27-04-2020 Балансовые модели

Тема: Модель Леонтьева

ЗАДАНИЕ.

- *построить таблицу межотраслевого баланса в стоимостном выражении;*
- *найти изменения валовых выпусков при увеличении конечного выпуска первой отрасли на 20%, третьей на 10% и неизменном конечном выпуске второй отрасли;*
- *как следует изменить цены на продукцию отраслей, если поставлены задачи увеличения добавленной стоимости в первой отрасли на 20%, а в третьей на 10%.*

Дана матрица A коэффициентов прямых материальных затрат с компонентами (a_{ij}) и вектор конечного выпуска y с компонентами (y_i).

Номер варианта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	y_1	y_2	y_3
1	*0,3*	*0,4*	*0,1*	*0,2*	*0,2*	*0,1*	*0,3*	*0,2*	*0,1*	*100*	*150*	*190*

РЕШЕНИЕ.

$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов прямых материальных затрат;

$Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 190 \end{pmatrix}$ – вектор конечного продукта.

Коэффициенты прямых материальных затрат показывают объем материальных ресурсов *i*-го вида, необходимый для производства единицы валового продукта *j*-го вида. Матрица *A* продуктивна, т.к. для всех столбцов сумма элементов меньше единицы.

Уравнение межотраслевого баланса в матричной форме:

$X = AX + Y$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – вектор валового выпуска.

Для того, чтобы найти объемы валовой продукции каждой отрасли, перепишем уравнение межотраслевого баланса в следующем виде:

$X - AX = Y$ или $(E - A)X = Y$. Откуда $X = (E - A)^{-1} Y$.

Находим матрицу $C = E - A$ и обратную к ней матрицу полных затрат $B = (E - A)^{-1}$.

$$C = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,8 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы

$$\det C = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,8 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,001 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -2 & 8 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 0,001 \cdot \left\{ 7 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= 0,001 \cdot \{ 7(72 - 2) + 4(-18 - 3) - (4 + 24) \} = 0,001 \cdot (490 - 84 - 28) = 0,378.$$

Алгебраические дополнения элементов матрицы $C = E - A$:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,72 - 0,02 = 0,70; \quad c_{12} = -\begin{vmatrix} -0,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 \end{vmatrix} = -(-0,18 - 0,03) = 0,21;$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} -0,2 & 0,8 \\ -0,3 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,04 + 0,24 = 0,28; \quad c_{21} = -\begin{vmatrix} -0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = -(-0,36 - 0,02) = 0,38;$$

$$c_{22} = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,63 - 0,03 = 0,60; \quad c_{23} = -\begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,3 & -0,2 \end{vmatrix} = -(-0,14 - 0,12) = 0,26;$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} -0,4 & -0,1 \\ 0,8 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,04 + 0,08 = 0,12; \quad c_{32} = -\begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,1 \end{vmatrix} = -(-0,07 - 0,02) = 0,09;$$

$$c_{33} = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,2 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,56 - 0,08 = 0,48.$$

Обратная матрица, представляющая собой таблицу коэффициентов полных затрат, будет следующей:

$$B=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,378}\begin{pmatrix}0,70 & 0,38 & 0,12\\ 0,21 & 0,60 & 0,09\\ 0,28 & 0,26 & 0,48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,85 & 1,01 & 0,32\\ 0,56 & 1,59 & 0,24\\ 0,74 & 0,69 & 1,27\end{pmatrix}$$

Находим объемы валовой продукции каждой отрасли:

$$X=(E-A)^{-1}Y=\begin{pmatrix}1,85 & 1,01 & 0,32\\ 0,56 & 1,59 & 0,24\\ 0,74 & 0,69 & 1,27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 150\\ 190\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}396,30\\ 338,89\\ 418,52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Межотраслевые поставки найдём по формуле $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$ ($i,j=1,2,3$).

Таблица межотраслевого баланса в стоимостном выражении

Отрасли-производители	Отрасли - потребители			Конечный продукт Y	Валовый продукт X
	1	2	3		
1	118,89	135,56	41,85	100	396,30
2	79,26	67,78	41,85	150	338,89
3	118,89	67,78	41,85	190	418,52
Чистая продукция (добавленная стоимость), Z	79,26	67,78	292,96		
Валовый продукт X	396,30	338,89	418,52		

Находим изменения валовых выпусков при увеличении конечного выпуска первой отрасли на 20%, третьей на 10% и неизменном конечном выпуске второй отрасли.

По условию вектор конечного потребления теперь будет следующим:

$$Y=\begin{pmatrix}100\cdot 1,2\\ 150\\ 190\cdot 1,1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120\\ 150\\ 209\end{pmatrix}$$

Валовый выпуск $X=B\cdot Y=\begin{pmatrix}1,85 & 1,01 & 0,32\\ 0,56 & 1,59 & 0,24\\ 0,74 & 0,69 & 1,27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}120\\ 150\\ 209\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}439,37\\ 354,52\\ 457,46\end{pmatrix}.$

Следовательно, валовый выпуск продукции в 1-ой отрасли надо увеличить с 396,30 до 439,37, т.е. на 10,87%; во 2-ой отрасли – увеличить с 338,89 до 354,52, т.е. на 4,61%; в 3-ей отрасли – увеличить с 418,52 до 457,46, т.е. на 9,30%.

Анализируем изменение цены на продукцию отраслей, если поставлены задачи увеличения добавленной стоимости в первой отрасли на 20%, а в третьей на 10%.

Модель равновесных цен $Đ = B^{\dot{O}} \cdot V$, где

$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ – вектор цен;

$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ – доля добавленной стоимости, $v_j = \frac{z_j}{x_j}$;

$B^T = \begin{pmatrix} 1,85 & 0,56 & 0,74 \\ 1,01 & 1,59 & 0,69 \\ 0,32 & 0,24 & 1,27 \end{pmatrix}$ – матрица, транспонированная к матрице B.

Матрица B^T является ценовым матричным мультипликатором (матричным мультипликатором ценового эффекта распространения).

Эффект распространения ΔP, вызванный изменением доли добавленной стоимости на ΔV может быть рассчитан из как $\Delta P = B^T \cdot \Delta V$.

$v_1 = \frac{z_1}{x_1} = \frac{79,26}{396,30} = 0,20; \quad v_2 = \frac{z_2}{x_2} = \frac{67,78}{338,89} = 0,20; \; v_3 = \frac{z_3}{x_3} = \frac{292,96}{418,52} = 0,70$

$V = \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,20 \\ 0,70 \end{pmatrix}; \quad \Delta V = \begin{pmatrix} 0,20 \cdot 0,2 \\ 0 \\ 0,70 \cdot 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0 \\ 0,07 \end{pmatrix};$

$\Delta P = B^T \cdot \Delta V = \begin{pmatrix} 1,85 & 0,56 & 0,74 \\ 1,01 & 1,59 & 0,69 \\ 0,32 & 0,24 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0 \\ 0,07 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,126 \\ 0,088 \\ 0,102 \end{pmatrix}$

Следовательно, для увеличения добавленной стоимости в первой отрасли на 20%, а в третьей на 10% надо увеличить цены в первой отрасли на 12,6%, во второй отрасли на 8,8%, а в третьей – на 10,2%.

№2

ЗАДАНИЕ. *В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден.ед.*

Отрасль		***Потребление***		*Конечный продукт*
		Промышленность	*Сельское хозяйство*	
Производство	*Промышленность*	*a*	*b*	*t*
	Сельское хозяйство	*c*	*d*	*f*

Найти:

1. *плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей;*
2. *необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на k%, а промышленности на l%.*

Вариант	***a***	***b***	***c***	***d***	***t***	***f***	***k***	***l***
13	0,4	0,25	0,5	0,4	300	200	30	40

РЕШЕНИЕ. Заполним таблицу данными варианта 13:

Отрасль		**Потребление**		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	*0,4*	*0,25*	*300*
	Сельское хозяйство	*0,5*	*0,4*	*200*

Найдем плановые объемы валовой продукции отраслей $X=\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$, зная, что задана матрица $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,25 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$ прямых затрат и вектор конечного продукта $Y=\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$.

Используем основную формулу межотраслевого баланса $X=(E-A)^{-1}Y$.

Обратная матрица к матрице $E-A=\begin{pmatrix}0,6 & -0,25\\ -0,5 & 0,6\end{pmatrix}$ имеет вид

$(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,6\cdot 0,6-(-0,5)\cdot(-0,25)}\begin{pmatrix}0,6 & 0,5\\ 0,25 & 0,6\end{pmatrix}^{T}\approx\begin{pmatrix}2,553 & 1,064\\ 2,128 & 2,553\end{pmatrix}$, тогда

$$X=(E-A)^{-1}Y=\begin{pmatrix}2,553 & 1,064\\ 2,128 & 2,553\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300\\ 200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}978,723\\ 1148,936\end{pmatrix}.$$

Таким образом, плановый объем валовой продукции отраслей равен $x_1=978,723$ (промышленность), $x_2=1148,936$ (сельское хозяйство).

Найдем межотраслевые поставки. Коэффициент прямых затрат определяется как объём ресурса i, необходимый для производства единицы продукта j,

т.е. $a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}$, $i,j=1,2,3$. Отсюда можно найти $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$, $i,j=1,2,3$.

Получаем:

$x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0,4\cdot 978,723=391,489.$

$x_{21}=a_{21}\cdot x_1=0,5\cdot 978,723=489,362.$

$x_{12}=a_{12}\cdot x_2=0,25\cdot 1148,936=287,234.$

$x_{22}=a_{22}\cdot x_2=0,4\cdot 1148,936=459,574.$

Получаем таблицу:

Отрасль		**Потребление**		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	*391,489*	*287,234*	*300*
	Сельское хозяйство	*489,362*	*459,574*	*200*

Найдем условно чистую продукцию отраслей из формулы

$x_j=x_{1j}+x_{2j}+z_j$, откуда $z_j=x_j-(x_{1j}+x_{2j})$, $j=1,2$.

Получим: $z_1=x_1-(x_{11}+x_{21})=97,872$, $z_2=x_2-(x_{12}+x_{22})=402,128$

Найдем необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на 30%, а промышленности на 40%, то есть новый вектор конечной продукции примет вид:

$$Y' = \begin{pmatrix} 300 \cdot 1,3 \\ 200 \cdot 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 390 \\ 280 \end{pmatrix}.$$

Тогда валовой выпуск будет равен:

$$X' = (E - A)^{-1} Y' = \begin{pmatrix} 2,553 & 1,064 \\ 2,128 & 2,553 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 390 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1293,617 \\ 1544,681 \end{pmatrix}.$$

Новый валовой выпуск для промышленности: 1293,617, для сельского хозяйства: 1544,681.

Пример 3.

Завершим составление баланса, располагая следующими данными об экономической системе, состоящей из трех экономических объектов (например, P_1 – промышленность, P_2 – сельское хозяйство, P_3 – транспорт). Прочерки в таблице означают, что X_{22}= X_{31}=0.

Отрасли	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50			200	300
P_2	10	-	40			500
P_3	-				240	
Σ				310		
V		390				
X						

Решение.

1. Используем баланс между производством и потреблением продукции P_1, для отыскания $\sum_{j=1}^{3} X_{1j}$, а затем и X_{13}:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1j} = X_1 - Y_1 = 300 - 200 = 100,$$

$$X_{13} = \sum_{j=1} X_{1j} - X_{11} - X_{12} = 100 - 20 - 50 = 30$$

2. Аналогично, используя баланс между производством и потреблением продукции P_2, найдем V_2, предварительно

подсчитав $\sum_{j=1}^{3} X_{2j} = 10+0+40 = 50 : Y_2 = X_2 - \sum_{j=1}^{3} X_{2j} = 500-50 = 450$.

3. Значения X_1 и X_2 запишем на первых двух местах в последней строке таблицы (строка X). Таблица принимает вид:

Отрасли	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-				240	
Σ				310		
V		390				
X	300	500				

4. Найдем теперь $\sum_{j=1}^{3} X_{3j} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} X_{kj} - \sum_{j=1}^{3} X_{1j} - \sum_{j=1}^{3} X_{2j} = 310-100-50 = 160$

(использовали соотношение между элементами столбца Σ)

5. $X_3 = Y_3 + \sum_{j=1}^{3} X_{3j} = 240+160 = 400$

(использован баланс между производством и потреблением продукции P_3).

6. Теперь запишем величину X_3 в столбец X и строку X.

7. Суммарные затраты всех трех отраслей на производство

продукции первой отрасли $\sum_{k=1} X_{1k} = 20+10+0 = 30$ запишем на первом месте в строке Σ.

8. Теперь можно найти условно чистую продукцию V_1 как разность между валовым выпуском $X_1 = 300$ и суммарными затратами $\sum_{k=1}^{3} X_{1k} = 30$: $V_1 = 300-30 = 270$

Таблица принимает вид:

Отрасли	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-			160	240	400
Σ	30			310		
V	270	390				
X	300	500	400			

9. Из равенства между суммарным конечным продуктом и суммарной условно чистой продукцией $\sum_{j=1}^{3} Y_j = \sum_{j=1}^{3} V_j$ получаем величину $V_3 = \sum_{j=1}^{3} Y_j - V_1 - V_2 = 200 + 450 + 240 - 270 - 390 = 230$

10. Теперь, когда строки V и X полностью заполнены, можно определить суммарные затраты на производство продукции второй и третьей отраслей:

$$\sum_{k=1}^{3} X_{k2} = X_2 - V_2 = 500 - 390 = 110,$$

$$\sum_{k=1}^{3} X_{k3} = X_3 - V_3 = 400 - 230 = 170.$$

11. Завершит составление баланса вычисление затрат продукции третьей отрасли на производство продукции P_2 и на собственные производственные нужды P_3:

$$X_{32} = \sum_{k=1}^{3} X_{k2} - X_{12} - X_{22} = 110 - 50 - 0 = 60,$$

$$X_{33} = \sum_{k=1}^{3} X_{k3} - X_{13} - X_{23} = 170 - 30 - 40 = 100.$$

Окончательно получаем:

Отрасли	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50	30	100	200	300
P_2	10	-	40	50	450	500
P_3	-	60	100	160	240	400
Σ	30	110	170	310		
V	270	390	230			
X	300	500	400			