Венгерский алгоритм.

Шаг1. Поиск наименьшего элемента строки i.

Шаг2. Вычитание найденного минимального элемента из каждого элемента i-той строки.

Шаг3. Поиск наименьшего элемента столбца j.

Шаг4. Вычитание найденного минимального элемента из каждого элемента j-того солбца.

Шаг5. В результате выполнения шагов 1,2,3 получается редуцированная матрица.

Шаг6. Заполнение векторов I,J соответственными нулевыми элементами редуцированной матрицы.

Шаг7. Если в каждом столбце и в каждой строке найден нулевой элемент, тогда найдено совершенное паросочетание.

Шаг8. Выбрать нулевые элементы так, чтобы никакие два нуля не находились в одном и том же столбце или строке. Данные элементы входят в паросочетание.

Шаг9. Выполнить шаги с 1 по 8 пока ни выполнится 6 шаг.

Исходная матрица имеет вид:

	B1	B2	B3	B4
A1	8	6	0	8
A2	4	3	4	0
A3	7	8	2	2
A4	2	9	9	3

Математическая модель задачи:

$F = \sum\sum c_{ij}x_{ij}$, (1)

при условиях:

$\sum x_{ij} = n$, $i = 1,2,\ldots, m$, (2)

$\sum x_{ij} = m$, $j = 1,2,\ldots, n$, (3)

$x_{ij} \geq 0$, целые

Запишем экономико-математическую модель для нашей задачи.

Переменные x_{ij} принимают значения 1, если i-й кандидат занимает j-ю вакансию. Если данное условие не выполняется, то $x_{ij}=0$.

Ограничения по кандидатам:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$

Ограничения по вакансиям:
$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$
Целевая функция:
$8x_{11} + 6x_{12} + 0x_{13} + 8x_{14} + 4x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 0x_{24} + 7x_{31} + 8x_{32} + 2x_{33} + 2x_{34} + 2x_{41} + 9x_{42} + 9x_{43} + 3x_{44} \rightarrow \min$

Шаг №1.

Находим минимальное значение в каждой строчке

	B1	B2	B3	B4	
A1	8	6	0	8	Мин(8,6,0,8)=0
A2	4	3	4	0	Мин(4,3,4,0)=0
A3	7	8	2	2	Мин(7,8,2,2)=2
A4	2	9	9	3	Мин(2,9,9,3)=2

Проводим редукцию матрицы по строкам.

Отнимаем от значений в строчках минимальные значения строчек

	B1	B2	B3	B4
A1	8-0=0	6-0=6	0-0=0	8-0=8
A2	4-0=4	3-0=3	4-0=4	0-0=0
A3	7-2=5	8-2=6	2-2=0	2-2=0
A4	2-2=0	9-2=7	9-2=7	3-2=1

В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

	B1	B2	B3	B4
A1	8	6	0	8
A2	4	3	4	0
A3	5	6	0	0
A4	0	7	7	1

Затем такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент.

	B1	B2	B3	B4
A1	8	3	0	8
A2	4	0	4	0
A3	5	3	0	0
A4	0	4	7	1
	Мин(8,4,5,0)=0	**Мин(3,0,3,4)=0**	**Мин(0,4,0,7)=0**	**Мин(8,0,0,1)=0**

отнимаем от элементов в столбцах минимальные элементы

	B1	B2	B3	B4
A1	8-0=8	3-0=3	0-0=0	8-0=8
A2	4-0=4	3-0=3	4	0
A3	5-0=5	3	0	0
A4	0-0=0	4	7	1

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу.

	B1	B2	B3	B4
A1	8-0=0	3-0=0	0-0=0	8
A2	4	0	4	0
A3	5	3	0	0
A4	0	4	7	1

Методом проб и ошибок проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость.
Фиксируем нулевое значение в клетке (1, 3). Другие нули в строке 1 и столбце 3 вычеркиваем. Для данной клетки вычеркиваем нули в клетках (3; 3)
Фиксируем нулевое значение в клетке (2, 2). Другие нули в строке 2 и столбце 2 вычеркиваем. Для данной клетки вычеркиваем нули в клетках (2; 4).
Фиксируем нулевое значение в клетке (3, 4). Другие нули в строке 3 и столбце 4 вычеркиваем.
Фиксируем нулевое значение в клетке (4, 1). Другие нули в строке 4 и столбце 1 вычеркиваем.
В итоге получаем следующую матрицу:

8	3	**[0]**	8
4	**[0]**	4	[-0-]
5	3	[-0-]	**[0]**
[0]	4	7	1

Количество найденных нулей равно k = 4. В результате получаем эквивалентную матрицу

8	3	0	8
4	0	4	0
5	3	0	0
0	4	7	1

Методом проб и ошибок определяем матрицу назначения X, которая позволяет по аналогично расположенным элементам исходной матрицы (в квадратах) вычислить минимальную стоимость назначения.

	B1	B2	B3	B4
A1	8	3	**[0]**	8
A2	4	**[0]**	4	[-0-]
A3	5	3	[-0-]	**[0]**
A4	**[0]**	4	7	1

	B1	B2	B3	B4
A1	8	6	0	8
A2	4	3	4	0
A3	7	8	2	2
A4	2	9	9	3

Cmin = 0 + 3 + 2 + 2 = 7
Путь: (1;3), (2;2), (3;4), (4;1)

Задача о назначениях (Венгерский метод)

Пусть m — количество работ.

Задача о назначениях в стандартной форме. При рассмотрении задачи о назначениях в стандартной форме предполагается, что количество рабочих *равно* количеству работ. Обозначения:

c_{ij} — показатель эффективности назначения i-го рабочего на j-й работе, например издержки выполнения i-м рабочим j-й работы;

x_{ij} — переменная модели ($x_{ij} = 1$, если i-й рабочий используется на j-й работе, и $x_{ij} = 0$ в противном случае).

Модель задачи о назначениях:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\,x_{ij} \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, j = 1, \dots, m, \qquad (2a)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, m \qquad (2б)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m \quad (3)$$

Здесь (1) — целевая функция (минимум издержек на выполнение всех работ);

(2) — система ограничений, отражающая следующие условия:

а) каждая работа должна быть выполнена одним рабочим;

б) каждый рабочий может быть привлечен к одной работе;

(3) — условия неотрицательности переменных.

При решении задачи о назначениях исходной информацией является таблица задачи о назначениях с=$\{c_{ij}\}$, элементами которой служат показатели эффективности назначений. Для задачи о назначениях, записанной в стандартной форме, количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов:

Таблица 1

работа / рабочий	1	2	…	j	…	m
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1m}
2	c_{11}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{im}
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mm}

Результатом решения задачи о назначениях (1)—(3) является вектор x* = $\{x_{ij}^{*}\}$, компоненты которого — целые числа.

Оптимальный план задачи о назначениях (1)—(3) можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна единица. Такую матрицу иногда называют матрицей перестановок. Значение целевой функции (1), соответствующее оптимальному плану, называют эффективностью назначений.

Задача о назначениях в открытой форме.

Задача о назначениях в открытой форме возникает тогда, когда количество рабочих не равно количеству работ. В этих случаях задача может быть преобразована в задачу, сформулированную в стандартной форме.

Пусть, например, количество рабочих п превышает количество работ т.

Введем дополнительные фиктивные работы с индексами j = w + 1,…, п. Коэффициенты таблицы назначений c_{ij} , i = 1,…, п; j = т + 1,…, п, положим равными нулю. В этом случае получаем задачу, сформулированную в стандартной форме. Если в оптимальном плане этой задачи $x_{ij}^{*} = 1$ при j = т + 1,…, п, то исполнитель i назначается на выполнение фиктивной работы, т.е. остается без работы. Заметим, что оптимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с оптимальным значением задачи, приведенной к стандартной форме. Поэтому эффективность назначений в результате такого преобразования не меняется.

Следует особо отметить, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой количество пунктов производства совпадает с количеством пунктов потребления, а все величины спроса и величины предложения равны.

Венгерский алгоритм.

Шаг1. Поиск наименьшего элемента строки i.

Шаг2. Вычитание найденного минимального элемента из каждого элемента i-той строки.

Шаг3. Поиск наименьшего элемента столбца j.

Шаг4. Вычитание найденного минимального элемента из каждого элемента j-того солбца.

Шаг5. В результате выполнения шагов 1,2,3 получается редуцированная матрица.

Шаг6. Заполнение векторов I,J соответственными нулевыми элементами редуцированной матрицы.

Шаг7. Если в каждом столбце и в каждой строке найден нулевой элемент, тогда найдено совершенное паросочетание.

Шаг8. Выбрать нулевые элементы так, чтобы никакие два нуля не находились в одном и том же столбце или строке. Данные элементы входят в паросочетание.

Шаг9. Выполнить шаги с 1 по 8 пока ни выполнится 6 шаг.

Эта задача исторически является первой задачей дискретного программирования (опубликована венгерским математиком Е. Эгервари в 1932 г. как транспортная задача).

Имеется n исполнителей, которые могут выполнить n различных работ. Известна полезность c_{ij}, связанная с выполнением i-м исполнителем j-ой работы $(i, j = \overline{1, n})$. Необходимо так назначить исполнителей на работы, чтобы добиться *максимальной полезности* при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу и за каждой работой должен быть закреплен только один исполнитель.

Для составления *математической модели* задачи обозначим через x_{ij} факт назначения или неназначения i-го исполнителя на j-ую работу. Так как количество исполнителей равно количеству работ и каждый из них может быть назначен только на одну работу, то x_{ij} должен принимать только *два* значения: 1 или 0 (такие переменные называются булевыми).

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если i-ый исполнитель назначен на j-ую работу;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Приходим к *задаче*: Найти план назначения (x_{ij}), который максимизирует суммарную полезность назначений

$$\max Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при следующих ограничениях:

Каждый i исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}) \quad .$$

На каждую j работу назначается только на один исполнитель:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, n}) \quad .$$

На переменные наложены условия неотрицательности и целочисленности:

$$x_{ij} \geq 0; \quad x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Легко можно увидеть, что задача о назначении является частным случаем транспортной задачи при $a_i = 1, b_j = 1$. С учетом специфики для ее решения разработаны специальные, более эффективные алгоритмы.

Задача о назначении имеет самое широкое применение. Например, при закреплении машин за маршрутами, распределении инструментов для обработки различных марок стали, назначении на должность, о распределении рабочих, бригад, фирм и т.д. В каждом конкретном случае

математическая модель задачи имеет свою специфику. Например, в задаче распределения алгоритмов между вычислительными машинами на ВЦ число распределяемых алгоритмов *не равно* числу машин. При назначении на должность для некоторых исполнителей существуют ограничения.

Прежде всего, надо отметить, что если задача о назначении ставится при условии получения *максимального* эффекта, то ее сводят к задаче *на минимум*.

Пусть дана матрица эффективности $C = (c_{ij})$. В каждом *столбце* найдем максимальный элемент $\beta_j = \max c_{ij}$. Строим ***матрицу потерь*** $C' = (\beta_j - c_{ij})$. Так как ставится задача на нахождение $\max Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$, то для функции $Z' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - c_{ij}) x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j - Z$ получается задача на минимум.

Если в задаче число исполнителей n равно числу работ m, то модель такой задачи называется *закрытой*, в противоположном случае – *открытой*.

Открытая модель задачи о назначениях решается приведением к закрытой модели. Если число работ m меньше числа исполнителей n $(m < n)$, то вводят $n - m$ фиктивных работ, при этом считают, что при назначении исполнителей на фиктивную работу, затраты равны нулю: $c_{ij} = 0$, т.е. соответствующие коэффициенты матрицы потерь равны нулю. Аналогично, в случае превышения числа работ над исполнителями $(m > n)$, то вводят $m - n$ фиктивных исполнителей и соответствующие элементы c_{ij} матрицы потерь равны нулю.

Точное решение задачи о назначениях находится методом динамического программирования (венгерский метод). Существует также много других приближенных методов. Хорошее приближение дает модификация метода аппроксимации Фогеля для определения опорного плана транспортной задачи.

Пример 6. При закреплении транспортных средств за маршрутами определена матрица прибылей:

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 9 & 12 \\ 7 & 11 & 9 & 5 \\ 12 & 13 & 15 & 10 \\ 9 & 14 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить такой план закрепления, при котором суммарная прибыль будет максимальной.

Решение. Сведем задачу на нахождение максимума прибыли к задаче на нахождение минимума. Для этого в каждом столбце матрицы находим максимальный элемент $\beta_j = \max c_{ij}$ (соответственно 13, 14, 15, 12) и вычтем из него элементы соответствующего столбца.

Получим матрицу потерь

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

которую будем решать на минимум:

$$\min Z' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - c_{ij}) x_{ij}.$$

Для получения *приближенного* решения воспользуемся методом аппроксимации Фогеля для нахождения опорного плана транспортной задачи. Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными элементами, записанными в данной строке или столбце, и поместим их в соответствующем первом дополнительном столбце или первой дополнительной строке табл. 24.

Таблица 24

	Матрица потерь				Разности по строкам		
	0	**4**	**6**	**0**	0	0	–
	6	**3**	**6**	**7**	3	3	3
	1	**1**	**0**	**2**	1	–	–
	4	**0**	**5**	**4**	4	4	4
Разности по столбцам	1	1	5	2			
	4	3	–	4			
	2	3	–	–			

В таблице условий во всех столбцах и во всех строках находим разность между двумя минимальными. Эти разности записываем в специально отведенные для этого строке и столбце таблицы.

Вычислив все разности, видим, что наибольшая из них соответствует третьему столбцу. В этом столбце находим минимальный элемент: $c'_{33} = 0$, находящийся в третьей строке. Исключаем из

рассмотрения строку и столбец, содержащих этот элемент. Фиксируем *полученное назначение*: за третьим маршрутом закрепляется третье транспортное средство.

Снова находим разности между двумя минимальными элементами в каждой из строк и столбцов оставшейся части таблицы и записываем их во втором дополнительном столбце и во второй дополнительной строке табл. 24. Наибольшая разность соответствует четвертому столбцу, а минимальный элемент $c'_{41} = 0$ в этом столбце записан в клетке, которая находится на пересечении с первой строкой. Следовательно, за первым маршрутом закрепляется четвертое транспортное средство.

Продолжая итерационный процесс, находим, что за четвертым маршрутом закрепляется второе транспортное средство и, следовательно, за вторым маршрутом – первое. В результате получили план назначения:

$$(1-4), \quad (2-1), \quad (3-3), \quad (4-2).$$

Максимальный эффект, при таком плане назначения будет

$$Z_{max} = c_{14} + c_{21} + c_{33} + c_{42} = 12 + 7 + 15 + 114 = 48.$$