Применение матриц в экономике

Задача 1. В цехе предприятия изготовляют две модели женской одежды. На изготовление первой модели тратят 2 м ткани, на изготовление второй – 3 м. При этом расходы рабочего времени на производство этих моделей составляют соответственно 4 и 5 часов. Известно, что недельный запас ткани – 100 м, а рабочее время ограниченно 190 часов.

Составить такой план недельного изготовления этих моделей одежды, при которой полностью используют ресурсы (ткань и рабочее время).

	1-я модель (x_1)	2-я модель (x_2)	Общ расходы (ресурсы)
Расходы материала на изготовление моделей (м)	2 м	3 м	100 м
Расходы рабочего времени (час)	4 ч	5 ч	190 ч

Обозначим через x_1 и x_2 количество единиц недельного выпуска первой и второй моделей соответственно. По условию задачи составим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 100 \\ 4x_1 + 5x_2 = 190 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 190 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Решение. Какие методы известны из школьного курса? (Метод подстановки, метод сложения, графический метод). Какой метод изучили в колледже?

Решим эту систему матричным способом. Запишем ее в матричном виде: $AX = B,\quad где\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 190 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad X = A^{-1} \cdot B$

Для матрицы A найдем обратную матрицу A^{-1}. Поскольку

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,\quad A_{11} = 5,\quad A_{12} = -4,\quad A_{21} = -3,\quad A_{22} = 2$, тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Получим решение системы

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 190 \end{pmatrix} =$$

Решение. Какие методы известны из школьного курса? (Метод подстановки, метод сложения, графический метод). Какой метод изучили в колледже?

Решим эту систему матричным способом. Запишем ее в матричном виде: $AX = B,\quad где\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 190 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad X = A^{-1} \cdot B$

Для матрицы A найдем обратную матрицу A^{-1}. Поскольку

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,\quad A_{11} = 5,\quad A_{12} = -4,\quad A_{21} = -3,\quad A_{22} = 2$, тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Получим решение системы

$$X = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 190 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 500 - 570 \\ -400 + 380 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -70 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 35,\quad x_2 = 10.$$

Следовательно, для полного использования ресурсов еженедельно нужно изготовлять 35 единиц первой и 10 единиц второй моделей одежды.

Вывод. Заметим, что при решении экономических задач удобно использовать матричный способ. Почему?

Вычислив один раз обратную матрицу и **изменяя ограничение на ресурсы** (ежедневные, еженедельные, ежемесячные, ежегодные и тому подобное), **будем получать** каждый раз из равенства $X = A^{-1} \cdot B$ **соответствующий план выпуска продукции.**

Заметим, что применение матриц в этой задаче привело к наглядности, упрощению и компактности вычислений.

Задача № 2. Рассмотрим упрощенную модель финансовой математики, которую условно называют «портфельными инвестициями».

В реальной жизни одним из источников финансирования являются международные инвестиции. Страна может получать и давать международные займы, принимать и инвестировать за границу капитал. Продажа активов в любой фирме (права собственности, ценные бумаги, золото и т.п.) означает прилив капитала в страну. Среди инвестиций есть портфельные – вложение капитала в иностранные ценные бумаги, которые не дают инвестору права реального контроля над объектом инвестирования. Такие инвестиции основываются, как правило, на частном капитале.

Допустим, что инвесторы могут вкладывать деньги в активы, в облигации (которые дают точную финансовую прибыль), акции (дают прибыль, которая может меняться), в землю. Пусть после выборов в данной стране к власти может прийти одна из двух политических партий X_1 или X_2. Понятно, что доход от капиталовложения зависит от государственного правительства страны.

Итак, правительство X_1 партии может увеличивать цену на землю и уменьшать цену акций, а правительство партии X_2 - наоборот. Например, имеем таблицу:

Активы	Партия X_1	Партия X_2	Вложения инвесторов
Земля	1,25	0,95	$ 50 000
Облигации	1,05	1,05	$ 100 000
Акции	0,90	1,15	$ 40 000

Данную таблицу можно записать как матрицу $R=(r_{ij}),\quad i=1,2,3;\quad j=1,2$ размера 3×2, что означает **доход от каждого актива:**

$$R=\begin{pmatrix}1,25 & 0,95\\ 1,05 & 1,05\\ 0,90 & 1,15\end{pmatrix}$$

Пусть инвесторы решили вложить $ 50 000 в землю, $ 100 000 – в облигации и $ 40 000 – в акции. Тогда получим матрицу – строку P размера 1×3: $P=(50\,000 \quad 100\,000 \quad 40\,000)$, которая **характеризует портфельные инвестиции.**

Произведение матриц PR будет матрица размера 1×2, которая характеризует возможные стоимости портфельных инвестиций, если на выборах победит партия X_1 или X_2

$$PQ=(50\,000 \quad 100\,000 \quad 40\,000)\cdot\begin{pmatrix}1,25 & 0,95\\ 1,05 & 1,05\\ 0,90 & 1,15\end{pmatrix}=$$

$$=(50\,000\cdot 1,25+100\,000\cdot 1,05+40\,000\cdot 0,90 \quad 50\,000\cdot 0,95+100\,000\cdot 1,05+40\,000\cdot 1,15)=$$

$$=(203\,500 \quad 198\,500)$$

Можно сделать вывод, если на выборах победит партия X_1 , то стоимость портфеля составит $ 203 500, а если партия X_2 -то $ 198 500. Ваш выбор? Какой партии дадите предпочтение?

.