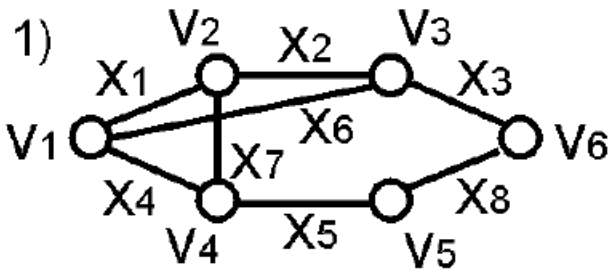
Задание 1.1

1. Охарактеризовать граф.

2. Выписать матрицу смежности графа.

3. Вычислить степени вершин.

Варианты:



Решение

1. Охарактеризовать граф.

Граф - пара множеств V и X - G = (V,X). V - множество вершин, X – множество ребер.

Данный граф неориентированный, так как не указано направление движения по графу.

Вершины графа

$$V = \{V_1; V_2; V_3; V_4; V_5; V_6\}$$

Ребра графа

$$X = \{X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; X_6; X_7; X_8\}$$

Вершина и ребро называются инцидентными, если вершина является для этого ребра концевой точкой.

Ребра графа соединяют следующие вершины:

$$X_1 = \{V_1; V_2\}\ X_2 = \{V_2; V_3\}\ X_3 = \{V_3; V_6\}\ X_4 = \{V_1; V_4\}$$

$$X_5 = \{V_4; V_5\}\ X_6 = \{V_1; V_3\}\ X_7 = \{V_2; V_4\}\ X_8 = \{V_5; V_6\}$$

Петля - ребро вида (v,v).

Петли в данном графе отсутствуют

Кратные рёбра - одинаковые пары в X.

Кратных ребер в данном графе нет

2. Выписать матрицу смежности графа.

Матрица смежности графа: A = [aij], V = {v_1, ...,v_n}, X= {x_1, ..., x_m.}

Если существует ребро, связывающее две вершины, то ставим 1, если такого ребра нет, ставим 0

	V1	V2	V3	V4	V5	V6
V1	0	1	1	1	0	0
V2	1	0	1	1	0	0
V3	1	1	0	0	0	1
V4	1	1	0	0	1	0
V5	0	0	0	1	0	1
V6	0	0	1	0	1	0

3. Вычислить степени вершин.

Степенью вершины V графа G называется число δ (v) рёбер графа, инцидентных вершине v.

Найдем степени вершин в данном графе

$\delta(V_1) = 3 \quad \delta(V_2) = 3 \quad \delta(V_3) = 3 \quad \delta(V_4) = 3 \quad \delta(V_5) = 2 \quad \delta(V_6) = 2$

Если δ (v) = l, тогда v - висячая вершина.

В данном графе висячих вершин нет.

Если δ (v) = 0, тогда v -изолированная вершина.

В данном графе изолированных вершин нет.

- Маршрутом для графа G (путем для орграфа D) называется последовательность $v_1x_1v_2x_2v_3. \; . \; .x_kv_{k+1}$.
- Цепь - незамкнутый маршрут (путь), в котором все рёбра (дуги) попарно различны.

$v_1x_1v_2x_2v_3\ x_6v_1\ x_4v_4\ x_5v_5\ x_8v_6$

- Простая цепь - цепь, в которой все вершины попарно различны

$v_1x_4v_4x_5v_5\ x_7v_2\ x_2v_3\ x_3v_6$

- Цикл (контур) - замкнутый маршрут (путь), в котором все рёбра (дуги) попарно различны.

$v_1x_4v_4x_7v_2\ x_2v_3\ x_6v_1$

- Простой цикл (контур) - цикл (контур), в котором все вершины попарно различны.

$v_1x_4v_4\ x_7v_2\ x_1v_1$

Задание 1.2

1. По матрице инцидентности нарисовать граф.
2. Охарактеризовать граф.
3. Назвать специальные вершины графа.
4. Вычислить полустепени вершин.
5. Выписать цикл, цепь, простой цикл, простую цепь.

Варианты:

1)

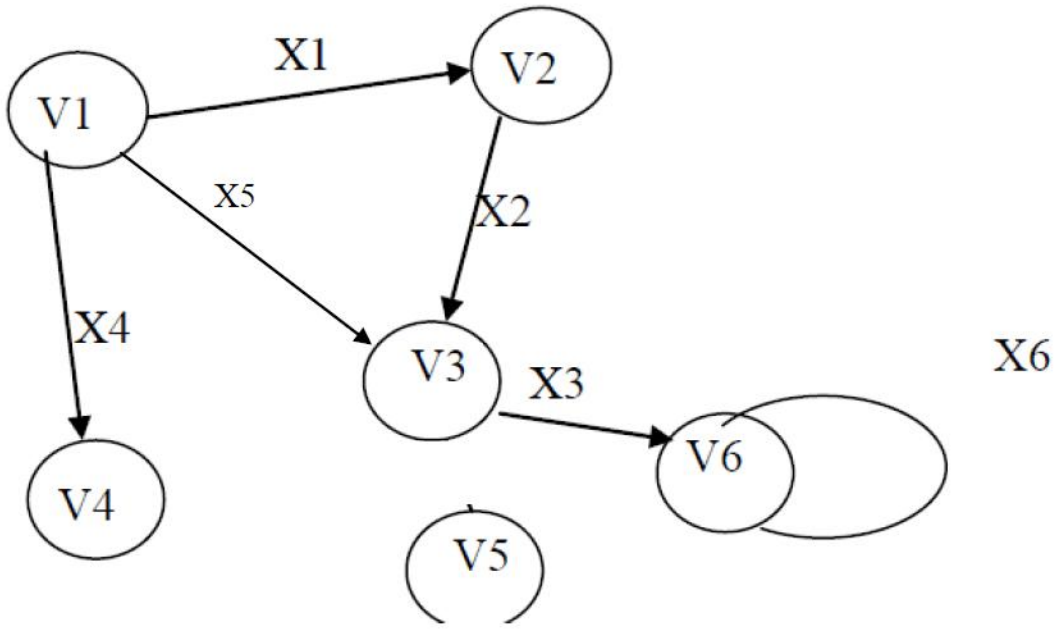
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	0	-1	-1	0
V_2	1	-1	0	0	0	0
V_3	0	1	-1	0	1	1
V_4	0	0	0	1	0	0
V_5	0	0	0	0	0	0
V_6	0	0	1	0	0	0

Решение

1. По матрице инцидентности нарисовать граф.

Вершина и ребро называются инцидентными, если вершина является для этого ребра концевой точкой. -1 ставим , если вершина соответствует началу дуги , 1 ставим, если вершина соответствует концу дуги, 0 ставим, если вершина не инцидентна дуге.

Граф имеет вид



2. Охарактеризовать граф.

Данный граф ориентированный, так как указано направление движения по графу.

Вершины графа

$V = \{V_1; V_2; V_3; V_4; V_5; V_6\}$

Ребра графа

$X = \{X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; X_6\}$

Вершина и ребро называются инцидентными, если вершина является для этого ребра концевой точкой.

1)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	0	-1	-1	0
V_2	1	-1	0	0	0	0
V_3	0	1	-1	0	1	1
V_4	0	0	0	1	0	0
V_5	0	0	0	0	0	0
V_6	0	0	1	0	0	0

Ребра графа соединяют следующие вершины:

$X_1 = \{V_1; V_2\}$ $X_2 = \{V_2; V_3\}$ $X_3 = \{V_3; V_6\}$ $X_4 = \{V_1; V_4\}$

$X_5 = \{V_1; V_3\}$ $X_6 = \{V_3; V_3\}$

3. Назвать специальные вершины графа.

Специальные вершины и ребра графа

V4-висячая вершина

V5-изолированная вершина

X6-дуга

4. Вычислить полустепени вершин.

Найдем степени и полустепени вершин в данном графе

Полустепенью исхода (захода) вершины v орграфа D называется δ^-(v) - число дуг, исходящих из v (δ^+(v) - число дуг, заходящих в v).

$\delta(V_1) = 3 \quad \delta^-(V_1) = 3 \quad \delta^+(V_1) = 0$

$\delta(V_2) = 2 \quad \delta^-(V_2) = 1 \quad \delta^+(V_2) = 2$

$\delta(V_3) = 5 \quad \delta^-(V_3) = 3 \quad \delta^+(V_3) = 2$

$\delta(V_4) = 1 \quad \delta^-(V_4) = 0 \quad \delta^+(V_4) = 1$

$\delta(V_5) = 0 \quad \delta^-(V_5) = 0 \quad \delta^+(V_5) = 0$

$\delta(V_6) = 1 \quad \delta^-(V_6) = 0 \quad \delta^+(V_6) = 1$

5. Выписать цикл, цепь, простой цикл, простую цепь.

Цикл (контур) - замкнутый маршрут (путь), в котором все рёбра (дуги) попарно различны.

Сложного цикла нет

Простой цикл (контур) - цикл (контур), в котором все вершины попарно различны.

$V_6x_6v_6$

Цепь - незамкнутый маршрут (путь), в котором все рёбра (дуги) попарно различны.

$v_1x_5\ v_3x_3v_6$

Простая цепь - цепь, в которой все вершины попарно различны

$v_1x_1v_2x_2\ v_3x_3v_6$

Задание 1.3

1. Нагрузить граф задания 1.1 согласно матрицы длин дуг и нарисовать.

2. По алгоритму окрашивания найти кратчайший путь между вершинами V_1 и V_6.

3. Построить покрывающее дерево с корнем в вершине V_1.

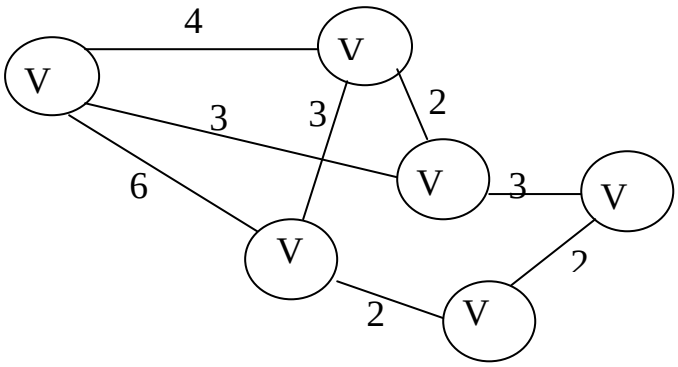
Варианты:

1)

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	∞	4	6	3	∞	∞
V_2	4	∞	3	2	∞	∞
V_3	6	3	∞	∞	∞	2
V_4	3	2	∞	∞	3	∞
V_5	∞	∞	∞	3	∞	2
V_6	∞	∞	2	∞	0	∞

Решение

1. Нагрузить граф задания 1.1 согласно матрицы длин дуг и нарисовать.



2. По алгоритму окрашивания найти кратчайший путь между вершинами V_1 и V_6.

Путь называется минимальным (кратчайшим) в нагруженном графе или нагруженном орграфе, если он имеет минимальную длину пути.

Алгоритм поиска кратчайшего пути (алгоритм окрашивания)

В ходе выполнения алгоритма окрашивают вершины и дуги графа и вычисляют величины *d(x)*, равные кратчайшему пути из вершины s в вершину *x,* включающему только окрашенные вершины.

Полагают *d (s)* = 0, *d (x)* = □□для любого *x* ≠ s. Окрашивают вершину *s* и полагают *y* = *s*.

2. Для каждой неокрашенной вершины *x* пересчитывают величину *d(x)* по формуле *d(x)* = min {*d(x), d(y) + l(y,x)}.*

Если *d (x)* = □ для всех вершин, то вычисления заканчивают. В графе G отсутствуют дуги из вершины *s* в неокрашенные вершины.

В противном случае окрасить вершину *x,* для которой величина *d(x)* минимальна, и дугу, ведущую в вершину *x*. Полагают *y* = *x*.

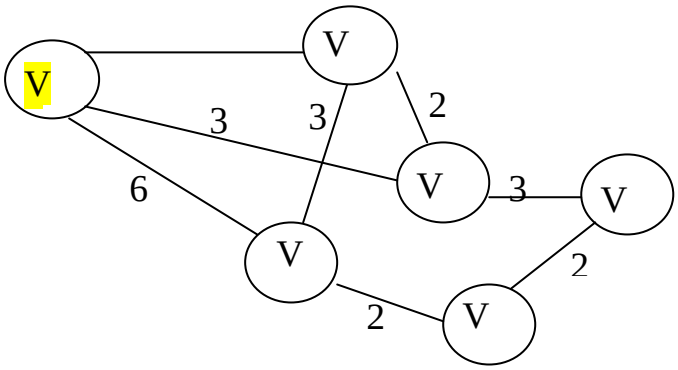
3. Если *y* = *t,* то кратчайший путь найден. В противном случае переходят к шагу 2.

Процедуру окрашивания нужно продолжить до тех пор, пока все вершины графа не будут окрашены. При этом для графа G будет построено покрывающее дерево (если такое дерево существует) с корнем в вершине *s* и включающем все вершины и все окрашенные дуги.

d(x) = min {*d(x), d(y) + l(y,x)}.*

а) Окрашиваем вершину и присваиваем значение d(x)=0

$d(V_1) = 0 \qquad y = V_1$



2) Пересчитываем значения d для всех оставшихся неокрашенных вершин по формуле

$d(x) = \min \{d(x), d(y) + l(y,x)\}$.

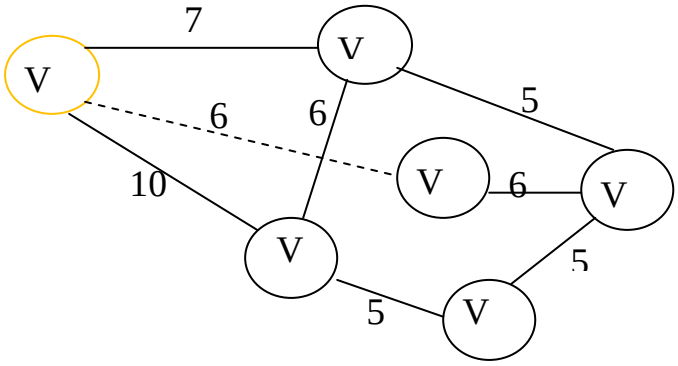
$d(V_2) = \min(0+7) = 7 \quad d(V_3) = 10 \quad d(V_4) = 6$

$y = V_4$

Среди неокрашенных вершин минимальное значение в вершине V_4

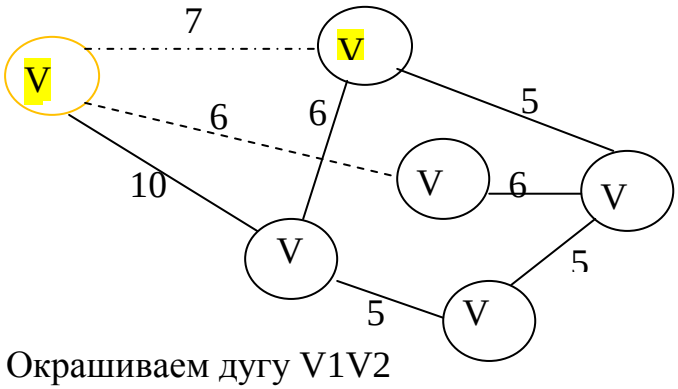
Окрашиваем дугу V1V4

$d(V_5) = d(V_4) + l(V_4;V_5) = 6+6 = 12$



г)Пересчитываем значение d(x) для всех оставшихся вершин

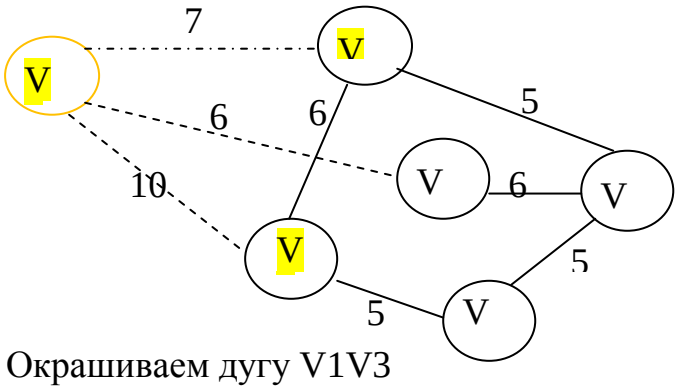
Среди неокрашенных вершин минимальное значение в вершине V_2



Окрашиваем дугу V1V2

$d(V_3) = 10$

Среди неокрашенных вершин минимальное значение в вершине V_3

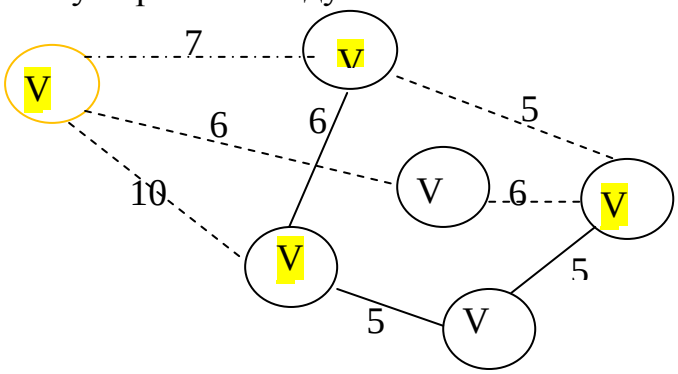


Окрашиваем дугу V1V3

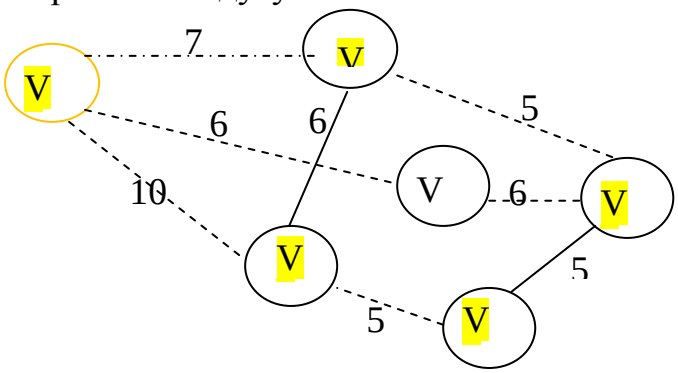
Среди неокрашенных вершин минимальное значение в вершине V_5

$$d(V_5) = d(V_4) + l(V_4;V_5) = 6 + 6 = 12$$

При этом в вершину V5 существуют два пути минимальной длины 12, поэтому окрашиваем дуги V2V5 и V4V5 и вершину V5



Окрашиваем дугу V3V6



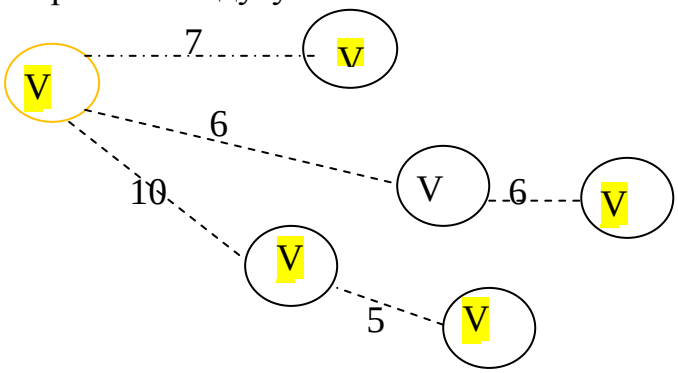
3. Построить покрывающее дерево с корнем в вершине V_1.

Деревом графа называется его связный подграф без циклов.

Покрывающее дерево (остов графа) – дерево, содержащее все вершины графа.

Дерево графа

Окрашиваем дугу V3V6



$$d(V_6) = \min(d(V_5) + l(V_5;V_6); d(V_3) + l(V_3;V_6)) = \min(12+5;10+5) = \min(17;15) = 15$$

Определим радиус и диаметр графа

$$R_1 = \max(7;10;6) = 10$$

$$R_2 = \max(7;6;5) = 7$$

$$R_3 = \max(10;6;5) = 10$$

$$R_4 = \max(6;6) = 6$$

$$R_5 = \max(5;6;5) = 6$$

$$R_6 = \max(5;5) = 5$$

$$R_{графа} = \min(10;7;10;6;6;5) = 5$$

$$D = \max\{R_i\} = \max(10;7;10;6;6;5) = 10$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1.1

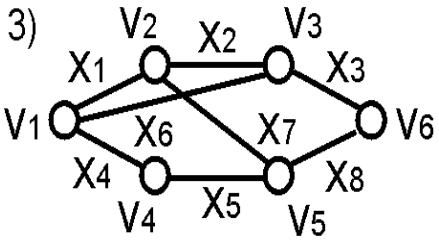
1. Охарактеризовать граф.

2. Выписать матрицу смежности графа.

3. Вычислить степени вершин.

Варианты:

3)



Задание 1.2

1. По матрице инцидентности нарисовать граф.

2. Охарактеризовать граф.

3. Назвать специальные вершины графа.

4. Вычислить полустепени вершин.

5. Выписать цикл, цепь, простой цикл, простую цепь.

Варианты:

3)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
V_1	-1	0	-1	1	0	0
V_2	0	0	0	0	0	0
V_3	1	-1	0	0	1	0
V_4	0	0	1	0	-1	0
V_5	0	0	0	0	0	-1
V_6	0	1	0	0	0	1

Задание 1.3

1. Нагрузить граф задания 1.1 согласно матрицы длин дуг и нарисовать.

2. По алгоритму окрашивания найти кратчайший путь между вершинами V_1 и V_6.

3. Построить покрывающее дерево с корнем в вершине V_1.

Варианты:

3)

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	∞	7	10	6	∞	∞
V_2	7	∞	6	∞	5	∞
V_3	10	6	∞	∞	∞	5
V_4	6	∞	∞	∞	6	∞
V_5	∞	5	∞	6	∞	5
V_6	∞	∞	5	∞	5	∞