15-04-2020 128М 128Э Динамическое программирование

Задание 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫГОДНОГО ПУТИ

Найти маршрут, связывающий города А (1) и В (10), для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими, (рис. 1.2)

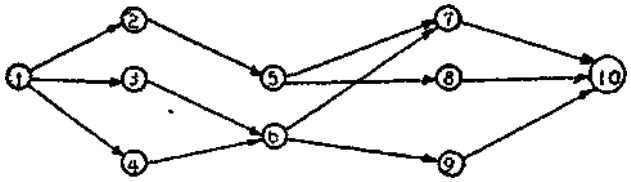

Рис. 1.2 Стоимость перевозки груза по всем направлениям приводится ниже для каждого варианта NB.

Вариант 23 **(Ч)**

направления		затраты
1	2	13
1	3	32
1	4	8
2	5	14
3	6	15
4	6	29
5	7	28
5	8	17
6	7	8
6	9	13
7	10	10
8	10	32
9	10	15

Решение:

В задаче имеется ограничение – двигаться по изображенным на схеме маршрутом можно только слева на право, т.е. попав, например, в пункт 7, мы имеем право переместиться только в пункт 10 и не можем возвратиться обратно в 5 или 6. Это особенность транспортной сети дает право отнести

каждый из 10 пунктов к одному из поясов. Будем считать, что пункт принадлежит *k*-му поясу, если из него попасть в конечный пункт ровно за k шагов, т.е. заездом ровно в (*k*-1) – й промежуточный пункт. Таким образом, пункты 7, 8 и 9 принадлежат к первому поясу, 5 и 6 ко второму, 2, 3 и 4 к третьему и 1– к четвертому. Тогда на *k*-м шаге будем находить оптимальные маршруты перевозки груза из пунктов в *k*-го пояса до конечного пункта. Оптимизацию будем производить с конца процесса, и потому, дойдя до *k*-го шага, неизвестно, в каком из пунктов *k*-го пояса окажется груз, перевозимый из первого пункта.

Введем обозначения:

k – номер шага ($k = \overline{1,4}$)

i – пункт, из которого осуществляются перевозки($i = \overline{1,9}$)

j – пункт, в который доставляется груз($i = \overline{2,10}$)

C_{ij} – стоимость перевозки груза из пункта *i* в пункт *j*.

$F_k(i)$ – минимальные затраты на перевозку груза на *k*-м шаге решения задачи из пункта *i* до конечного пункта.

Очевидно, что минимум затрат на перевозку груза из пунктов *k*-го пояса до пункта 10 будет зависеть от того, в каком месте этого пояса мы оказались. Номер *i* пункта, принадлежащего *k*-му поясу будет являться переменной состояния системы на *k*-м шаге. Поскольку оптимизация осуществляется с конца процесса, то, находясь в некотором пункте *i* *k*-го пояса, принимается решение о перемещении груза в один из пунктов (*k* – 1)-го пояса, а направление дальнейшего движения известно из предыдущих шагов. Номер *j* пункта (*k*-1)-го пояса будет переменной управления на *k*-м шаге.

Для первого шага управления (*k*=1) функция Беллмана представляет собой минимальные затраты на перевозку груза из пунктов 1-го пояса в конечный пункт, т.е. $F_1(i) = \tilde{N}_{i10}$. Для последующих шагов затраты складываются из двух слагаемых – стоимость перевозки груза C_{ij} из пункта *i* *k*-го пояса в пункт *j* (*k*–1)-го пояса и минимально возможных затрат на перевозку из пункта *j* до конечного пункта, т.е. $F_{k-1}(j)$.

Таким образом, функциональное уравнение Беллмана будет иметь вид

$$F_k(i) = \min_j \{C_{ij} + F_{k-1}(j)\}$$

Минимум затрат достигается на некотором значении j^*, которое является оптимальным направлением движением из пункта *i* в конечный пункт.

На четвертом шаге попадаем на 4-ый пояс и состояние системы становится определенным *i*=1. Функция $F_4(1)$ представляет собой минимально возможные затраты по перемещению груза из пункта 1 в 10. Оптимальный маршрут определяется в результате анализа всех шагов в обратном порядке, а выбор некоторого управления *j* на *k*-м шаге приводит к тому, что состояние системы на (*k*-1)-м шаге становится определенным.

I этап. Условная оптимизация.

1-й шаг. *k*=1 $F_1(i) = \tilde{N}_{i10}$.

На первом шаге в пункт 10 груз может быть доставлен из пунктов 7, 8 или 9.

Таблица 1.

i \ j	10	$F_1(i)$	j^*
7	10	10	10
8	32	32	10
9	15	15	10

2-й шаг. *k*=2. Функциональное уравнение на втором шаге принимает вид

$$F_2(i) = \min_j \{C_{ij} + F_1(j)\}$$

5	7	28
5	8	17
6	7	8
6	9	13

Все возможные перемещения груза на втором шаге и результаты расчета приведены в следующей таблице 2.

Таблица 2.

i \ j	7	8	9	$F_2(i)$	j^*
5	28+10=38	17+32=49	–	38	7
6	8+10=18	–	13+15=28	18	7

3-й шаг. *k*=3. $F_3(i) = \min_j \{C_{ij} + F_2(j)\}$

2	5	14
3	6	15
4	6	29

Таблица 3.

i \ j	5	6	$F_3(i)$	j^*
2	14+38=52	–	52	5
3	–	15+18=33	33	6
4	–	29+18=47	47	6

4-й шаг. *k*=4.

$$F_4(i) = \min_j \{C_{ij} + F_3(j)\}$$

1	2	13
1	3	32
1	4	8

Таблица 4.

i \ j	2	3	4	$F_4(i)$	j^*
1	13+52=65	32+33=65	8+47=55	55	4

II этап. Безусловная оптимизация.

На этапе условной оптимизации получено, что минимальные затраты на перевозку груза из пункта 1 в пункт 10 составляют $F_4(1) = 55$. Данный результат достигается при движении груза их пункта 1 в пункт 4. По данным таблицы 3, из пункта 4 необходимо двигаться в пункт 6, затем – в пункт 7 и из него – в конечный пункт. Таким образом, оптимальный маршрут доставки груза: $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10$.

Задание 2. Решить самостоятельно

ЗАДАЧА ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти маршрут, связывающий города *A* (1) и *B* (10), для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими (рис. 2). При этом необходимо использовать метод динамического программирования.

Стоимость перевозки груза по всем направлениям приводится ниже для каждого варианта.

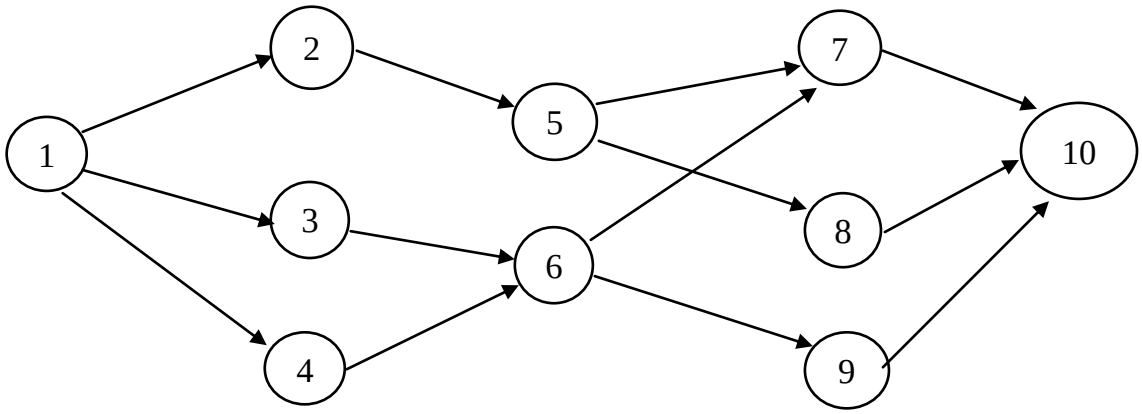

Рис. 2

Варианты задания*

Вариант 1 (А)				**Вариант 2** (Б)		
Направления		Затраты		Направления		Затраты
1	2	9		1	2	8
1	3	10		1	3	11
1	4	14		1	4	13
2	5	8		2	5	7
3	6	7		3	6	6
4	6	7		4	6	8
5	7	6		5	7	7
5	8	5		5	8	14
6	7	14		6	7	13
6	9	9		6	9	8
7	10	12		7	10	11
8	10	10		8	10	11
9	10	7		9	10	6

* В скобках приведены буквы алфавита, определяющие номер варианта.