = 3q_1 + 2q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2q_1 = -5q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{5}{2}q_2 \\ \frac{5}{2}q_2 + q_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{5}{2}q_2 \\ \frac{7}{2}q_2 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} q_1 = \frac{5}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \\ q_2 = \frac{2}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{5}{7} \\ q_2 = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$S_A = (\frac{5}{7};\ \frac{2}{7})$

$\upsilon = 1q_1 + 7q_2 = 1 \times \frac{5}{7} + 7 \times \frac{2}{7} = \frac{19}{7}$

цена игры в сменных строк $= \frac{19}{7}$

Нахождение цены игры и соответствие вероятностей выбора стратегий игроками с помощью формул

$$A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Пример$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$a_{11} = 1$
$a_{21} = 3$
$a_{12} = 7$
$a_{22} = 2$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{21} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$p_1 = \frac{2-3}{1+2-3-7} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$p_2 = \frac{1-7}{1+2-3-7} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{21} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$q_1 = \frac{2-7}{1+2-3-7} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$$

$$q_2 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{21} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$q_2 = \frac{1-3}{1+2-3-7} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

$$\upsilon = \frac{a_{22} * a_{11} - a_{12} * a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

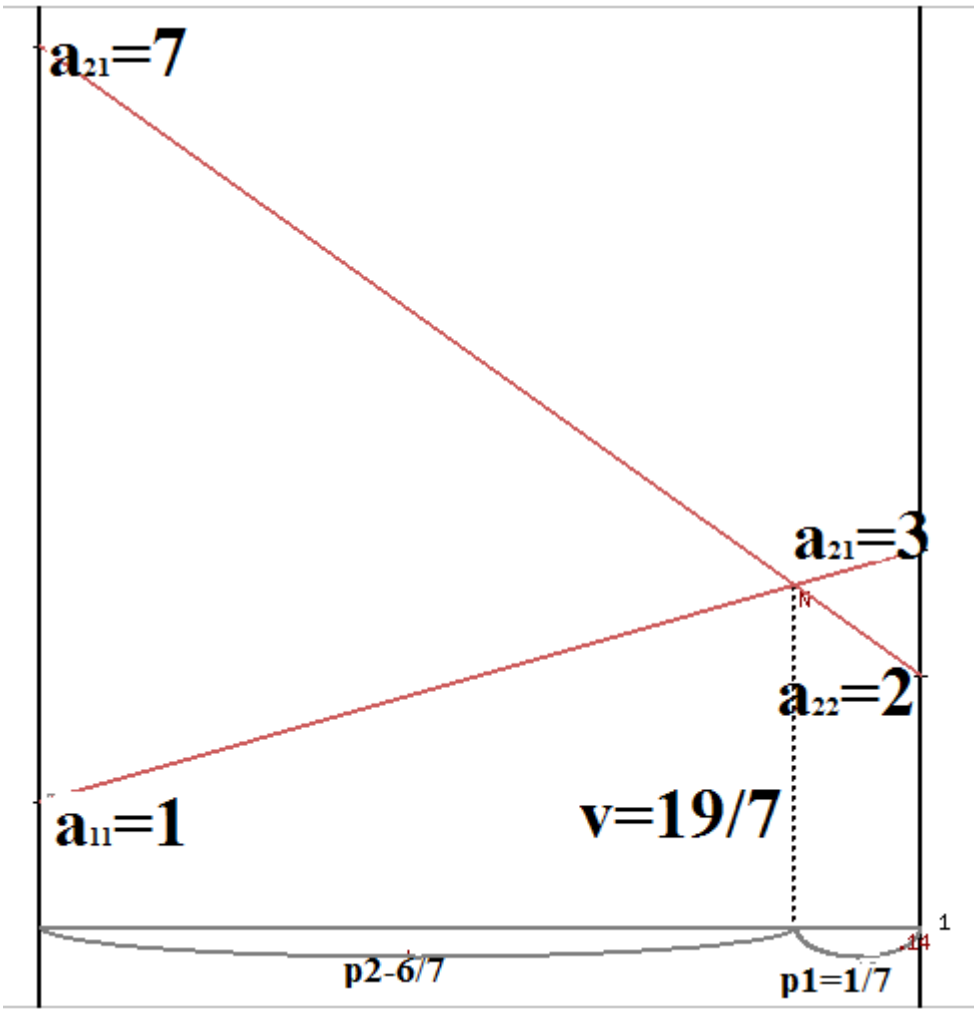
$$\upsilon = \frac{2 * 1 - 7 * 3}{1 + 2 - 3 - 7} = \frac{19}{7}$$

Графическое решение игры в смешанных стратегиях

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1 \quad a_{21} = 3 \quad a_{12} = 7 \quad a_{22} = 2$



Ответ: Цена игры: V = $^{19}/_{7}$, вектор стратегии игроков P($^{1}/_{7}$, $^{6}/_{7}$)

Графическое решение игры обычно находится в случаях, если один из игроков имеет только две стратегии

Статистические игры и их решение

Статистические игры - это специальный класс матричных игр, одним из участников которой является человек или группа лиц, объединенных общей целью, а другим- природа.

1-ым игрок может являться менеджер, экономист, руководство предприятия, владелиц фирмы – его называют лицом принимающее управление решение (ЛПР).

Противником может являться случайный спрос на продукцию, климат, состояние оборудования, возможные природные состояния.

Критерии Севиджа.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = max(5,2,4) = 5$

$\beta_2 = max(3,6,9) = 9$

$\beta_3 = max(1,7,3) = 7$

$r_{ij} = B_{ij} - L_{ij}$

$r_{ij} \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 5-5 & 9-3 & 7-1 \\ 5-2 & 9-6 & 7-7 \\ 5-4 & 9-9 & 7-3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Находим максимальные риски в каждой строке

$r_1 = max(0,6,6) = 6$

$r_2 = max(3,3,0) = 3$

$r_3 = max(1,0,4) = 4$

$r = min(r_1, r_2, r_3) = \min(6,3,4) = 3$

Для игрока А оптимальна вторая стратегия

Критерий Байсса (Бейеса)

Этот критерий используется, если вероятности состояния природы известны

Семинар

Задание №1

Дана платежная матрица игры

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4 & 9\\ 2 & 6 & 5 & 1\\ 8 & 7 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Найти оптимальные стратегии по следующим критериям:

а) Критерий Вальда

б) Критерий Севиджа

Задание №2

Дана платежная матрица игры

$$A=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

Найти оптимальные стратегии и цену игры по следующим критериям:

а) графическое решение;

б) с помощью системы;

в) по формуле.

Задание №3

Упростить платежную матрицу с помощью принципа доминирования строк и столбцов и определить оптимальные стратегии и цену игры различными методами

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1 & 2\\ 6 & 5 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$