Тема 5. Квадратичные формы

Квадратичной формой f от n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется сумма, каждый член которой является или квадратом одного из этих неизвестных, или произведением двух разных неизвестных. Квадратичная форма бывает двух видов: действительной и комплексной, в зависимости от того, являются ли ее коэффициенты действительными или комплексными числами.

Обозначая коэффициент при x_i^2 через a_{ii}, а при произведении $x_i x_j = x_j x_i (i \neq j)$, через $a_{ij} + a_{ji} (a_{ij} = a_{ji})$, квадратичную форму f можно представить в виде:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + ... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j .$$

Из коэффициентов a_{ij} можно составить квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ порядка n; она называется матрицей квадратичной формы f, а ее ранг r - рангом квадратичной формы. Если, в частности, $r = n$, где $\det A \neq 0$, то есть матрица - невырожденная, то и квадратичная форма f называется невырожденной. Для любой симметрической матрицы A n - го порядка можно указать в полне определенную квадратичную форму:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (1.1)$$

от n - неизвестных, имеющую элементы матрицы A своими коэффициентами.

Обозначим теперь через X столбец, составленный из неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

X является матрицей, имеющей n строк и один столбец. Транспонируя эту матрицу, получим матрицу: $X' = (x_1, x_2, ..., x_n)$, составленную из одной строки.

Квадратичная форма (1.1) с матрицей $A=(a_{ij})$ может быть записана теперь в виде произведения: $f = X^{/}AX$.

Квадратичная форма имеет вид:

$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ так как $a_{12} = a_{21}$.

Если линейное преобразование A в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ имеет матрицу: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, то характеристическими числами линейного преобразования A служат действительные корни λ_1 и λ_2 уравнение второй степени, которое можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для нахождения собственных значений λ_1 и λ_2, решается полученное уравнение: $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2 = 0$, где λ_1 и λ_2 могут быть равными[1].

Если числа λ_1 и λ_2 одного знака, то квадратичная форма принадлежит к эллиптическому типу; если λ_1 и λ_2 разных знаков, то гиперболическому типу; если же одно из чисел λ_1 или λ_2 равно нулю, то параболическому типу[4].

Для получения собственных векторов получаются две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0 \\ a_{12}m_1 + (a_{22}-\lambda_1)n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_2)m_2 + a_{12}n_2 = 0 \\ a_{12}m_2 + (a_{22}-\lambda_2)n_2 = 0 \end{cases},$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 - координаты собственных векторов.

Затем можно найти координаты векторов нового базиса $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, для этого необходимо найти длины собственных векторов по формуле $|\vec{u}_i| = \sqrt{m_i^2 + n_i^2}$, следовательно $\vec{e}_1 = \left(\frac{m_1}{|\vec{u}_1|}; \frac{n_1}{|\vec{u}_1|} \right)$; $\vec{e}_2 = \left(\frac{m_2}{|\vec{u}_2|}; \frac{n_2}{|\vec{u}_2|} \right)$, где u_1, u_2 - собственные векторы. Следовательно, получается уравнение второго порядка в каноническом виде: $\lambda_1 x_1^{/2} + \lambda_2 x_2^{/2} = c, \Rightarrow \frac{\lambda_1}{c^2} + \frac{\lambda_2}{c^2} = 1.$

А также необходимо отметить следующие важные теоремы:

Пример

Написать матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Решение. Здесь

$$a_{11} = 2, a_{22} = -5, a_{33} = 8, a_{12} = a_{21} = \frac{4}{2} = 2, a_{13} = a_{31} = \frac{-2}{2} = -1, a_{23} = a_{32} = \frac{6}{2} = 3$$

Следовательно: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

Пример

Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$.

Решение. Коэффициенты: $a_{11} = 27, a_{12} = -5, a_{22} = 3$.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$;

$(27-\lambda)(3-\lambda)-25=0$

$\lambda^2-30\lambda+56=0$

$\lambda_1=2;\lambda_2=28;$

$f(x_1^{/},x_2^{/})=2x_1^{/2}+28x_2^{/2}$

Пример

Является ли квадратичная форма положительно определенной $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ [4]?

Решение. $a_{11}=5,a_{22}=1,a_{33}=5,a_{12}=a_{21}=2,a_{13}=a_{31}=-4,a_{23}=a_{32}=-2$.

$5,\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}=1$. Квадратичная форма является положительно определенной, так как все ее главные миноры положительны.

Пример

Является ли квадратичная форма положительно определенной $f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$?

Решение. $a_{11}=3,a_{22}=1,a_{33}=5,a_{12}=a_{21}=2,a_{13}=a_{31}=-4,a_{23}=a_{32}=-2$.

$\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}=-1$. Квадратичная форма не является положительно определенной, так как ее главный минор отрицателен.

Задание № 18. Является ли квадратичная форма положительно определенной $f=x_1^2+8x_2^2-6x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-10x_2x_3$ [4]?

Решение. $a_{11}=1,a_{22}=8,a_{33}=-6,a_{12}=a_{21}=2,a_{13}=a_{31}=4,a_{23}=a_{32}=-5$.

$1,\begin{vmatrix}1&2\\2&8\end{vmatrix}=4,\begin{vmatrix}1&2&4\\2&8&-5\\4&-5&-6\end{vmatrix}=-257$. Квадратичная форма является не положительно определенной, так как не все ее главные миноры положительны.

Задача № 1. Написать матрицу квадратичной формы $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-5x_2^2+8x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$.

Решение. Здесь

$$a_{11}=2,a_{22}=-5,a_{33}=8,a_{12}=a_{21}=\frac{4}{2}=2,a_{13}=a_{31}=\frac{-2}{2}=-1,a_{23}=a_{32}=\frac{6}{2}=3$$

Следовательно: $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-5&3\\-1&3&8\end{pmatrix}$

Задача № 2. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1,x_2)=27x_1^2-10x_1x_2+3x_2^2$.

Решение. Коэффициенты: $a_{11}=27, a_{12}=-5, a_{22}=3$.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$;

$(27-\lambda)(3-\lambda)-25=0$

$\lambda^2-30\lambda+56=0$

$\lambda_1=2; \lambda_2=28;$

$f(x_1^{/}, x_2^{/})=2x_1^{/2}+28x_2^{/2}$

Задача № 3. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $17x^2+12xy+8y^2-20=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=17, a_{12}=6, a_{22}=8.$ $A=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0$

$(17-\lambda)(8-\lambda)-36=0$

$\lambda^2-25\lambda+100=0$

$\lambda_1=5; \lambda_2=20$

Итого: $5(x^{/})^2+20(y^{/})^2-20=0;$

$\frac{x^{/2}}{4}+\frac{y^{/2}}{1}=1$- каноническое уравнение эллипса.

Задача № 4. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $2x^2+8xy+8y^2-20=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=2, a_{12}=4, a_{22}=8.$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0$

$(2-\lambda)(8-\lambda)-16=0$

$\lambda^2-10\lambda=0$

$\lambda_1=0;\lambda_2=10$

Итого: $10(y')^2-20=0;$

$\frac{y'^2}{2}=1$ - каноническое уравнение параболы.

Задача № 5. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2-21=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=6, a_{12}=\sqrt{5}, a_{22}=2.$ $A=\begin{pmatrix}6 & \sqrt{5}\\ \sqrt{5} & 2\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}6-\lambda & \sqrt{5}\\ \sqrt{5} & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(6-\lambda)(2-\lambda)-5=0$

$\lambda^2-8\lambda+7=0$

$\lambda_1=\frac{7}{6};\lambda_2=\frac{1}{6}$

Итого: $\frac{7}{6}(x')^2+\frac{1}{6}(y')^2-21=0;$

$\frac{x'^2}{18}+\frac{y'^2}{126}=1$ - каноническое уравнение эллипса.

Задача № 6. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $22x^2+2\sqrt{69}xy+2y^2-4=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=22, a_{12}=\sqrt{69}, a_{22}=2.$ $A=\begin{pmatrix}22 & \sqrt{69}\\ \sqrt{69} & 2\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}22-\lambda & \sqrt{69}\\ \sqrt{69} & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(22-\lambda)(2-\lambda)-69=0$

$\lambda^2-24\lambda-25=0$

$\lambda_1=\frac{49}{2};\lambda_2=-\frac{1}{2}$

Итого: $\frac{49}{2}(x')^2-\frac{1}{2}(y')^2-4=0;$

$\frac{49x'^2}{8}-\frac{y'^2}{8}=1$- каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 7. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $2x^2+6xy+2y^2+5=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=2,a_{12}=3,a_{22}=2.$ $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(2-\lambda)(2-\lambda)-9=0$

$\lambda^2-4\lambda-5=0$

$\lambda_1=-1;\lambda_2=5$

Итого: $-(x')^2+5(y')^2+5=0;$

$\frac{x'^2}{5}-\frac{y'^2}{1}=1$- каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 8. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $3x^2+16xy+15y^2+76=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=3,a_{12}=8,a_{22}=15.$ $A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix}.$

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}3-\lambda & 8\\ 8 & 15-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(3-\lambda)(15-\lambda)-64=0$

$\lambda^2-18\lambda-19=0$

$\lambda_1=-1;\lambda_2=19$

Итого: $-(x')^2+19(y')^2+76=0;$

$\frac{x'^2}{76}-\frac{y'^2}{4}=1$- каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 9. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $5x^2-12xy-14=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=5,a_{12}=-6,a_{22}=0.$ $A=\begin{pmatrix}5 & -6\\ -6 & 0\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}5-\lambda & -6\\ -6 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0$

$-\lambda(5-\lambda)-36=0$

$\lambda^2-5\lambda-36=0$

$\lambda_1=9;\lambda_2=-4$

Итого: $9(x')^2-4(y')^2-14=0;$

$\frac{9x'^2}{14}-\frac{2y'^2}{7}=1$- каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 10. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $x^2+24xy+8y^2-136=0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11}=1,a_{12}=12,a_{22}=8.$ $A=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 12 & 8\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}1-\lambda & 12\\ 12 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(1-\lambda)(8-\lambda)-144=0$

$\lambda^2-9\lambda-136=0$

$\lambda_1=17;\lambda_2=-8$

Итого: $17(x')^2 - 8(y')^2 - 136 = 0;$

$\frac{x'^2}{8} - \frac{y'^2}{17} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 11. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $4xy + 3y^2 + 16 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{22} = 3.$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$-\lambda(3-\lambda) - 4 = 0$
$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$
$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 4$

Итого: $-(x')^2 + 4(y')^2 + 16 = 0;$

$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 12. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 8 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 3, a_{12} = 5, a_{22} = 3.$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(3-\lambda)(3-\lambda) - 25 = 0$
$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$
$\lambda_1 = 8; \lambda_2 = -2$

Итого: $8(x')^2 - 2(y')^2 - 8 = 0;$

$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} = 1$- каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 13. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 - 44 = 0$.

Решение. Коэффициенты $a_{11} = 5, a_{12} = 2\sqrt{6}, a_{22} = 7.$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(5-\lambda)(7-\lambda) - 24 = 0$
$\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0$
$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 11$

Итого: $(x')^2 + 11(y')^2 - 44 = 0;$

$\frac{x'^2}{44} + \frac{y'^2}{4} = 1$- каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 14. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка: $4xy + 3y^2 + 16$.

Решение. Коэффициенты: $a_{11} = 0, a_{12} = a_{21} = 2, a_{22}3$.

Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$.

Итого: $-x^2 + 4y^2 + 16 = 0$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$- каноническое уравнение гиперболы.

Задача № 15. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка. Схематично изобразить график $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-6=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение квадратичной формы. Коэффициенты $a_{11}=5, a_{12}=\sqrt{3}, a_{22}=3$.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-8\lambda+12$$

$\lambda^2-8\lambda+12=0$
$\lambda_1=2; \lambda_2=6$

Найдем координаты собственных векторов:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_1)m_1+a_{12}n_1=0\\ a_{12}m_1+(a_{22}-\lambda_1)n_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3m_1+\sqrt{3}n_1=0\\ \sqrt{3}m_1+n_1=0\end{cases}$$,полагая что $m_1=1$, тогда $n_1=-\sqrt{3}$;

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_2)m_2+a_{12}n_2=0\\ a_{12}m_2+(a_{22}-\lambda_2)n_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-m_2+\sqrt{3}n_2=0\\ \sqrt{3}m_2-3n_2=0\end{cases}$$,полагая что $m_2=1$, тогда $n_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Собственные векторы: $\vec{u}_1(1;-\sqrt{3}), \vec{u}_2(1;\frac{1}{\sqrt{3}})$

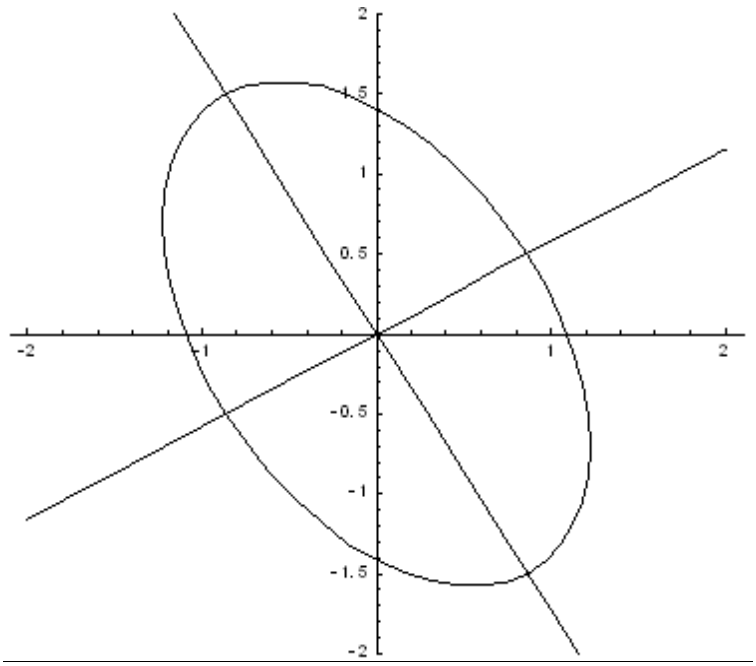
$\left|\vec{u_1}\right|=\sqrt{1+3}=2; \left|\vec{u_2}\right|=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Находим координаты единичных векторов нового базиса

$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \vec{e}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Имеем следующее уравнение линии в новой системе координат: $2(x')^2+6(y')^2=6$.

Каноническое уравнение линии в новой системе координат будет иметь вид: $\frac{(x')^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{(y')^2}{1^2}=1$.



Задание № 16. Является ли квадратичная форма положительно определенной $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ [4]?

Решение. $a_{11}=5, a_{22}=1, a_{33}=5, a_{12}=a_{21}=2, a_{13}=a_{31}=-4, a_{23}=a_{32}=-2$.

$5, \begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1, \begin{vmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1$. Квадратичная форма является положительно определенной, так как все ее главные миноры положительны.

Задание № 17. Является ли квадратичная форма положительно определенной $f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$?

Решение. $a_{11}=3, a_{22}=1, a_{33}=5, a_{12}=a_{21}=2, a_{13}=a_{31}=-4, a_{23}=a_{32}=-2$.

$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1$. Квадратичная форма не является положительно определенной, так как ее главный минор отрицателен.

Задание № 18. Является ли квадратичная форма положительно определенной $f = x_1^2 + 8x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 10x_2x_3$ [4]?

Решение. $a_{11} = 1, a_{22} = 8, a_{33} = -6, a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = 4, a_{23} = a_{32} = -5$.

$1, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = -257$. Квадратичная форма является не положительно определенной, так как не все ее главные миноры положительны.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача № 1. Написать матрицу квадратичной формы: $f = x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$.

Задача № 2. Привести к каноническому виду квадратичную форму: $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$.

Задача № 3. Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка: $2x^2 - 6xy + 2y^2 - 1 = 0$.

Задача № 4. Является ли квадратичная форма положительно определенной $f = 2x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$?