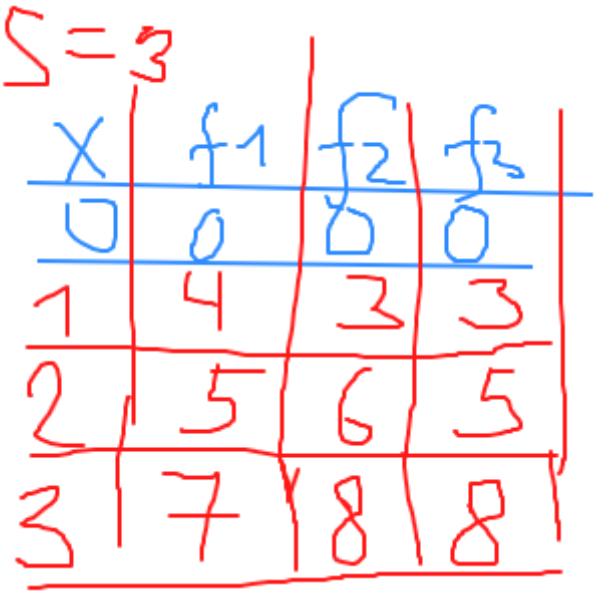

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДСТВ НА РАСШИРЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВА

Пример решения задачи

Пусть группе предприятий выделяют дополнительные средства на реконструкцию и модернизацию производства. По каждому из n предприятий известен возможный прирост $g_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы x. Требуется так распределить между предприятиями средства C, чтобы общий прирост $f_n(C)$ выпуска продукции был максимальным.

Алгоритм решения

Составим основное рекуррентное уравнение задачи.

1. Задача разбивается на шаги искусственным образом. В качестве n-го шага принимается вложение средств в n предприятий.

2. Параметр, характеризующий состояние системы перед каждым шагом, – запас невложенных средств C.

3. Параметры «шагового управления» данной задачи – средства x_1, x_2, ..., x_n, выделяемые предприятиям.

4. Выигрыш на шаге n определяется приростом выпуска продукции $g_n(x)$ n-го предприятия в зависимости от вложенных в него средств x (т. е. шагового управления).

5. Под действием шагового управления x система переходит в новое состояние $C_n = C_{n-1} + x_n$, где C_n – запас невложенных средств

на шаге n, которые можно вложить в n предприятий; x_n – те средства из C_n, которые вложили на данном шаге в n-е предприятие; C_{n-1} – соответственно, оставшиеся невложенные средства на предыдущем шаге $(n-1)$ для распределения по оставшимся $(n-1)$ предприятиям.

Обозначим через $f_n(C)$ максимальное значение прироста продукции нескольких n предприятий при распределении суммы C между ними.

6. Рекуррентное соотношение для этой задачи имеет вид

$$f_n(C) = \max\ [g_n(x) + f_{n-1}(C-x)], \qquad (7)$$

где $f_{n-1}(C-x)$ – максимальное значение прироста продукции на предыдущем шаге $(n-1)$ при распределении суммы $C_{n-1} = C_n - x_n$ между $(n-1)$ предприятиями, $0 \le x \le C$.

Решение задачи

Пусть имеются четыре предприятия, между которыми необходимо распределить 100 тыс. у. е. Значения $g_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы X приведены в табл. 10.

Необходимо составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Таблица 10

Прирост выпуска каждого предприятия в зависимости от выделенной ему суммы

Средства X, тыс. у. е.	1	2	3	4
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	8	10	9	14
40	20	24	23	28
60	36	33	34	34
80	45	46	48	47
100	59	59	62	60

Условная оптимизация

Результаты вычислений будем оформлять в виде таблиц. В первом столбце – возможные значения состояния системы C (наличный запас еще не вложенных средств). В первой строке шаговое управление X – средства, выделяемые предприятиям. Для упрощения вычис-

лений значения X и C будем принимать кратными 20 тыс. у. е. В каждой клетке таблицы записывается значение сумм $g_n(x)+f_{n-1}(C-X)$ для соответствующих X и $C-X$. Значения $g_n(x)$ выбираются из табл. 10, значения $f_{n-1}(C-X)$ для $n>1$ – из предыдущей таблицы, для $n=1$ $f_0(C-X)=0$. В двух последних столбцах записываются максимальный по строке прирост продукции $f_n(C)$ и оптимальная сумма средств $X_n(C)$, выделенная n-му предприятию.

Заполнять таблицу удобно по столбцам. Незаполненные клетки соответствуют недопустимым сочетаниям C и X, $n=1$ (все средства выделяются на реконструкцию и модернизацию одного предприятия).

В соответствии с формулой (7) $f_1(C)$ – максимально возможный прирост выпуска продукции при выделении средств только первому предприятию, определяется выражением

$$f_1(C)=\max\ [g_1(x)+f_0(C-X)]=\max\ g_1(x).$$

Если $n=2$,

$$f_2(C)=\max\ [g_2(x)+f_1(C-X)]. \qquad (8)$$

Средства вкладываются в два предприятия.

Основная задача заключается в том, чтобы найти значения функции $f_2(C)$ по формуле (8) для всех допустимых комбинации C и x. Значения $g_2(x)$ выбираются из табл. 10, $f_1(C-X)$ – из табл. 11. Например, в клетке на пересечении строки $C=80$, $X=20$ (средства, выделенные второму предприятию) $C=80-20=60$ (средства, выделяемые первому предприятию) записывается сумма $10+36$, так как $g_2(20)=10$, $f_1(60)=36$. Результаты оформим в виде табл. 12.

Таблица 11

Распределение средств при $n=1$

C	X							
	0	20	40	60	80	100	$f_1(C)$	$X_1(C)$
20	–	8 + 0	–	–	–	–	8	20
40	–	–	20 + 0	–	–	–	20	40
60	–	–	–	36 + 0	–	–	36	60
80	–	–	–	–	45 + 0	–	45	80

100	–	–	–	–	–	59 + 0	59	100

Таблица 12

Распределение средств при $n = 2$

C	X							
	0	20	40	60	80	100	$f_2(C)$	$X_2(C)$
20	0 + 8	10 + 0	–	–	–	–	10	20
40	0 + 20	10 + 8	24 + 0	–	–	–	24	40
60	0 + 36	10 + 20	24 + 8	33 + 0	–	–	36	0
80	0 + 45	10 + 36	24 + 20	33 + 8	46 + 0	–	46	20, 80
100	0 + 59	10 + 45	24 + 36	33 + 20	46 + 8	59 + 0	60	40

Если $n = 3$, то $f_3(c) = \max[g_3(x) + f_2(C - X)]$.

Расчет значений $f_3(C)$ представлен в табл. 13.

Таблица 13

Распределение средств при $n = 3$

C	X							
	0	20	40	60	80	100	$f_3(C)$	$X_3(C)$
20	0 + 10	9 + 0	–	–	–	–	10	0
40	0 + 24	9 + 10	23 + 0	–	–	–	24	0
60	0 + 36	9 + 24	23 + 10	34 + 0	–	–	36	0
80	0 + 46	9 + 36	23 + 24	34 + 10	48 + 0	–	48	80
100	0 + 60	9 + 46	23 + 36	34 + 24	48 + 10	62 + 0	62	100

Первое слагаемое выбирается из табл. 10, второе – из табл. 12.

Аналогичным образом находятся значения $f_4(C)$ (табл. 14).

Таблица 14

Распределение средств при $n = 4$

C	X							
	0	20	40	60	80	100	$f_4(C)$	$X_4(C)$
20	0 + 10	14 + 0	–	–	–	–	14	20
40	0 + 24	14 + 10	28 + 0	–	–	–	28	40
60	0 + 36	14 + 24	28 + 10	34 + 0	–	–	38	20,40
80	0 + 48	14 + 36	28 + 24	34 + 10	47 + 0	–	52	40

100	0 + 62	14 + 48	28 + 36	34 + 24	47 + 10	60 + 0	64	40

Безусловная оптимизация.

В табл. 14 $f_4(C) = 64$ – максимальный прирост продукции. Такой прирост можно получить, если в четвертое предприятие вложить $X_4(C) = 40$ тыс. у. е. (оптимальное управление на 4 шаге). Новое состояние системы C (наличный запас еще не вложенных средств): $C' = 100 - 40 = 60$. Значению $C = 60$ соответствует оптимальное значение $X_3(C) = 0$ (табл. 13) – средства, вкладываемые в третье предприятие. Очередное состояние системы $C' = 60 - 0 = 60$. Значению $C = 60$ соответствует оптимальное значение $X_2(C) = 0$ (табл. 12). Состояние системы при этом принимает значение $C' = 60 - 0 = 60$.

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на четырех предприятиях при распределении между ними 100 тыс. у. е. составляет 64 и будет получен, если первому предприятию выделить 60 тыс. у. е., второму – 0 тыс. у. е., третьему – 0 тыс. у. е., четвертому – 40 тыс. у. е., т. е. $X = (60,\ 0,\ 0,\ 40)$.

ЗАДАЧА ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Составить план распределения средств $C = 100$ тыс. у. е. между четырьмя предприятиями, который максимизирует общий прирост выпуска продукции. Значения $g_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях $\left(i = \overline{1,4}\right)$ в зависимости от выделенной суммы X приводятся по каждому варианту задания.

Варианты задания

Вариант 1 **(А)**

C	g (1)	g (2)	g (3)	g (4)
20	10	14	14	19
40	34	27	37	38

Вариант 2 **(Б)**

C	g (1)	g (2)	g (3)	g (4)
20	15	17	14	17
40	31	31	39	39

60	42	40	48	48		60	43	42	48	50
80	66	55	64	67		80	67	59	60	66
100	78	80	79	83		100	77	81	78	82